

UNIVERSIDAD AUTONOMA "JUAN MISAEL SARACHO"

Por una universidad que
promueva, genere y
difunda conocimientos.



PLAN ESTRATEGICO DE DESARROLLO INSTITUCIONAL 2007-2011

Departamento de Planificación Universitaria
email: depla@vajms.edu.bo



S



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA “JUAN MISAEL SARACHO”
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL



INTERPRETACIÓN CIENTÍFICA Y GENERALIZACIÓN MATEMÁTICA DE FLUJO INCOMPRESIBLE EN CONDICIONES NORMALES DE PRESIÓN Y TEMPERATURA, DE SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE, PARALELO Y MIXTOS EN SUS DOS VARIANTES (SERIE-PARALELO Y PARALELO-SERIE)

REALIZADO POR: UNIVERSITARIO RAFAEL OROS
EN LA ASIGNATURA PROYECTO DE INGENIERIA CIVIL II – CIV 502
GESTIÓN ACADÉMICA 2012/II SEMESTRE

DICIEMBRE DE 2012
TARIJA – BOLIVIA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA “JUAN MISAEL SARACHO”
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL

INTERPRETACIÓN CIENTÍFICA Y GENERALIZACIÓN MATEMÁTICA DE FLUJO INCOMPRESIBLE EN CONDICIONES NORMALES DE PRESIÓN Y TEMPERATURA, DE SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE, PARALELO Y MIXTOS EN SUS DOS VARIANTES (SERIE-PARALELO Y PARALELO-SERIE)

REALIZADO POR: UNIVERSITARIO RAFAEL OROS

EN LA ASIGNATURA PROYECTO DE INGENIERIA CIVIL II – CIV 502
GESTIÓN ACADÉMICA 2012/II SEMESTRE

TARIJA – BOLIVIA

(HOJA DE ÉTICA DE AUTORÍA DEL PROYECTO)

El Docente y Tribunal evaluador del Proyecto de Ingeniería Civil no se solidarizan con los términos, la forma, los modos y las expresiones empleados en la elaboración del presente trabajo, siendo los mismos y el presente trabajo únicamente de responsabilidad y propiedad exclusiva del autor.

Dedicatoria:

A Dios en quien siempre encontré fuerza e inspiradora motivación para continuar.

A mi madre, que aunque no está conmigo sé que me cuida y me anima a seguir adelante.

A mi esposa, que está conmigo por obra y gracia de Dios, que me cuida y me motiva permanentemente.

A mi hermana, quien confió absolutamente en mí, y supo apoyarme y alentarme en mis momentos de debilidad.

Agradecimientos:

A Dios en quien siempre encontré fuerza, esperanza e inspiración permanente.

A mi madre, que aunque no está conmigo sé que me cuida y me anima a seguir adelante.

A mi hermana, quien confió absolutamente en mí, y supo apoyarme y alentarme en mis momentos de debilidad.

A mis amigos quienes me tendieron siempre la mano y creyeron que podía lograrlo.

A mi tutor que me dedicó tiempo y paciencia.

GRACIAS...

Pensamiento:

“Estoy convencido de que en este día somos dueños de nuestro destino, que la tarea que se nos ha impuesto no es superior a nuestras fuerzas, que sus embates no están por encima de lo que soy capaz de soportar. Mientras tengamos fe en nuestra causa y una indeclinable voluntad de vencer, la victoria estará siempre a nuestro alcance”

Winston Churchill, Primer Ministro Británico, durante la Segunda Guerra Mundial enfrentándose a la Alemania fascista.

ÍNDICE

RESUMEN

	Página
1. ANTECEDENTES	1
1.1 El problema	1
1.1.1 Planteamiento	3
1.1.2 Formulación	4
1.1.3 Sistematización	5
1.2 Objetivos	5
1.2.1 General	5
1.2.2 Específicos	5
1.3 Justificación	6
1.3.1 Académica	6
1.3.2 Metodológica	7
1.3.3 Práctica	7
1.4 Marco de referencia	8
1.4.1 Teórico	9
1.4.1.1 Generalización de la fórmula de pérdida de carga en una tubería	9
1.4.2 Conceptual	10
1.4.2.1 Circuitos eléctricos	10
1.4.2.1.1 Conexiones en circuitos eléctricos	10
1.4.2.1.2 La ley de Ohm	11
1.4.2.1.3 Circuito de resistores eléctricos en serie	12
1.4.2.1.4 Circuito de resistores eléctricos en paralelo	12
1.4.2.3 Características de sistemas hidráulicos de tuberías	13
1.4.2.3.1 Sistemas de tuberías en serie	13
1.4.2.3.2 Sistemas de tuberías en paralelo	14

	Página
1.4.3 Espacial	15
1.4.4 Temporal	15
1.5 Alcance del Estudio	15
1.5.1 Tipo de Estudio	16
1.5.2 Hipótesis del Proyecto	17
1.5.2.1 De Primer Grado	17
1.5.2.1 De Segundo Grado	17
1.5.2.1 De Tercer Grado	17
2. MARCO TEÓRICO	18
2.1 Descripción del álgebra básico y álgebra matricial	18
2.2 Descripción de la ley de Ohm	18
2.2.1 La electricidad	18
2.2.2 Circuitos eléctricos	19
2.2.2.1 Resistencia eléctrica	20
2.2.2.2 Corriente eléctrica	20
2.2.2.3 Voltaje ó fuerza electromotriz	21
2.2.3 La ley de Ohm	22
2.2.3.1 Circuitos de resistores en serie	23
2.2.3.2 Circuitos de resistores en paralelo	24
2.3 La ecuación general de la pérdida de carga en una tubería	25
2.3.1 Número de Reynolds	25
2.3.2 Magnitudes físicas en la ecuación general de la pérdida de carga	26
2.3.3 La fórmula de pérdida de carga en formato estándar	27
2.3.3.1 Forma resumida estándar de la fórmula de la pérdida de carga	28
2.4 Descripción de las fórmulas para pérdida de carga según diversos autores.	29
2.4.1 Fórmula de Darcy – Weisbach	29
2.4.1.1 Ecuación de Colebrook-White	30

	Página
2.4.1.2 Forma estándar de la fórmula de Darcy – Weisbach	31
2.4.1.3 Forma estándar resumida de la fórmula de Darcy – Weisbach	31
2.4.2 Fórmula de Hazen – Williams	32
2.4.2.1 Forma estándar de la fórmula de Hazen – Williams	34
2.4.2.2 Forma estándar resumida de la fórmula de Hazen – Williams	34
2.4.3 Fórmula de Chezy	35
2.4.3.1 Forma estándar de la fórmula de Chezy	35
2.4.3.2 Forma estándar resumida de la formula de Chezy	36
2.4.4 Fórmula de Manning	37
2.4.4.1 Forma estándar de la fórmula de Manning	37
2.4.4.2 Forma estándar resumida de la fórmula de Manning	37
2.5 Estudio de sistemas de tuberías en serie y paralelo	38
2.5.1 Sistemas de tuberías en serie	38
2.5.2 Sistemas de tuberías en paralelo	40
2.6 Descripción de las fórmulas existentes para el cálculo de pérdidas de carga en sistemas de tuberías en serie y paralelo	41
2.6.1 Pérdida de carga en sistemas de tuberías en serie	41
2.6.2 Pérdida de carga en sistemas de tuberías en paralelo	42
2.7 Modelo matemático para la resolución de sistemas de tuberías: serie, paralelo	44
2.7.1 Identificación de analogías conceptuales entre variables eléctricas e hidráulicas	44
3. DESARROLLO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN	47
3.1 La pérdida de carga	47
3.1.1 La naturaleza física de la pérdida de carga	48
3.1.2 Analogías conceptuales entre variables hidráulicas y eléctricas	50
3.1.3 Interpretación física de la pérdida de carga o energía y la fórmula resumida estándar de pérdida de carga o energía	52

	Página
3.2 La pérdida de carga total en sistemas de tuberías	53
3.2.1 La pérdida de carga total en sistemas de tuberías en serie	53
3.2.2 La pérdida de carga total en sistemas de tuberías en paralelo	54
3.3 El caudal individual en sistemas de tuberías	56
3.3.1 El caudal individual en sistemas de tuberías en serie	56
3.3.2 El caudal individual en sistemas de tuberías en paralelo	57
3.3.2.1 El caudal individual en sistemas de dos tuberías en paralelo	58
3.3.2.2 El caudal individual en sistemas de “N” tuberías en paralelo	63
3.3.2.2.1 Consecuencias matemáticas del factor “ R_T ”	71
3.3.2.3 Fórmulas prácticas para el cálculo de las características hidráulicas de los sistemas de dos tuberías en paralelo	72
3.3.2.3.1 Fórmulas prácticas para el cálculo de la renuencia total en sistemas de dos tuberías en paralelo	72
3.3.2.3.2 Fórmulas prácticas para el cálculo del caudal individual en sistemas de dos tuberías en paralelo	72
3.3.2.3.3 Fórmulas prácticas para el cálculo de la pérdida de carga total en sistemas de dos tuberías en paralelo	73
3.4 Corolario del modelo matemático para la resolución de sistemas de tuberías: serie, paralelo	75
3.5 Resolución por el “Teorema de Afinidad” de los sistemas de tuberías combinados: serie-paralelo y paralelo-serie	77
3.5.1 Resolución por el “Teorema de Afinidad” de los sistemas de tuberías combinados: serie-paralelo	77
3.5.2 Resolución por el “Teorema de Afinidad” de los sistemas de tuberías combinados: paralelo-serie	79
3.6 Verificación de las hipótesis	82
3.6.1 De primer grado	82
3.6.2 De segundo grado	82
3.6.3 De tercer grado	83

	Página
3.7 Contrastación con información experimental, deductiva y aplicada	83
3.7.1 Datos experimentales	83
3.7.1.1 Experimentación con sistemas de tuberías en serie	84
3.7.1.1.1 Demostración usando la fórmula de Hazen-Williams	86
3.7.1.1.2 Demostración usando la fórmula de Darcy-Weisbach	87
3.7.2 Ejemplos deductivos	90
3.7.2.1 Deducción de la pérdida de carga de un sistema de tuberías en serie de cuatro tramos iguales	90
3.7.2.1.1 Demostración	90
3.7.2.2 Deducción de caudales individuales en un sistema de tuberías en paralelo de tres tramos iguales	91
3.7.2.2.1 Demostración	92
3.7.3 Ejemplo de problema aplicado	93
3.7.3.1 Verificación del problema	95

CONCLUSIONES

ÍNDICE DE FIGURAS

	Página	
<i>Figura 1.4.2.1.1</i>	<i>Esquema de Circuitos de Resistores en Serie y Paralelo, Elaboración Propia</i>	10
<i>Figura 2.2.2</i>	<i>Circuitos de Resistores en Serie y Paralelo, Esquema de Instalación, Elaboración Propia</i>	19
<i>Figura 2.2.3</i>	<i>Esquema de circuito eléctrico, Elaboración Propia</i>	22

		Página
<i>Figura 2.2.3.1</i>	<i>Esquema de Circuito de Resistores en Serie, Elaboración Propia</i>	23
<i>Figura 2.2.3.2</i>	<i>Esquema de Circuito de Resistores en Paralelo, Elaboración Propia</i>	24
<i>Figura 2.3.2</i>	<i>Esquema de Instalación de Perdida de carga en una Tubería, Elaboración Propia</i>	26
<i>Figura 2.5.1</i>	<i>Esquema de Instalación de un Sistema de Tuberías en Serie Elaboración Propia</i>	39
<i>Figura 2.5.2</i>	<i>Esquema de Instalación de un Sistema de Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia</i>	40
<i>Figura 3.1.1</i>	<i>Circulación esquemática de Flujo: Ideal y Real, Elaboración Propia</i>	47
<i>Figura 3.1.2</i>	<i>Circulación esquemática de Flujo Real en Tubería y Canal, Elaboración Propia</i>	47
<i>Figura 3.1.1.1</i>	<i>Esquema de Tanques en equilibrio, Elaboración Propia</i>	48
<i>Figura 3.1.1.2</i>	<i>Rasante de energía – Tanques en Equilibrio, Elaboración Propia</i>	48
<i>Figura 3.1.1.3</i>	<i>Esquema de Tanque en Desequilibrio, Elaboración Propia</i>	49
<i>Figura 3.1.1.4</i>	<i>Rasante de energía – Tanques en Desequilibrio, Elaboración Propia</i>	49
<i>Figura 3.1.1.5</i>	<i>Esquema de circuitos de resistores eléctricos en serie y paralelo Elaboración propia</i>	50
<i>Figura 3.1.2</i>	<i>Esquema de analogías de factores físicos eléctricos e hidráulicos, Elaboración propia</i>	51
<i>Figura 3.3.2.1</i>	<i>Esquema de Sistema de dos Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia</i>	58
<i>Figura 3.3.2.3</i>	<i>Esquema de Sistema de “N” Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia</i>	63

		Página
<i>Figura 3.5.1</i>	<i>Esquema de Sistema Combinado de Tuberías: Serie-Paralelo, Elaboración Propia</i>	77
<i>Figura 3.5.2</i>	<i>Esquema de Sistema Combinado de Tuberías: Paralelo-Serie, Elaboración Propia</i>	79
<i>Figura 3.7.1.1</i>	<i>Grafico esquemático del Sistema de dos Tubería en Serie (experimento real), Elaboración Propia</i>	84
<i>Figura 3.7.2.1</i>	<i>Esquema de Sistema de cuatro Tuberías en Serie, Elaboración Propia</i>	90
<i>Figura 3.7.2.2</i>	<i>Esquema de Sistema de tres Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia</i>	91
<i>Figura 3.7.3</i>	<i>Esquema de Sistema Total Combinado en Configuración Serie-Paralelo, Problema aplicado, Elaboración Propia</i>	93

ÍNDICE DE TABLAS

		Página
<i>Tabla 2.7.1</i>	<i>Tabla de posibles analogías entre factores eléctricos e hidráulicos, Elaboración Propia</i>	44
<i>Tabla 2.7.1A</i>	<i>Tabla Testigo, Variables físicas en circuitos eléctricos, Elaboración Propia</i>	45
<i>Tabla 2.7.1B</i>	<i>Tabla Actual, Variables físicas en Sistemas de Tuberías, Elaboración Propia</i>	45
<i>Tabla 3.1.2</i>	<i>Tabla de analogías resultantes de factores físicos eléctricos e hidráulicos, Elaboración propia</i>	52
<i>Tabla 3.4.1</i>	<i>Tabla Resultado de analogías entre factores eléctricos e hidráulicos, Elaboración propia</i>	75

		Página
<i>Tabla 3.4.1A</i>	<i>Testigo, Características físicas en circuitos eléctricos, Elaboración Propia</i>	75
<i>Tabla 3.4.1B</i>	<i>Tabla - Características físicas en Sistemas de Tuberías, Elaboración Propia</i>	76
<i>Tabla 3.7.1.1.1</i>	<i>Datos iniciales de las Tuberías reales del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia</i>	84
<i>Tabla 3.7.1.1.2</i>	<i>Datos Generales del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia</i>	85
<i>Tabla 3.7.1.1.3</i>	<i>Resultados del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Metodología “Manual de Practicas del Laboratorio de Hidráulica - UAJMS”.</i>	85
<i>Tabla 3.7.1.1.1.1</i>	<i>Resultados de valores comparativos del Experimento real, usando la fórmula de Hazen-Williams, para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia</i>	87
<i>Tabla 3.7.1.1.2.1</i>	<i>Valores tabulados de f y de las Renuencias Individuales del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia</i>	88
<i>Tabla 3.7.1.1.2.2</i>	<i>Resultados del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Metodología “Manual de Practicas del Laboratorio de Hidráulica - UAJMS”, según la formula de Darcy-Weisbach</i>	88
<i>Tabla 3.7.1.1.2.3</i>	<i>Resultados de valores comparativos del Experimento real, usando la formula de Darcy-Weisbach, para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia</i>	89

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS:

- A. ÁLGEBRA BÁSICO Y ÁLGEBRA MATRICIAL
- B. PRINCIPIO DE BERNOULLI
- C. LA RESISTENCIA HIDRÁULICA (RENUENCIA HIDRÁULICA)
- D. ECUACIONES Y TABLAS AUXILIARES
- E. DATOS EXPERIMENTALES DE SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE PARA EXPERIMENTACIÓN: HAZEN-WILLIAMS Y DARCY-WEIBACH
- F. DIAGRAMAS DE FLUJO SIMPLES
- H. PRUEBA NUMÉRICA CON UN PROGRAMA INFORMÁTICO

RESUMEN

El presente trabajo establece una similitud de comportamiento entre circuitos eléctricos de resistores y sistemas hidráulicos de tuberías, y sistematiza completamente la resolución del último sistema, encontrando relaciones algebraicas que aparentemente escapaban a la observación. Este trabajo no es un modelo matemático ni un método numérico de resolución para la obtención de las características de los sistemas hidráulicos de tuberías. Como se verá, este trabajo ofrece la resolución completa de las características de los sistemas de tuberías mediante el descubrimiento de los vínculos algebraicos que existen entre los elementos que constituyen estos sistemas, descubriendo claramente el espacio vectorial inherente a los sistemas mismos, y expone la afinidad entre sistemas parecidos de naturalezas eléctrica e hidráulica. Los resultados mismos del trabajo pueden obtenerse y ampliarse de manera automática mediante su tratamiento informático. Se presentan, además una ampliación de la aplicación de los resultados de este trabajo hacia sistemas de tuberías combinados: serie-paralelo y paralelo-serie.

ABSTRACT

The present work establishes a behavior similarity between electric circuits of resistors and hydraulic systems of pipes, and they systematize the resolution of the last system completely, finding algebraic relationships that seemingly escaped to the observation. This work is not a mathematical model neither a numeric method of resolution for the obtaining of the characteristics of the hydraulic systems of pipes. As it will be seen, this work offers the complete resolution of the characteristics of the systems of pipes by means of the discovery of the algebraic bonds that exist among the elements and that constitute these systems, discovering the inherent vectorial space clearly to the same systems, and it exposes the likeness between electric similar systems of natures and hydraulics. The same results of the work can be obtained and to be enlarged in an automatic way by means of their computer treatment. They are presented, also an amplification of the application of the results of this work toward combined systems of pipes: series-parallel and parallel-series.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

1. ANTECEDENTES

1.1 EL PROBLEMA

Pocos problemas en Hidráulica han merecido tanta atención o han sido tan poco investigados como el de la determinación de las características hidráulicas de los sistemas de tuberías complejos: serie, paralelo, serie-paralelo, paralelo-serie. Las dificultades que se presentan en el estudio analítico de esta cuestión son tantas, que llevaron a los investigadores a realizar estudios experimentales.

Con los experimentos de Reynolds (1883), se abre el camino científico al problema, al reconocer la existencia del flujo laminar y el flujo turbulento. El número de Reynolds, viene dado por la expresión:

$$\text{Re} = \frac{vD}{\nu} \quad (1.1)^1$$

Donde:

Re ~ número de Reynolds, adimensional

V ~ velocidad media del líquido en la sección, en m/s

D ~ diámetro de la sección, en m

ν ~ Viscosidad dinámica, en m^2/s . Depende de la temperatura

De acuerdo al número de Reynolds, el régimen de circulación de un fluido, en una conducción forzada, se puede clasificar en:

Re < 2200 Régimen laminar

2200 < Re < 4500 Régimen transicional

Re > 4500 Régimen turbulento

Para el caso de tuberías donde el régimen laminar o turbulento se ha desarrollado completamente, se puede establecer que las pérdidas de carga (hf), son:

- Directamente proporcional a la longitud.

¹ Formula del número de Reynolds (Re), pagina 7, "Hidráulica de Tuberías", Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

- Inversamente proporcional a una potencia del diámetro.
- Proporcional a una potencia entre 1 y 2 de la velocidad media del líquido.
- Varía con la naturaleza de las paredes de la tubería (rugosidad), en el régimen turbulento y de transición.
- Es independiente de la posición del tubo.
- Es independiente de la presión interna bajo la cual, el líquido fluye.
- Es función de las características físicas del fluido, de su densidad absoluta y de su viscosidad.

Para una tubería dada, la pérdida de carga por fricción o pérdida de energía, a semejanza de la fórmula de Darcy-Weisbach, puede ser expresada como:

$$hf = k \frac{L \cdot V^n}{D^m} \quad (1.2)^2$$

Donde:

hf ~ pérdida de carga por fricción o pérdida de energía, en [m].

V ~ velocidad media del líquido en la sección, en [m/s].

D ~ diámetro de la sección, en [m].

L ~ longitud recta de tubería, en [m].

k ~ coeficiente que toma en cuenta las condiciones físicas de la tubería

n ~ exponente que afecta a la velocidad, varía entre 1 y 2

m ~ exponente que afecta al diámetro de la tubería

Si se designa a (hf/L) como S_f , esto es, la pérdida de carga unitaria por metro lineal de la tubería, la expresión anterior se puede escribir de la siguiente forma, ecuación (1.2a):

² Fórmula de pérdida de carga (hf), página 96, "Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica", Ernesto Gracia Ruiz, Editorial Offsset Universitaria "UAJMS", 1997.

$$D^m \cdot Sf = k \cdot V^n \quad (1.2a)^3$$

En la práctica esta expresión general de “**Resistencia Hidráulica**”⁴ se sustituye por fórmulas empíricas establecidas para determinadas condiciones. Para estudiar el problema de la resistencia al flujo, es necesario considerar las diferencias en el comportamiento de los flujos laminar y turbulento. En el flujo laminar las capas adyacentes del fluido se desplazan paralelas entre sí, sin velocidades transversales a la corriente. El flujo turbulento presenta velocidades transversales a la corriente, las mismas que originan remolinos.

En sistemas de tuberías complejos: serie, paralelo, serie-paralelo, paralelo-serie, se utilizan también estas expresiones para poder determinar todas las características hidráulicas y físicas que intervienen en el comportamiento de tales sistemas. Sin embargo, este trabajo propone que las expresiones empíricas se pueden organizar en un orden natural a similitud de sistemas similares de flujo. Se toma como base de comparación los circuitos eléctricos.

1.1.1 PLANTEAMIENTO

Entre algunas de las peculiaridades y dificultades que presenta el problema del “Comportamiento de Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”, se tiene los siguientes:

- Casi en su totalidad, la bibliografía existente y referente a este tema es ambigua, exigua, sin abundar en detalles, que utiliza el método numérico por tanteo, que no es científico y que se presta a diferentes interpretaciones, siendo la más común: “resolver adivinando, y asumiendo a priori una dirección para un flujo cualquiera en un sistema de tuberías dado.
- Asimismo la bibliografía existente, referente a este problema, solo abarca los casos sencillos y casi siempre los casos complejos (por ejemplo sistemas de tuberías de más de 3 tramos, o combinación de tuberías en serie-paralelo), se trataban por separado con métodos no científicos o no se resolvían.

³ Fórmula de pérdida de carga (hf) por metro lineal, pagina 97, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto Gracia Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

⁴ Ver detalles sobre este factor hidráulico en el Anexo C.

- Como se verá en el desarrollo de la parte teórica de los factores influyentes en el problema “Comportamiento de Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”, todos ellos están vinculados entre si y organizados de tal manera que su tratamiento matemático es inherente al sistema mismo.
- No existe una vinculación clara y precisa entre la “Ley de Ohm” con la situación similar en un sistema de tubería organizado. No se logra establecer la afinidad con sistemas de flujos de naturaleza similar., por ejemplo con sistemas de resistores eléctricos.
- Inexistencia de leyes, teoremas y de modelos matemáticos que establezcan de manera sólida las relaciones entre los factores físicos, geométricos e hidráulicos de tales sistemas.
- Ausencia de vínculos matemáticos o racionales que establezcan relaciones entre las diversas fórmulas empíricas y que estandaricen los formatos conocidos por la bibliografía existente. Al abordar la resolución matemática formal de estos sistemas, no existe una vinculación clara con métodos resolutivos matriciales o de cualquier otra índole, salvo los empíricos.
- Al establecer una visión matemática matricial de este problema, se observa que el tratamiento informático del mismo es una consecuencia ventajosa.

1.1.2 FORMULACIÓN

Se presenta estas dos alternativas de solución, para abordar la resolución y generalización de los sistemas de tuberías: serie, paralelo, serie-paralelo, paralelo-serie:

- Asimilar y Sistematizar completamente la resolución de sistemas de tuberías en serie, paralelo, mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie), basándose en la afinidad con sistemas de resistores eléctricos.
- Elaboración de una Interpretación Científica y Generalización Matemática en flujo incompresible para tuberías organizadas, explicando el comportamiento físico e

hidráulico de Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie).

1.1.3 SISTEMATIZACIÓN

Se plantean las siguientes sub-interrogantes, en base a la elección de la alternativa posible y responder las preguntas:

¿Cual es la analogía de los sistemas bajo estudio con sistemas de flujo eléctricos?.

¿Como se redefinen las variables intervinientes en tales sistemas: pérdida de energía, caudal y rugosidad hidráulica de tuberías, en función de variables similares de sistemas de resistores eléctricos?.

¿Cual es la interpretación científica de la Pérdida de carga, Caudal y Rugosidad hidráulica, en tuberías y sistemas de tuberías?.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 GENERAL

El objetivo del presente trabajo de investigación se resume así:

- Elaborar un Plan de estudio analítico, descriptivo y exploratorio para demostrar que un sistema análogo (sistema eléctrico) presenta factores similares a un sistema hidráulico de tuberías de tales características, y que algunos factores hidráulicos pueden redefinirse en función a las características de sistemas eléctricos. Por lo tanto la resolución formal de ambos sistemas debe obedecer a reglas matemáticas similares con características científicas afines.

1.2.2 ESPECÍFICOS

Entre los objetivos específicos se tienen:

- Asimilar y Sistematizar completamente la resolución de sistemas de tuberías en serie, paralelo, mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie),

basándose en la afinidad con sistemas de resistores eléctricos, con ayuda de la “Ley de Ohm”.

- Establecer de manera clara y concisa el espacio vectorial inherente a los sistemas mismos y descubrir la afinidad casi total entre sistemas parecidos de naturalezas eléctrica e hidráulica.
- Redefinir, algunos factores de los sistemas hidráulicos de tuberías, para encontrar que el comportamiento de sistemas de tuberías con flujo incompresible, obedece a leyes naturales similares.
- Estudiar y analizar un método científico-matemático de naturaleza práctica para la resolución formal del “Comportamiento de Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”, en todas sus características hidráulicas, empleando conocimiento matemático y una metodología algorítmica de construcción práctica.
- Demostrar que el “Comportamiento de Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”, es un sistema organizado de factores, de complejidad creciente y orientado a la resolución matemática matricial y programación en ordenadores. Todo esto señala un método de resolución de naturaleza científica.
- Presentar ejemplos demostrativos a detalle de la resolución de un sistema tuberías en serie, en paralelo, en serie-paralelo, en paralelo-serie.

1.3 JUSTIFICACIÓN

1.3.1 ACADÉMICA

Se pueden resumir en los siguientes aspectos:

- Ampliar el material bibliográfico referente a esta interrogante hidráulica, lo que repercute en la necesidad de elaborar un procedimiento científico válido para la resolución del estudio del “Comportamiento de Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”.

- La bibliografía existente y referente a este tema es ambigua, sin abundar en detalles, por lo tanto se hace necesario la elaboración de una base bibliográfica seria y de un modelo matemático sólido, descartando el método numérico por tanteo, que no es científico y que se prestaba a diferentes interpretaciones, siendo la más común: “resolver adivinando, y asumiendo a priori una dirección para un flujo cualquiera”.
- Como se ve en las posibles consecuencias de este trabajo de investigación, muchas consecuencias son orientadas hacia el conocimiento puro y su aplicación esta orientada hacia la pedagogía, la interpretación matemática de este problema y hacia la implementación de instrumentos de cálculo altamente eficientes y veloces (programas informáticos).

1.3.2 METODOLÓGICA

Entre estas se pueden mencionar las más relevantes:

- Establecer la afinidad del “Comportamiento de Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”, con otros sistemas de flujo similares, siguiendo un método de resolución de naturaleza científica, en base a conocimiento matemático sólido.
- Los procedimientos matemáticos a encontrar, permitirán establecer la afinidad entre sistemas similares (eléctricos e hidráulicos). Por lo tanto se aplicará la metodología de elaboración de algoritmos para resolver en todas sus características los “Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”.

1.3.3 PRÁCTICA

Se pueden exponer los siguientes incisos:

- El material bibliográfico a desarrollar, permitirá visualizar de manera matemática y científica este problema, incrementando la bibliografía referente a este tema.

- El material bibliográfico a desarrollar, permitirá la comprensión de “Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”, más asimilable para los estudiantes e investigadores.
- El material bibliográfico a desarrollar, permitirá establecer de manera clara y concisa el espacio vectorial inherente a los sistemas mismos y descubrir la afinidad casi total entre sistemas parecidos de naturalezas eléctrica e hidráulica.
- Los procedimientos matemáticos a encontrar, permitirán desarrollar algoritmos informáticos para la elaboración de instrumentos de cálculo automático (Aplicaciones y programas informáticos orientados a calculadoras y ordenadores personales), para resolver en todas sus características los “Sistemas de Tuberías en Serie, Paralelo y Mixtos en sus dos variantes (Serie-Paralelo y Paralelo-Serie)”. Asimismo, estos procedimientos permitirán cálculos más simples y rápidos de problemas hidráulicos de tuberías simples y con complejidad creciente, sean estos de naturaleza manual o automatizada.

1.4 MARCO DE REFERENCIA

Para el desarrollo del Trabajo de Investigación se ha elaborado, el siguiente marco referencial:

- El presente trabajo de investigación forma parte de la Física Teórica, Física Aplicada, de la Hidráulica, del análisis de sistemas de tuberías que conducen fluidos incompresibles bajo condiciones normales de presión y temperatura, dentro del rango de condiciones de trabajos de ingeniería.
- Por lo tanto las consecuencias de este trabajo son aplicables a condiciones de flujo incompresible bajo condiciones de presión y temperatura, dentro del rango de condiciones de trabajos de ingeniería.
- A partir del análisis cualitativo y cuantitativo de las características geométricas, físicas e hidráulicas se pretende elaborar un modelo físico-matemático para explicar el comportamiento de sistemas de tuberías: serie, paralelo, serie-paralelo, paralelo-serie, identificando sus características: análisis cualitativo y cuantitativo de sistemas

de tuberías organizados, en base a sistemas organizados de naturaleza eléctrica, a través de la “Ley de Ohm” y de análisis de circuitos eléctricos de resistores.

- La bibliografía a utilizar será detallada en la sección de bibliografía consultada.

1.4.1 TEÓRICO

Entre las formulas para calcular la pérdida de carga en una tubería, se tienen:

- Fórmula de Darcy - Weisbach
- Fórmula de Hazen-Williams
- Fórmula de Chezy (Tuberías)
- Fórmula de Manning (Tuberías)

1.4.1.1 GENERALIZACIÓN DE LA FÓRMULA DE PÉRDIDA DE CARGA EN UNA TUBERÍA

Las cuatro fórmulas presentadas anteriormente son las que se consideran como herramientas básicas para el desarrollo de este trabajo.

La pérdida hidráulica de carga o de energía en una conducción forzada puede ser “re-escrita” en una forma estándar general bajo la expresión:

$$hf_i = B_i \times L_i \times (Q_i)^n \quad (1.3a)^5$$

Donde:

hf_i ~ Pérdida de carga o de energía en una tubería.

B_i ~ Coeficiente en función del diámetro de tubería y de un factor de pérdida adimensional. En algunos casos se considera el número de Reynolds.

L_i ~ Longitud de tubería.

⁵ Denominación adoptada, fórmula estándar de pérdida de carga ó de energía (hf), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2007.

La manera más simple de conectar componentes eléctricos es disponerlos de forma lineal, uno detrás del otro. Este tipo de circuito se denomina “circuito en serie” (izquierda de la figura 1.4.2.1.1). Si un resistor del circuito deja de funcionar, el siguiente también lo hará debido a que se interrumpe el flujo de corriente eléctrica. Un “circuito en paralelo” consiste en resistores con su propio suministro eléctrico. Si uno de ellos colapsa, el otro continúa funcionando (derecha de la figura 1.4.2.1.1).

1.4.2.1.2 LEY DE OHM

Esta ley tiene el nombre del físico alemán Georg Simon Ohm, que en un tratado publicado en 1827, halló valores de tensión y corriente que circulaban a través de unos circuitos eléctricos simples. Según la ley de Ohm, la cantidad de corriente que fluye por un circuito formado por resistencias es directamente proporcional a la fuerza electromotriz aplicada al circuito, e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito.

Matemáticamente se expresa por la fórmula:

$$I = \frac{E}{R} \quad (1.11)^6$$

Donde:

I ~ Intensidad de corriente en amperios, [A].

E ~ Fuerza electromotriz en voltios, [V]

R ~ Resistencia eléctrica en ohmios, [Ω].

Esta ley se cumple para circuitos pasivos (solo resistores), o circuitos que han alcanzado un régimen permanente. La ley de Ohm se aplica a circuitos eléctricos de corriente continua (CC) y de corriente alterna (CA), aunque para el análisis de circuitos complejos y circuitos de CA deben emplearse principios adicionales.

⁶ “Física”, Tomo II, página 97, Alonso Finn, Editorial Mc Graw Hill, 1998. Se presentan estas magnitudes físicas en unidades del sistema internacional SI.

1.4.2.1.3 CIRCUITO DE RESISTENCIAS EN SERIE

Un circuito en serie presenta sus elementos uno a continuación de otro, de tal manera que la totalidad de corriente pasa a través de cada uno de los elementos. La resistencia total de este circuito se calcula mediante la fórmula:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N \quad (1.12)^7$$

Donde:

R_s ~ Resistencia total en un circuito en serie, en ohmios, [Ω].

R_i ~ Resistencia individual en el i-esimo resistor, en ohmios, [Ω]

R_N ~ Resistencia individual en el resistor N, en ohmios, [Ω]

1.4.2.1.3 CIRCUITO DE RESISTENCIAS EN PARALELO

En un circuito en paralelo los dispositivos eléctricos, por ejemplo todos los resistores, están conectados con todos los terminales positivos (+) en una misma conexión, y todos los negativos (-) en otra. La resistencia total del circuito se calcula por la expresión:

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}} \quad (1.13)^8$$

Donde:

R_p ~ Resistencia total en un circuito en paralelo, en ohmios, [Ω].

R_i ~ Resistencia individual en el i-esimo resistor, en ohmios, [Ω]

R_N ~ Resistencia individual en el resistor N, en ohmios, [Ω]

⁷ Fórmula para calcular la resistencia total en un circuito de resistencias en serie, "Física", Tomo II, página 99, Alonso Finn, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

⁸ Fórmula para calcular la resistencia total en un circuito de resistencias en paralelo, "Física", Tomo II, página 100, Alonso Finn, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

1.4.2.3 CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS SISTEMAS DE TUBERÍAS

1.4.2.3.1 SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE

Sistema formado por varias tuberías simples, conectadas una a continuación de la otra. En este sistema las pérdidas de carga de las tuberías obedecen la expresión:

$$hf_s = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_{N-1} + hf_N \quad (1.20)^9$$

Donde:

hf_s ~ Pérdida de carga en el sistema en serie.

hf_1 ~ Pérdida de carga en la tubería 1.

hf_i ~ Pérdida de carga en la i -ésima tubería.

hf_N ~ Pérdida de carga en la tubería N.

El caudal circulante por el sistema es único y circula por todas las tuberías 1, 2, $N-1$ y N .

$$Q_s = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{N-1} = Q_N \quad (1.21)^{10}$$

Donde:

Q_s ~ Caudal entrante al sistema en serie.

Q_1 ~ Caudal circulante por la tubería 1.

Q_i ~ Caudal circulante por la i -ésima tubería.

Q_N ~ Caudal circulante por la tubería N.

⁹ Fórmula de pérdida de carga total (hf), para un sistema de tuberías en serie, pagina 110, “Manual de Practicas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

¹⁰ Fórmula de Caudal Total y Parcial, para un sistema de tuberías en serie, pagina 110, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

1.4.2.3.2 SISTEMAS DE TUBERÍAS EN PARALELO

Un sistema de tuberías en paralelo está formado por tuberías que se disponen de tal modo que sus extremos son comunes. La pérdida de carga de este sistema es única, es decir:

$$hf_p = hf_1 = hf_2 = \dots = hf_{N-1} = hf_N \quad (1.30)^{11}$$

Donde:

hf_p ~ Pérdida de carga en el sistema en paralelo.

hf_1 ~ Pérdida de carga en la tubería 1.

hf_i ~ Pérdida de carga en la i -ésima tubería.

hf_N ~ Pérdida de carga en la tubería N.

El caudal que circula por el sistema en paralelo es la sumatoria de todos los sub-caudales que circulan por las tuberías 1, 2, N-1 y N:

$$Q_p = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{N-1} + Q_N \quad (1.31)^{12}$$

Donde:

Q_p ~ Caudal entrante al sistema en paralelo.

Q_1 ~ Caudal circulante por la tubería 1.

Q_i ~ Caudal circulante por la i -ésima tubería.

Q_N ~ Caudal circulante por la tubería N.

¹¹ Fórmula de pérdida de carga total y parcial (hf), para un sistema de tuberías en paralelo, pagina 110-111, "Manual de Practicas del Laboratorio de Hidráulica", Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria "UAJMS", 1997.

¹² Fórmula de Caudal Total para un sistema de tuberías en paralelo, pagina 111, "Manual de Practicas del Laboratorio de Hidráulica", Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria "UAJMS", 1997

1.4.3 ESPACIAL

El presente trabajo de investigación será desarrollado bajo la dirección académica de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Autónoma “Juan Misael Saracho” como requisito fundamental para optar al grado de Licenciatura.

Sin embargo, este trabajo de investigación es y será el producto del trabajo individual del Autor, a través de los años de estudio en casa así como en los ambientes universitarios.

1.4.4 TEMPORAL

El presente trabajo de investigación se desarrolla a inicios del siglo XXI, al finalizar la primera década y comenzar la segunda década.

El análisis cualitativo, de los factores y magnitudes de los sistemas de tuberías en serie, paralelo, serie-paralelo y paralelo-serie, fue un proceso que se inicio al ingresar a los conocimientos de las disciplinas de Hidráulica, Algebra y su posterior vinculación con la Física general.

Como cualquier trabajo de investigación, todo lo que se exponga en este trabajo será válido hasta que surjan trabajos más competentes y más profundos o en caso excepcional este trabajo será aceptado como conocimiento fidedigno y comprobado, demostrando que la investigación esta íntimamente ligado a la tecnología presente durante el tiempo de realización del trabajo de investigación.

1.5 ALCANCE DEL ESTUDIO

En el presente proyecto de grado se proporcionarán criterios sólidos y con base científica y matemática para resolver problemas vinculados al objeto del estudio.

Entre algunos aspectos importantes del alcance del estudio se tiene:

- Generación de nuevo conocimiento, ampliando la bibliografía existente. Esta última servirá como base de estudio para futuras investigaciones.

- Aplicación al modelaje hidráulico: Diseño y Rediseño teórico de sistemas de tuberías: nuevos y en uso.
- Determinación experimental de los factores de fricción (según modelo de muchos autores y otros por venir).
- Asimilación informática, es decir que los resultados de este trabajo servirán como base matemática y científica para la elaboración de programas informáticos.

1.5.1 TIPO DE ESTUDIO

Una vez que se ha efectuado la revisión de la literatura y definido el planteamiento del problema a investigar se considera el tipo de estudio del proyecto, el cual abarca los siguientes aspectos:

- Exploratorio
- Descriptivo
- Correlacional
- Explicativo

El presente trabajo de investigación es completo, debido a que resume los cuatro factores de la metodología de la investigación

Es exploratorio, porque busca en la bibliografía existente, todo el material disponible sobre este tema.

Es descriptivo, porque describe de manera muy detallada los factores más relevantes del problema a estudiar, tales como: geometría del problema, características físicas de las tuberías, relaciones entre estos factores, etc.

Es correlacional, porque no pretende solamente establecer relaciones entre estos factores, sino que va más allá, al establecer similitudes con sistemas parecidos de naturaleza eléctrica.

Es explicativo, porque ofrece una explicación científica sobre la naturaleza y el comportamiento de tales sistemas.

1.5.2 HIPÓTESIS DEL PROYECTO

De acuerdo a la información expuesta hasta aquí, se han elaborado las siguientes hipótesis:

1.5.2.1 DE PRIMER GRADO

- La “Ley de Ohm”, para sistemas de circuitos eléctricos se adapta, por su afinidad, a sistemas hidráulicos de tuberías
- Ambos sistemas, eléctricos e hidráulicos, obedecen a reglas matemáticas similares.
- Los factores hidráulicos de analogía similar, pueden redefinirse en función a las características de los factores de sistemas eléctricos similares: circuitos eléctricos en serie y paralelo, con sistemas de tuberías en serie y paralelo.

1.5.2.2 DE SEGUNDO GRADO

- Es posible la generalización matemática de los factores y magnitudes de estos sistemas.
- Hasta que nivel de incertidumbre es posible la resolución de sistemas de tuberías hidráulicas, es decir que cantidad de variables debe contener un sistema hidráulico para ser resuelto.
- Siendo este un problema de ingeniería, cual es el nivel de significancia de cifras numéricas a esperar en los resultados

1.5.2.3 DE TERCER GRADO

- Los resultados cualitativos esperados de este trabajo de investigación pueden expresarse como postulados ya definidos de la “Ley de Ohm”.
- Las definiciones conceptuales de los factores y magnitudes de los sistemas de tuberías hidráulicas pueden expresarse como sus similares, en sistemas eléctricos.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2. MARCO TEORICO

2.1 DESCRIPCIÓN DEL ALGEBRA CLASICO Y ALGEBRA MATRICIAL

El Álgebra es una rama de las matemáticas en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Para mas detalles sobre el algebra ver el “*Anexo A*”.

2.2 DESCRIPCIÓN DE LA LEY DE OHM

2.2.1 LA ELECTRICIDAD

La electricidad⁵⁰ es la parte de la Física que estudia los fenómenos físicos vinculados a la existencia de cargas eléctricas y su interacción mutua. Las cargas eléctricas estacionarias, producen fuerzas eléctricas sobre otras cargas situadas en sus cercanías. Las cargas cuando están en movimiento, producen además efectos magnéticos. Los efectos eléctricos y magnéticos dependen de la posición y movimiento relativos de las partículas cargadas. Los efectos eléctricos de estas partículas dependen de su naturaleza neutra, positiva o negativa. El comportamiento de las partículas cargadas puede resumirse diciendo que *cargas del mismo signo se repelen y cargas de distinto signo se atraen*.

Fue en los siglos XVIII y XIX, cuando los físicos italianos Luigi Galvani y Alessandro Volta realizaron los primeros experimentos con corrientes eléctricas. Galvani produjo contracciones musculares en las patas de una rana aplicándoles una corriente eléctrica. En 1800, Volta presentó la primera fuente electroquímica artificial de tensión, un tipo de pila eléctrica o batería.

La existencia de un campo magnético en torno a un flujo de corriente eléctrica fue demostrada por el científico danés Hans Christian Oersted (1819), y en 1831 Faraday demostró que la corriente circulante por una espira conductora puede inducir electromagnéticamente una corriente en otra espira cercana. Alrededor de 1840, James Prescott Joule y el científico alemán Hermann von Helmholtz demostraron que los circuitos eléctricos cumplen la ley de conservación de la energía, y que la electricidad es una forma de energía.

⁵⁰ Definición, Enciclopedia Ilustrada LAROUSSE, Tomo 4, página 357, LAROUSSE S.A., Sociedad Comercial y Editorial Santiago Ltda., 1998.

El físico matemático británico James Clerk Maxwell realizó una aportación importante al estudio de la electricidad en el siglo XIX; Maxwell investigó las propiedades de las ondas electromagnéticas y la luz, y desarrolló la teoría de que ambas tienen la misma naturaleza. Su trabajo abrió el camino al físico alemán Heinrich Hertz, que produjo y detectó ondas eléctricas en la atmósfera en 1886, y al ingeniero italiano Guglielmo Marconi, que en 1896 empleó esas ondas para producir el primer sistema práctico de señales de radio.

La teoría de los electrones, base de la teoría eléctrica moderna, fue presentada por el físico holandés Hendrik Antoon Lorentz en 1892. El primero en medir con precisión la carga del electrón fue el físico estadounidense Robert Andrews Millikan, en 1909. El uso generalizado de la electricidad como fuente de energía se debe en gran medida a ingenieros e inventores pioneros de Estados Unidos, como Thomas Alva Edison, Nikola Tesla o Charles Proteus Steinmetz.

2.2.2 CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Un circuito eléctrico representa el trayecto de una corriente eléctrica, a través de conductores y dispositivos eléctricos, que incluye una fuente de fuerza electromotriz.

Técnicamente, en cualquier sistema continuo de conductores, los electrones fluyen desde el punto de menor potencial hasta el punto de mayor potencial. Un sistema de esa clase se denomina circuito eléctrico⁵¹, tal como el que se observa en la figura 2.2.1.

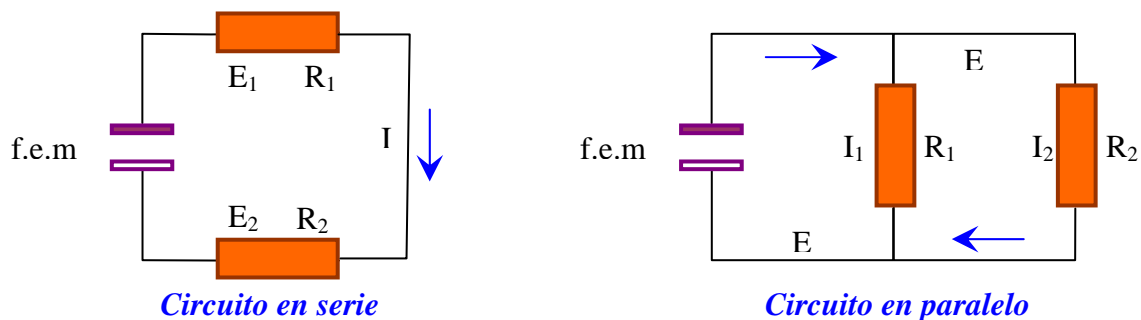


Figura 2.2.2 Circuitos de Resistores en Serie y Paralelo, Esquema de Instalación
Elaboración Propia.

⁵¹ Definición, Enciclopedia Ilustrada LAROUSSE, Tomo 4, página 357, LAROUSSE S.A., Sociedad Comercial y Editorial Santiago Ltda., 1998.

Un circuito de este tipo se denomina circuito cerrado, y aquéllos en los que el trayecto no es continuo se denominan abiertos. Un cortocircuito es un circuito en el que se efectúa una conexión directa, sin resistencia, inductancia ni capacitancia apreciables.

La cantidad de energía desprendida en un circuito eléctrico se mide en julios. La potencia consumida se mide en vatios; 1 vatio equivale a 1 julio por segundo.

La potencia P consumida por un circuito determinado puede calcularse a partir de la expresión $P = E \times I$. O la que se obtiene al aplicar a ésta la ley de Ohm $P = I^2 \times R$.

2.2.2.1 RESISTENCIA ELÉCTRICA

La resistencia eléctrica es la propiedad de un objeto de oponerse al paso de una corriente eléctrica. La resistencia de un circuito eléctrico determina, según la ley de Ohm cuánta corriente fluye en el circuito cuando se le aplica un voltaje determinado.

La unidad de resistencia eléctrica es el ohmio, que es la resistencia de un conductor si es recorrido por una corriente de un amperio cuando se le aplica una tensión de 1 voltio. La abreviatura habitual para la resistencia eléctrica es R , y el símbolo del ohmio es la letra griega omega, $[\Omega]$.

La resistencia de un conductor viene determinada por una propiedad de la sustancia que lo compone, conocida como conductividad, por la longitud por la superficie transversal del objeto, así como por la temperatura. A una temperatura dada, la resistencia es proporcional a la longitud del conductor e inversamente proporcional a su conductividad y a su superficie transversal. Generalmente, la resistencia de un material aumenta cuando crece la temperatura⁵².

2.2.2.2 CORRIENTE ELÉCTRICA

Si dos cuerpos de carga igual y opuesta se conectan a través de un conductor metálico, las cargas se neutralizan mutuamente. La neutralización sucede por el flujo de electrones a

⁵² El término resistencia también se emplea cuando se obstaculiza el flujo de un fluido o el flujo de calor. El rozamiento crea resistencia al flujo de fluido en una tubería, y el aislamiento proporciona una resistencia térmica que reduce el flujo de calor desde una temperatura más alta a una más baja.

través del conductor, desde el cuerpo cargado negativamente al cargado positivamente (en ingeniería eléctrica, se considera que la corriente fluye desde la carga positiva a la negativa).

La corriente, se denomina corriente continua (C.C.) si fluye siempre en un mismo sentido y corriente alterna (C.A.) si fluye alternadamente en uno u otro sentido.

El flujo de una corriente continua está determinado por tres magnitudes relacionadas entre sí. La primera es la diferencia de potencial en el circuito, que en ocasiones se denomina fuerza electromotriz (fem), tensión o voltaje. La segunda es la intensidad de corriente. Esta magnitud se mide en amperios; 1 amperio corresponde al paso de unos 6.250.000.000.000.000 electrones por segundo por una sección determinada del circuito. La tercera magnitud es la resistencia del circuito.

Cuando una corriente eléctrica fluye por un conductor pueden observarse dos efectos importantes:

- La temperatura del conductor. Al circular la corriente, los electrones que la componen colisionan con los átomos del conductor y ceden energía, que se aprecia en forma de calor.
- Un imán o brújula colocada cerca del cable se desvía, apuntando en dirección perpendicular al conductor (efecto magnético vinculado a la inducción eléctrica).

2.2.2.3 VOLTAJE, TENSION O FUERZA ELECTROMOTRIZ

El voltaje, tensión, diferencia de potencial o fuerza electromotriz es el fenómeno físico responsable de la circulación de la corriente eléctrica en un circuito cerrado o abierto. La circulación de la corriente eléctrica se lleva a cabo mediante un flujo de electrones a través del conductor, desde el cuerpo cargado negativamente al cargado positivamente. En cualquier sistema continuo de conductores, los electrones fluyen desde el punto de menor potencial hasta el punto de mayor potencial. Las fuentes de tensiones conocidas y disponibles por la técnica, son las siguientes:

- Máquinas electrostáticas, que se basan en el principio de inducir cargas eléctricas por medios mecánicos

- Máquinas electromagnéticas, en las que se genera corriente desplazando mecánicamente un conductor a través de un campo o campos magnéticos
- Células voltaicas, que producen una fuerza electromotriz a través de una acción electroquímica
- Dispositivos que producen una fuerza electromotriz a través de la acción del calor
- Dispositivos que generan una fuerza electromotriz por la acción de la luz
- Dispositivos que producen una fuerza electromotriz a partir de una presión física, como los cristales piezoeléctricos.

La unidad de medida del voltaje o tensión es el voltio, [V]. El voltaje está relacionado con la intensidad de corriente eléctrica y la resistencia eléctrica mediante la fórmula: $E = I \times R$

2.2.3 LA LEY DE OHM

Esta ley tiene el nombre del físico alemán Georg Simon Ohm, que en un tratado publicado en 1827, halló valores de tensión y corriente que circulaban a través de unos circuitos eléctricos simples y que predecían el comportamiento eléctrico de las magnitudes físicas involucradas: tensión, voltaje y resistencia. Un esquema de un circuito eléctrico se observa en la figura 2.2.3:

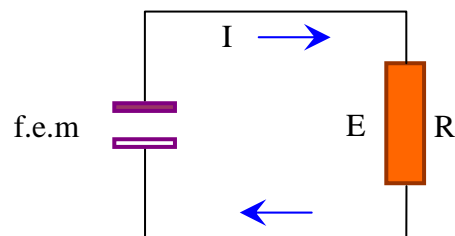


Figura 2.2.3 Esquema de circuito eléctrico, Elaboración Propia.

Según la ley de Ohm, la cantidad de corriente que fluye por un circuito es directamente proporcional a la fuerza electromotriz aplicada al circuito, e inversamente proporcional a la resistencia total del circuito.

Matemáticamente se expresa por la fórmula: $I = \frac{E}{R}$ (2.60)⁵³

Donde:

I ~ Intensidad de corriente en amperios, [A].

E ~ Fuerza electromotriz en voltios, [V]

R ~ Resistencia eléctrica en ohmios, [Ω].

La ley de Ohm se aplica a todos los circuitos eléctricos, tanto a los de corriente continua (CC) como a los de corriente alterna (CA), aunque para el análisis de circuitos complejos y circuitos de CA deben emplearse principios adicionales.

2.2.3.1 CIRCUITO DE RESISTORES EN SERIE

Un circuito en serie presenta sus elementos uno a continuación de otro, de tal manera que la totalidad de corriente pasa a través de cada uno de los elementos, como se ve en la figura:

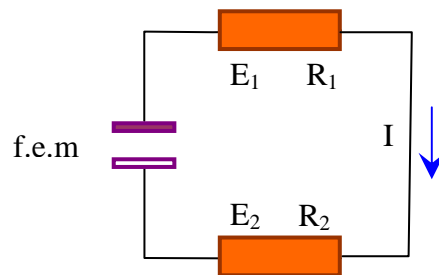


Figura 2.2.3.1 Esquema de Circuito de Resistores en Serie, Elaboración Propia

La resistencia total de un circuito de resistores en serie se calcula sumando los valores de los resistores individuales, utilizando la ecuación:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N \quad (2.61)^{54}$$

Donde:

⁵³ “Física”, Tomo II, página 97, Alonso Finn, Editorial Mc Graw Hill, 1998. Se presentan estas magnitudes físicas en unidades del sistema internacional SI.

⁵⁴ Fórmula para calcular la resistencia total en un circuito de resistencias en serie, “Física”, Tomo II, página 99, Alonso Finn, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

R_s ~ Resistencia total en un circuito en serie, en ohmios, [Ω].

R_1 ~ Resistencia individual en el resistor 1, en ohmios, [Ω]

R_i ~ Resistencia individual en el i-esimo resistor, en ohmios, [Ω]

R_N ~ Resistencia individual en el resistor N, en ohmios, [Ω]

2.2.3.2 CIRCUITO DE RESISTORES EN PARALELO

En un circuito en paralelo los resistores, están dispuestos con todos los terminales positivos (+) en un mismo conductor, y todos los negativos (-) en otro, como se ve en la figura:

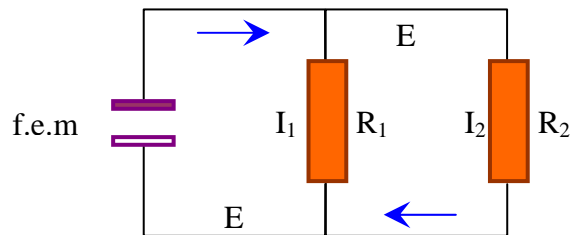


Figura 2.2.3.2 Esquema de Circuito de Resistores en Paralelo, Elaboración Propia

La resistencia total del circuito en paralelo es menor que el valor del resistor con menor resistencia⁵⁵.

La resistencia total del circuito se calcula por la expresión:

$$R_p = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}} \quad (2.62)^{56}$$

O en forma resumida:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

⁵⁵ Postulado general de control para la Resistencia Total en un Circuito de Resistores en Paralelo, “Física”, Tomo II, página 102, Alonso Finn, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

⁵⁶ Fórmula para calcular la resistencia total en un circuito de resistencias en paralelo, “Física”, Tomo II, página 100, Alonso Finn, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

Donde:

R_p ~ Resistencia total en un circuito en paralelo, en ohmios, [Ω].

R_1 ~ Resistencia individual en el resistor 1, en ohmios, [Ω]

R_i ~ Resistencia individual en el i-esimo resistor, en ohmios, [Ω]

R_N ~ Resistencia individual en el resistor N, en ohmios, [Ω]

2.3 LA ECUACIÓN GENERAL DE LA PÉRDIDA DE CARGA EN UNA TUBERÍA

En los sistemas de tuberías complejos: serie, paralelo, se usan expresiones empíricas para determinar las características hidráulicas y físicas que intervienen en los mismos.

2.3.1 NÚMERO DE REYNOLDS

Este numero permite definir el tipo del régimen de flujo en una tubería: flujo laminar y flujo turbulento. El número de Reynolds, viene dado por la expresión (2.70):

$$Re = \frac{vD}{\nu} \quad (2.70)^{57}$$

Donde:

V ~ velocidad media del liquido en la sección, en m/s

D ~ diámetro de la sección, en m

ν ~ Viscosidad dinámica, en m^2/s . Depende de la temperatura

De acuerdo al número de Reynolds, el régimen de circulación de un fluido, en una conducción forzada, se puede clasificar en:

$$Re < 2200 \quad \text{Régimen laminar}$$

⁵⁷ Fórmula del número de Reynolds (Re), página 7, “Hidráulica de Tuberías”, Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

$2200 < Re < 4500$ Régimen transicional

$Re > 4500$ Régimen turbulento

2.3.2 MAGNITUDES FÍSICAS EN LA ECUACIÓN GENERAL DE LA PÉRDIDA DE CARGA

En la figura 2.3.2, se pueden apreciar esquemáticamente, el significado físico de algunas características geométricas en una tubería.

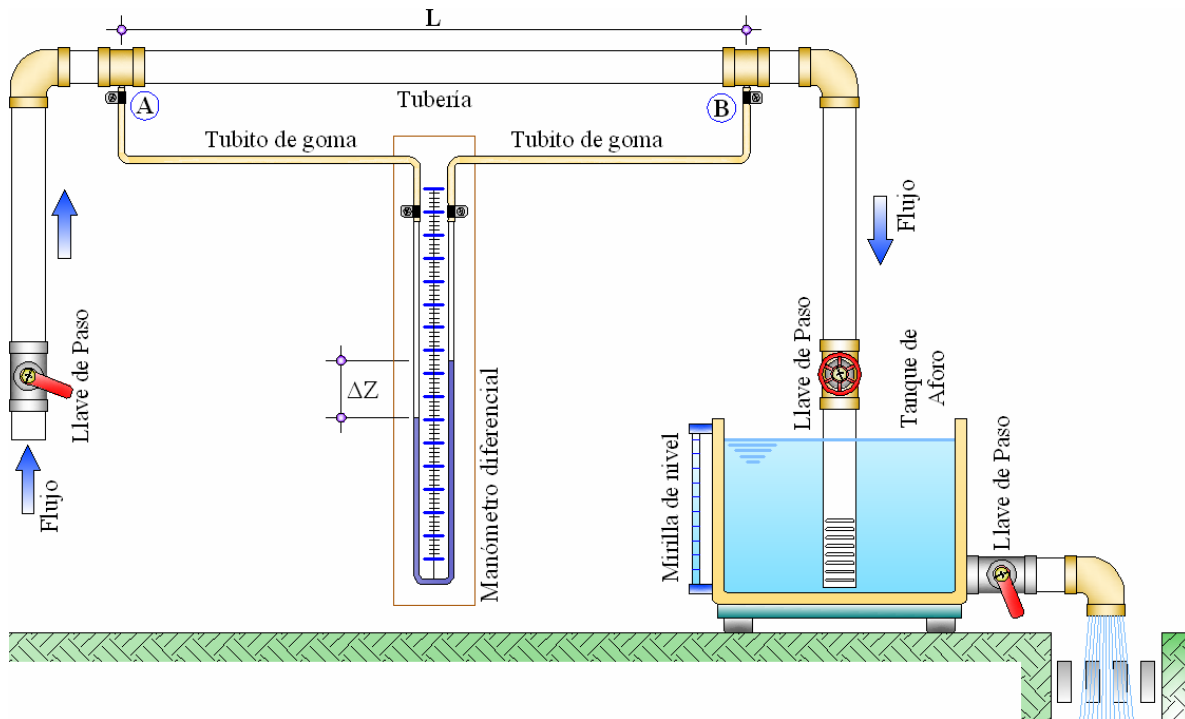


Figura 2.3.2 Esquema de Instalación de Pérdida de carga en una Tubería, Elaboración Propia

Para el caso de tuberías donde el régimen laminar o turbulento se ha desarrollado completamente, se puede establecer que las pérdidas de carga por fricción (h_f), son:

- Directamente proporcional a la longitud.
- Inversamente proporcional a una potencia del diámetro.
- Proporcional a una potencia entre 1 y 2 de la velocidad media del líquido.
- Varía con la naturaleza de las paredes de la tubería (rugosidad), en el régimen turbulento y de transición.

- Es independiente de la posición del tubo.
- Es independiente de la presión interna bajo la cual, el líquido fluye.
- Es función de las características físicas del fluido, de su densidad absoluta y de su viscosidad.

Para una tubería dada, la pérdida de carga por fricción o pérdida de energía, a semejanza de la fórmula de Darcy-Weisbach, puede ser expresada como:

$$hf = k \frac{L \cdot V^n}{D^m} \quad (2.71)^{58}$$

Donde:

hf ~ Pérdida de carga por fricción o pérdida de energía, en [m].

V ~ velocidad media del líquido en la sección, en [m/s].

D ~ diámetro de la sección, en [m].

L ~ longitud recta de tubería, en [m].

k ~ coeficiente que toma en cuenta las condiciones físicas de la tubería

n ~ exponente que afecta a la velocidad, varía entre 1 y 2

m ~ exponente que afecta al diámetro de la tubería

2.3.3 LA FÓRMULA DE PÉRDIDA DE CARGA EN FORMATO ESTANDAR

La pérdida hidráulica de carga o de energía puede ser “**re-escrita**” en una forma estándar como:

$$hf_i = B_i \times L_i \times (Q_i)^n \quad (2.72a)^{59}$$

⁵⁸ Fórmula de pérdida de carga (hf), página 96, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto Gracia Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

⁵⁹ Fórmula estándar de pérdida de carga ó de energía (hf), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2007.

Donde:

hf_i ~ Pérdida de carga o de energía en una tubería.

B_i ~ Coeficiente en función del diámetro de tubería y de un factor de pérdida adimensional. En algunos casos se considera el número de Reynolds.

L_i ~ Longitud de tubería.

Q_i ~ Caudal que circula por la tubería.

n ~ Exponente que afecta al caudal

La ecuación (2.72a) es denominada: “**Fórmula estándar de pérdida de energía**”

2.3.3.1 FORMA RESUMIDA ESTANDAR DE LA FÓRMULA DE LA PÉRDIDA DE CARGA

La “**Fórmula estándar de pérdida de energía**”, puede resumirse bajo la expresión, la misma que es denominada “**Fórmula resumida estándar de pérdida de energía**”⁶⁰:

$$hf_i = R_i \times (Q_i)^n \quad (2.72b)^{61}$$

Donde:

hf_i ~ Pérdida de carga o de energía en una tubería.

R_i ~ Resistencia hidráulica o **Renuencia hidráulica**, cuyo valor esta en función de la longitud, diámetro y del coeficiente B .

Q_i ~ Caudal que circula por la tubería.

n ~ Exponente que afecta al caudal

⁶⁰ Denominación adoptada, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2011.

⁶¹ Fórmula resumida estándar de pérdida de carga o de energía (hf), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2007.

La expresión resumida estándar presentada aquí, es una forma general de agrupar a casi todas las fórmulas existentes para el cálculo de la pérdida de carga.

2.4 DESCRIPCIÓN DE LAS FÓRMULAS PARA PÉRDIDA DE CARGA SEGÚN DIVERSOS AUTORES

En este trabajo se tomarán en cuenta las siguientes fórmulas:

- Fórmula de Darcy - Weisbach
- Fórmula de Hazen-Williams
- Fórmula de Chezy (Tuberías)
- Fórmula de Manning (Tuberías)

2.4.1 FÓRMULA DE DARCY – WEISBACH

Esta fórmula puede aplicarse a todos los tipos de flujo (laminar, transicional y turbulento), debiendo el coeficiente de fricción tomar los valores adecuados. La fórmula de Darcy – Weisbach es:

$$hf = f \frac{LV^2}{2gD} \quad 2.73)^{62}$$

Donde:

hf ~ Pérdida de carga por fricción, en [m].

V ~ Velocidad media del líquido en la sección, en [m/s].

D ~ Diámetro de la tubería, en [m].

L ~ Longitud recta de tubería, en [m].

f ~ Coeficiente de fricción, adimensional.

g ~ Aceleración de la gravedad terrestre, [m/s²]

⁶² Fórmula de Darcy-Weisbach para calcular la pérdida de carga en una tubería, página 45, “Hidráulica de Tuberías”, Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

El coeficiente de fricción f puede deducirse matemáticamente en el caso del régimen laminar, pero en flujo turbulento no se disponen de relaciones matemáticas sencillas para obtener su variación con el número de Reynolds y con la rugosidad relativa (k/D).

Para el régimen laminar, el valor de f está dado por: $f = (64/Re)$ (2.74)⁶³

“**Re**” tiene un valor práctico de hasta de 2200, para que el flujo sea considerado como laminar. Este tipo de régimen solo se presenta en flujos de medios porosos: corrientes subterráneas en formaciones permeables, en el interior de redes de flujo en presas de tierra, y excepcionalmente en laboratorios hidráulicos bajo condiciones determinadas. En la zona de transición, los valores de f son inciertos, ya que el flujo se comporta de manera dual, laminar y turbulentamente, mostrando gran inestabilidad. Para obtener el valor de f en flujo turbulento se hace uso comúnmente de la ecuación de Colebrook-White.

2.4.1.1 ECUACIÓN DE COLEBROOK – WHITE

La ecuación de Colebrook – White es válida para todo tipo de flujo turbulento en tuberías: lisas y rugosas. Se utiliza para el cálculo de f , el factor de fricción de la fórmula de Darcy – Weisbach. Esta ecuación tiene la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \text{Log}_{10} \left(\frac{k}{3.7 \times D} + \frac{2.51}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \right) \quad (2.75)^{64}$$

Donde:

f ~ Coeficiente de fricción, adimensional.

k ~ Rugosidad absoluta, en [m].

D ~ Diámetro de la tubería, en [m].

⁶³ Fórmula para calcular el factor de fricción en régimen laminar, valor que se introduce en la ecuación de Darcy-Weisbach para calcular la pérdida de carga en una tubería, página 48, “Hidráulica de Tuberías”, Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

⁶⁴ Ecuación de Colebrook - White para el cálculo del factor de fricción f , que luego será ingresada a la fórmula de Darcy – Weisbach para obtener la pérdida de carga por fricción en una tubería, página 65, “Hidráulica de Tuberías”, Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

Re ~ Número de Reynolds, adimensional.

Esta ecuación tiene el inconveniente de que no es una ecuación explícita para el factor de fricción f , lo cual implica la necesidad de utilizar algún método numérico para calcularlo una vez se conozcan las demás variables.

2.4.1.2 FORMA ESTÁNDAR DE LA FÓRMULA DE DARCY – WEISBACH

La fórmula de Darcy - Weisbach puede ser escrita en el formato de la “*Fórmula estándar de pérdida de energía*” como:

$$hf = f \frac{LV^2}{2gD} \tag{2.73}$$

$$hf = f \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5} \times L \cdot Q^2 \tag{2.76}$$

<i>Forma original</i>		<i>Forma</i> $hf = B \times L \times (Q)^n$	<i>Factor B</i>	<i>“n”</i>
$hf = f \frac{LV^2}{2gD}$	$hf = f \frac{L \cdot 8Q^2}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5}$	$hf = f \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5} \times L \cdot Q^2$	$f \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5}$	2

2.4.1.3 FORMA ESTÁNDAR RESUMIDA DE LA FÓRMULA DE DARCY – WEISBACH

La fórmula de Darcy - Weisbach puede ser escrita en el formato de la “*Fórmula resumida estándar de pérdida de energía*” como:

$$hf = f \frac{LV^2}{2gD} \tag{2.73}^{65}$$

⁶⁵ Fórmula de Darcy-Weisbach para calcular la pérdida de carga en una tubería, página 45, “Hidráulica de Tuberías”, Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

<i>Forma original</i>		<i>Forma</i> $hf = R \times (Q)^n$	<i>Factor R</i>	<i>“n”</i>
$hf = f \frac{LV^2}{2gD}$	$hf = f \frac{L \cdot 8Q^2}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5}$	$hf = \left(f \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5} \times L \right) \cdot Q^2$	$f \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5} \times L$	2

2.4.2 FÓRMULA DE HAZEN – WILLIAMS

Esta fórmula es el resultado de un estudio estadístico cuidadoso (realizado en la década de los 20's del siglo XX, en EEUU), en el cual se consideraron los datos experimentales disponibles obtenidos con anterioridad por muchos investigadores y con datos de los propios autores. Esta formula expresada en unidades del SI, en función de la velocidad es:

$$hf = L \cdot \left[\frac{V}{0.355 \times CD^{0.63}} \right]^{1.852} \tag{2.80}^{66}$$

Donde:

hf ~ Pérdida de carga por fricción, en [m].

L ~ Longitud recta de tubería, en [m].

V ~ Velocidad media del líquido en la sección, en [m/s].

C ~ Coeficiente adimensional de Hazen - Williams. Este valor es más una medida de la rugosidad relativa que de la rugosidad absoluta.

D ~ Diámetro de la tubería, en [m].

La fórmula de Hazen - Williams, en función del caudal es la siguiente:

$$hf = \frac{10.64806344 \times L}{D^{4.87}} \left(\frac{Q}{C} \right)^{1.852} \tag{2.81}^{67}$$

⁶⁶ Fórmula de Hazen-Williams para calcular la pérdida de carga en una tubería, página 127, “Hidráulica de Tuberías”, Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

⁶⁷ Fórmula de Hazen-Williams para calcular la pérdida de carga en una tubería, página 98, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto Gracia Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

Donde:

hf ~ Pérdida de carga por fricción, en [m].

L ~ Longitud recta de tubería, en [m].

D ~ Diámetro de la tubería, en [m].

Q ~ Caudal circulante por la tubería, en [m³/s].

C ~ Coeficiente adimensional de Hazen-Williams.

Los exponentes de la fórmula de Hazen - Williams fueron establecidos de manera que resulte con mínimas perturbaciones para definir el valor del coeficiente C. En consecuencia, el coeficiente C es una función casi enteramente, conjunta y exclusiva de las paredes de la tubería y del fluido. Por esta razón, el uso de la fórmula de Hazen - Williams debe estar limitado a ciertas características del fluido y del flujo. Los límites, claramente establecidos por los dos investigadores son los siguientes:

- El fluido debe ser agua a temperaturas normales, desde 0~30°C.
- El diámetro de la tubería debe ser superior o igual a 2 pulgadas o 50.8[mm].
- La velocidad del flujo en las tuberías se debe limitar a 3.0[m/s].

La fórmula de Hazen - Williams, requiere para su aplicación provechosa la mayor precaución en la adopción del coeficiente C. Una selección inadecuada de C reduce mucho la precisión de la fórmula. Para tubos de hierro y acero, el coeficiente C es una función del tiempo, de modo que su valor debe ser fijado teniendo en cuenta la vida útil esperada de la tubería. Esta fórmula es aplicable a flujos turbulento.

La fórmula de Hazen - Williams tiene la ventaja de ser aplicable con rapidez, debido a su escritura explícita. La desventaja de esta fórmula radica en que algunas veces se olvida que es una ecuación válida para un determinado rango de velocidades y de diámetros de las tuberías.

2.4.2.1 FORMA ESTÁNDAR DE LA FÓRMULA DE HAZEN – WILLIAMS

La fórmula de Hazen - Williams en función del caudal puede ser escrita en el formato de la “*Fórmula estándar de pérdida de energía*” como:

$$hf = \frac{10.64806344 \times L \left(\frac{Q}{C}\right)^{1.852}}{D^{4.87}}$$

$$hf = \frac{10.64806344}{D^{4.87} C^{1.852}} \times L \cdot Q^{1.852} \tag{2.82}$$

<i>Forma original</i>	<i>Forma</i> $hf = B \times L \times (Q)^n$	<i>Factor B</i>	<i>“n”</i>
$hf = L \cdot \left[\frac{V}{0.355 \times CD^{0.63}} \right]^{1.852}$	$hf = \frac{10.64806344}{D^{4.87} C^{1.852}} \times L \cdot Q^{1.852}$	$\frac{10.64806344}{D^{4.87} \cdot C^{1.852}}$	1.852
$hf = \frac{10.64806344 \times L \left(\frac{Q}{C}\right)^{1.852}}{D^{4.87}}$			

2.4.2.2 FORMA ESTÁNDAR RESUMIDA DE LA FÓRMULA DE HAZEN – WILLIAMS

La fórmula de Hazen - Williams puede ser escrita en el formato de la “*Fórmula resumida estándar de pérdida de energía*” como:

$$hf = \frac{10.64806344 \times L \left(\frac{Q}{C}\right)^{1.852}}{D^{4.87}} \tag{2.81}$$

<i>Forma original</i>	<i>Forma</i> $hf = R \times (Q)^n$	<i>Factor R</i>	<i>“n”</i>
$hf = L \cdot \left[\frac{V}{0.355 \times CD^{0.63}} \right]^{1.852}$	$hf = \left(\frac{10.64806344}{D^{4.87} C^{1.852}} \times L \right) \cdot Q^{1.852}$	$\frac{10.64806344}{D^{4.87} \cdot C^{1.852}} \times L$	1.852
$hf = \frac{10.64806344 \times L \left(\frac{Q}{C}\right)^{1.852}}{D^{4.87}}$			

2.4.3 FÓRMULA DE CHEZY

Es una de las primeras formulas para en canales (1775), representando la primera tentativa de explicar algebraicamente la resistencia al flujo a lo largo de un canal, según la expresión:

$$V = C \times \sqrt{RS} \quad \rightarrow \quad Q = A \times C \times \sqrt{RS} \quad (2.85)^{68}$$

Posteriormente fué modificada y generalizada a conductos forzados rugosos en la zona de turbulencia, por Bazin y Kutter, y es la que actualmente se usa. La formula de Chezy para tuberías, en función del caudal es la siguiente:

$$hf = \frac{64}{\pi^2 \times D^5 \times \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \times L \cdot Q^2 \quad (2.86)^{69}$$

Donde:

hf ~ Pérdida de carga por fricción, en [m].

D ~ Diámetro de la tubería, en [m].

m ~ Coeficiente adimensional de Kutter.

L ~ Longitud recta de tubería, en [m].

Q ~ Caudal circulante por la tubería, en [m³/s].

2.4.3.1 FORMA ESTÁNDAR DE LA FORMULA DE CHEZY

La formula de Chezy puede ser escrita en el formato de la “*Formula estándar de pérdida de energía*” como:

$$hf = \frac{64}{\pi^2 \times D^5 \times \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \times L \cdot Q^2 \quad (2.86)$$

⁶⁸ Fórmula de Chezy, para calcular la pérdida de carga (hf) en una tubería, página 238, “Introducción a la Hidráulica”, Víctor Hugo Salmón Carrillo, Imprenta Ramírez, 2003, I.B.S.N. -99905-0-338-9.

⁶⁹ Fórmula de Chezy, para calcular la pérdida de carga (hf) en una tubería, “Apuntes de Hidráulica”, Juan Carlos Loza, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2004.

La fórmula de Chezy presentada en la ecuación (2.86) puede entenderse según el formato “**Fórmula estándar de pérdida de energía**”, según la tabla de abajo:

<i>Forma original</i>	<i>Forma</i> $hf = B \times L \times (Q)^n$	<i>Factor B</i>	<i>“n”</i>
$hf = \frac{64}{\pi^2 D^5 \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \times L \cdot Q^2$	$hf = \frac{64}{\pi^2 D^5 \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \times L \cdot Q^2$	$\frac{64}{\pi^2 D^5 \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2}$	2

2.4.3.2 FORMA ESTÁNDAR RESUMIDA DE LA FÓRMULA DE CHEZY

La fórmula de Chezy puede ser escrita en el formato de la “**Fórmula resumida estándar de pérdida de energía**” como:

$$hf = \frac{64}{\pi^2 \times D^5 \times \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \times L \cdot Q^2 \tag{2.86}$$

<i>Forma original</i>	<i>Forma</i> $hf = R \times (Q)^n$	<i>Factor R</i>	<i>“n”</i>
$hf = \frac{64}{\pi^2 D^5 \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \times L \cdot Q^2$	$hf = \left(\frac{64}{\pi^2 D^5 \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \cdot L \right) Q^2$	$\frac{64}{\pi^2 D^5 \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \cdot L$	2

2.4.4 FÓRMULA DE MANNING

Esta fórmula fue desarrollada para conducciones libres por el irlandés Robert Manning en 1889, en unidades del sistema internacional. Para conducciones cerradas y en función del caudal, se tiene la siguiente forma:

$$hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2 \quad (2.87)^{70}$$

Donde:

hf ~ Pérdida de carga por fricción, en [m].

D ~ Diámetro de la tubería, en [m].

η ~ Coeficiente de Manning. Es función de la rugosidad de las paredes de la tubería. Para tuberías de PVC y PE tiene un valor de $\eta = 0,008$

L ~ Longitud recta de tubería, en [m].

Q ~ Caudal circulante por la tubería, en [m³/s].

2.4.4.1 FORMA ESTÁNDAR DE LA FÓRMULA DE MANNING

La fórmula de Manning puede ser escrita en el formato de la “**Fórmula estándar de pérdida de energía**” como:

$$hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2 \quad (2.87)$$

<i>Forma original</i>	<i>Forma $hf = B \times L \times (Q)^n$</i>	<i>Factor B</i>	<i>“n”</i>
$hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2$	$hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2$	$B = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}}$	2

⁷⁰ Fórmula de Manning, para calcular la pérdida de carga (hf) en una tubería, “Apuntes de Hidráulica”, Juan Carlos Loza, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2004. Esta fórmula es una adaptación de la ecuación utilizada en canales, donde el radio hidráulico es reemplazado por (D/4).

2.4.4.2 FORMA ESTÁNDAR RESUMIDA DE LA FÓRMULA DE MANNING

La fórmula de Manning puede ser escrita en el formato de la “*Fórmula resumida estándar de pérdida de energía*” como:

$$hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2 \tag{2.87}$$

<i>Forma original</i>	<i>Forma $hf = R \times (Q)^n$</i>	<i>Factor R</i>	<i>“n”</i>
$hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2$	$hf = \left(\frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \right) \times Q^2$	$R = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L$	2

2.5 ESTUDIO DE SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE Y PARALELO

2.5.1 SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE

Sistema formado por varias tuberías simples, conectadas una detrás de otra. El flujo circula en ese mismo sentido. En este sistema las pérdidas de carga son acumulativas:

$$hf_s = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_{N-1} + hf_N \tag{2.90}^{71}$$

Donde:

hf_s ~ Pérdida de carga en el sistema en serie.

hf_1 ~ Pérdida de carga en la tubería 1.

hf_i ~ Pérdida de carga en la i-esima tubería.

hf_N ~ Pérdida de carga en la tubería N.

⁷¹ Fórmula de pérdida de carga total (hf), para un sistema de tuberías en serie, página 110, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

Un esquema de un sistema de tuberías en serie es el que se observa en la figura 2.5.1.:

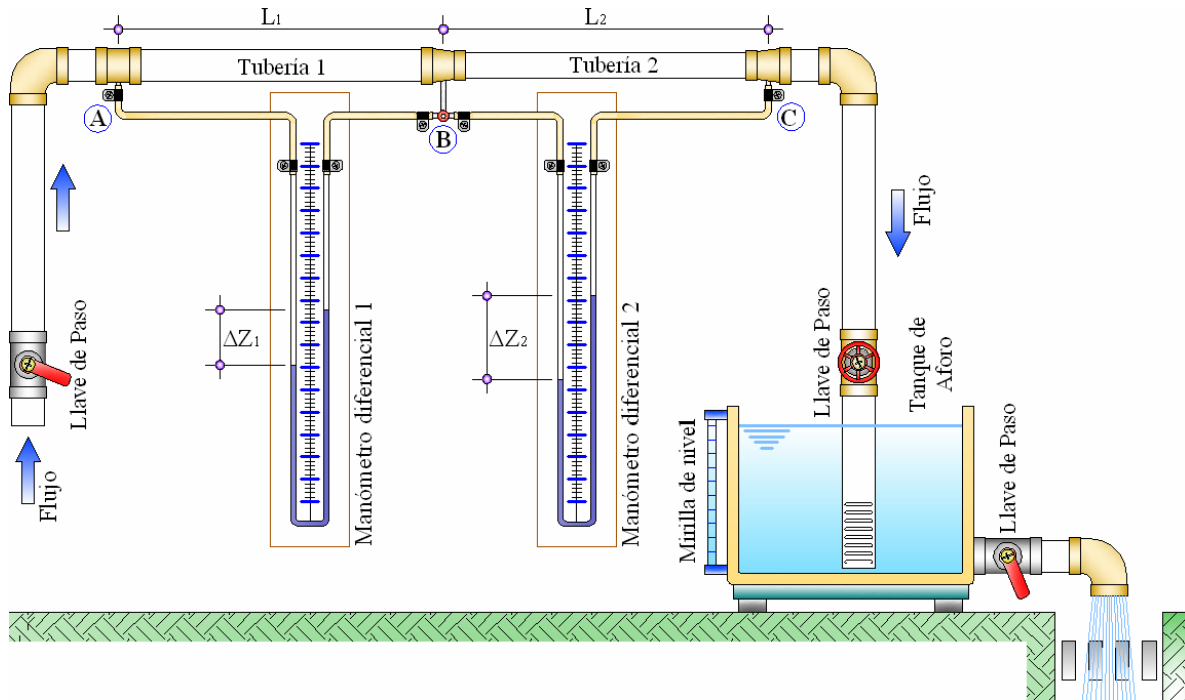


Figura 2.5.1 Esquema de Instalación de un Sistema de Tuberías en Serie Elaboración Propia

El caudal circulante por el sistema es único, según la condición:

$$Q_s = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{N-1} = Q_N \quad (2.91)^{72}$$

Donde:

Q_s ~ Caudal entrante al sistema en serie.

Q_1 ~ Caudal circulante por la tubería 1.

Q_i ~ Caudal circulante por la i-esima tubería.

Q_N ~ Caudal circulante por la tubería N.

⁷² Fórmula de Caudal Total y Parcial, para un sistema de tuberías en serie, página 110, “Manual de Practicas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

2.5.2 SISTEMAS DE TUBERÍAS EN PARALELO

La pérdida hidráulica de carga por este sistema es única, es decir:

$$hf_p = hf_1 = hf_2 = \dots = hf_{N-1} = hf_N \quad (2.100)^{73}$$

Donde:

hf_p ~ Pérdida de carga en el sistema en paralelo.

hf_1 ~ Pérdida de carga en la tubería 1.

hf_i ~ Pérdida de carga en la esima tubería.

hf_N ~ Pérdida de carga en la tubería N.

Un sistema de tuberías en paralelo está formado por tuberías que se disponen de tal modo que sus extremos son comunes, tal como se ve en la *figura 2.5.2*.

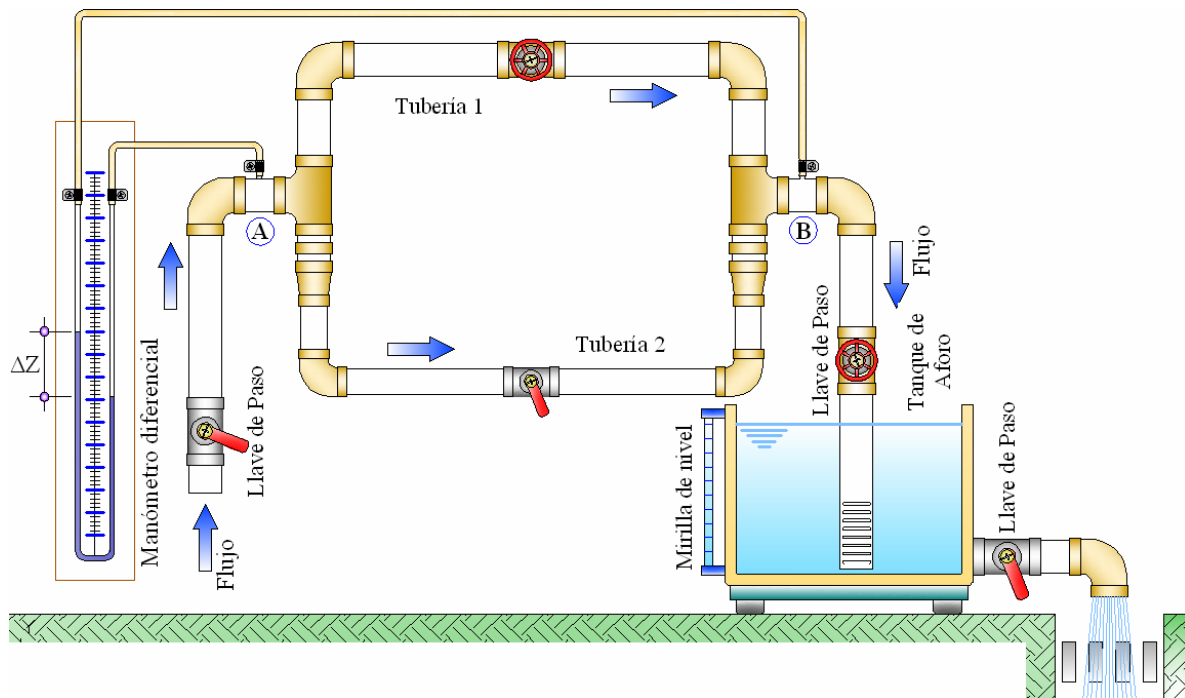


Figura 2.5.2 Esquema de Instalación de un Sistema de Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia

⁷³ Fórmula de pérdida de carga total y parcial (hf), para un sistema de tuberías en paralelo, página 110-111, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

El caudal que circula por el sistema en paralelo es la sumatoria de todos los sub-caudales que circulan por las tuberías 1, 2, N-1 y N, según la ecuación:

$$Q_p = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{N-1} + Q_N \quad (2.101)^{74}$$

Donde:

Q_p ~ Caudal entrante al sistema en paralelo.

Q_1 ~ Caudal circulante por la tubería 1.

Q_i ~ Caudal circulante por la i-esima tubería.

Q_N ~ Caudal circulante por la tubería N.

2.6 DESCRIPCIÓN DE LAS FÓRMULAS EXISTENTES PARA EL CÁLCULO DE PÉRDIDAS DE CARGA EN SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE Y PARALELO

2.6.1 PÉRDIDA DE CARGA TOTAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE

La pérdida de carga total de un sistema de tuberías en serie puede ser deducida de la siguiente manera. La ecuación: $hf_s = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_{N-1} + hf_N$

Conduce a la pérdida total del sistema:

$$hf_s = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_{N-1} + hf_N$$

$$hf_s = R_1 Q^n + R_2 Q^n + R_3 Q^n + \dots + R_{N-1} Q^n + R_N Q^n$$

$$hf_s = \{R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_{N-1} + R_N\} \times Q^n \quad (2.92)^{75}$$

$$hf_s = \{B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 + \dots + B_{N-1} L_{N-1} + B_N L_N\} \times Q^n \quad (2.93)^{76}$$

⁷⁴ Fórmula de Caudal Total para un sistema de tuberías en paralelo, página 111, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

⁷⁵ Fórmula resumida estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en serie. Desglose del caudal como factor multiplicado por las Renuencias parciales de cada tubería, elaboración propia, 2010.

⁷⁶ Fórmula estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en serie. Desglose del caudal como factor multiplicado por las Renuencias ampliadas parciales de cada tubería, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$hf_s = Q^n \times \sum_{i=1}^N (B_i \cdot L_i) \quad (2.94)^{77}$$

$$hf_s = Q^n \times \sum_{i=1}^N R_i \quad (2.95)^{78}$$

2.6.2 PÉRDIDA DE CARGA TOTAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS EN PARALELO

La pérdida de carga total para un sistema de tuberías en paralelo puede ser deducida de la siguiente manera:

Sea $hf_i = B_i \times L_i \times (Q_i)^n$, la pérdida de carga individual.

Y $hf_p = B \times L \times (Q)^n$, la pérdida de carga total por el sistema

De:

$$hf_p = hf_1 = hf_2 = \dots = hf_{N-1} = hf_N \quad (2.100)$$

$$Q_p = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{N-1} + Q_N \quad (2.101)$$

$$Q_i = \left[\frac{hf_i}{B_i \cdot L_i} \right]^{1/n}$$

Se tiene:

$$\left[\frac{hf}{BL} \right]^{1/n} = \left[\frac{hf_1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{hf_2}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{hf_{N-1}}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{hf_N}{B_N L_N} \right]^{1/n}$$

$$\left[\frac{1}{BL} \right]^{1/n} = \left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n}$$

⁷⁷ Forma reducida de la fórmula (2.93), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

⁷⁸ Forma reducida de la fórmula (2.92), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

Utilizando

$$\frac{Q^n}{hf} = \frac{1}{BL} \quad \text{y} \quad \left[\frac{Q^n}{hf} \right]^{1/n} = \left[\frac{1}{BL} \right]^{1/n}$$

Se obtiene:

$$\left[\frac{Q^n}{hf} \right]^{1/n} = \left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n}$$

$$\frac{Q}{(hf)^{1/n}} = \left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n}$$

$$(hf)^{1/n} = \frac{Q}{\left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n}}$$

$$hf_P = hf = \frac{Q^n}{\left\{ \left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.102)^{79}$$

O escribiendo en su forma compacta:

$$hf_P = \frac{Q^n}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{B_i L_i} \right]^{1/n} \right\}^n}$$

$$\frac{hf_P}{Q^n} = \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{B_i L_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.103)^{80}$$

⁷⁹ Fórmula estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en paralelo. Cociente elevado a la potencia n , entre el caudal y la sumatoria de las inversas de Renuencias parciales ampliadas de cada tubería elevadas a la misma potencia n , elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

⁸⁰ Fórmula estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en paralelo. Cociente inverso de la sumatoria de las inversas de Renuencias parciales ampliadas de cada tubería elevadas a la misma potencia n , elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$\frac{hf_p}{Q^n} = \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad \rightarrow \quad hf_p = \frac{Q^n}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.104)^{81}$$

Estos dos grupos de fórmulas (2.94), (2.95) y (2.103), (2.104), para sistemas de tuberías en serie y paralelo, permiten desarrollar sistemas mas complejos.

2.7 MODELO MATEMÁTICO PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE TUBERÍAS: SERIE, PARALELO, SERIE-PARALELO Y PARALELO-SERIE

2.7.1 IDENTIFICACIÓN DE ANALOGÍAS CONCEPTUALES ENTRE VARIABLES ELÉCTRICAS E HIDRAULICAS

Según la ley Ohm, en un circuito eléctrico, la fuerza electromotriz proporciona la energía para hacer circular la corriente a través del mismo, venciendo la resistencia eléctrica de los conductores y los dispositivos eléctricos. En una tubería, se identifican el caudal, la resistencia de la tubería (renuencia hidráulica), y la pérdida de carga. A través de la tabla 2.7.1, se identificara la posible afinidad de las variables eléctricas con las hidráulicas:

Variables eléctricas	Variables hidráulicas
Diferencia de Potencial (E)	Renuencia, <i>BL</i> - ??? ó Pérdida de carga; <i>hf</i> - ???
Intensidad de corriente (I)	Caudal, <i>Q</i>
Resistencia eléctrica (R)	Pérdida de carga; <i>hf</i> - ??? ó Renuencia, <i>BL</i> - ???

*Tabla 2.7.1 Tabla de posibles analogías entre factores eléctricos e hidráulicos
Elaboración Propia*

La ley de Ohm establece el comportamiento de las variables: voltaje, corriente eléctrica y resistencia eléctrica del circuito global y de los resistores individuales en circuitos en serie y paralelo, tal como se ve en la tabla 2.7.1A.

⁸¹ Fórmula estándar de pérdida de energía (*hf*) total en un sistema de tuberías en paralelo. Cociente elevado a la potencia n, entre el caudal y la sumatoria de las inversas de Renuencias parciales de cada tubería elevadas a la misma potencia n, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

TABLA 2.7.1A	Circuitos de resistores en SERIE	Circuitos de resistores en PARALELO
Intensidad de corriente (I)	La corriente que fluye por el circuito es la misma en cada resistor: $I = I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_N$	La corriente total es la suma de las corrientes que circulan por cada resistor: $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N$
Resistencia eléctrica (R)	La resistencia total es la suma de las resistencias individuales: $R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$	La resistencia total del circuito puede ser encontrada aplicando la formula: $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}$
Voltaje o Diferencia de Potencial (E)	El voltaje aplicado al circuito es igual a la suma de los voltajes en cada resistor: $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N$	El voltaje aplicado al circuito es el mismo que fluye por cada resistor: $E = E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_N$

Tabla 2.7.1A Tabla Testigo, Variables físicas en circuitos eléctricos, Elaboración Propia.

A través de la tabla 2.7.1B, y por afinidad con la ley de Ohm, se identificara la posible similitud de comportamiento físico de las variables eléctricas de los circuitos en serie y paralelo con las variables hidráulicas en sistemas de tuberías en serie y paralelo:

TABLA 2.7.1B	Sistemas de tuberías en SERIE	Sistemas de tuberías en PARALELO
Caudal (Q)	El caudal que fluye por el sistema es el mismo por cada tubería: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_N$	El caudal total es la suma de los caudales que fluyen por cada tubería: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_N$
Renuencia (R=BL)	La renuencia total del sistema es la suma de las renuencias individuales: $R = BL = B_1L_1 + B_2L_2 + B_3L_3 + \dots + B_NL_N$	La renuencia total del sistema NO ES CONOCIDA NO EXISTE FORMA GENERAL
Pérdida de carga (hf)	La pérdida de carga total es igual a la suma de las pérdidas de carga individuales: $hf = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_N$	La pérdida de carga del sistema es la misma en cada tramo: $hf = hf_1 = hf_2 = hf_3 = \dots = hf_N$

Tabla 2.7.1B Tabla Actual, Variables físicas en Sistemas de Tuberías, Elaboración Propia.

Los sistemas combinados: serie-paralelo y paralelo-serie en su concepción más simple deben de ajustarse al modelo matemático expuesto en estas tablas y a los resultados de la teoría procedimental a desarrollar.

CAPÍTULO III

DESARROLLO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

3. DESARROLLO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

3.1 LA PÉRDIDA DE CARGA

Durante muchos años, este concepto fue aceptado tal como se explica en el Principio de Bernoulli¹³⁰ (ver Anexo). Se suponía la existencia del comportamiento de flujos ideales y flujos reales, tal como se ve en la gráfica.

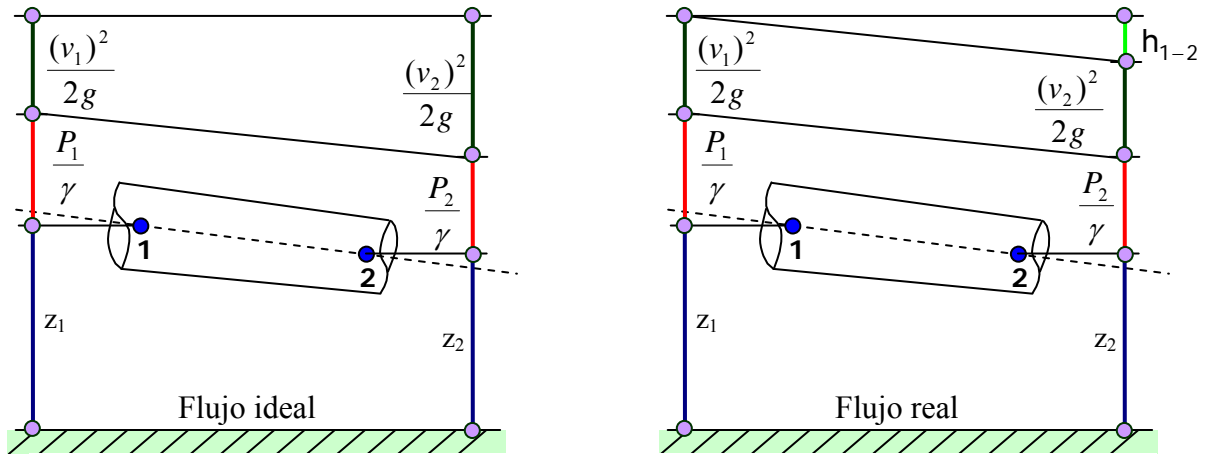


Figura 3.1.1 Circulación esquemática de Flujo: Ideal y Real, Elaboración Propia

El presente trabajo de investigación propone una redefinición del mismo y para ello es necesario observar la gráfica de abajo

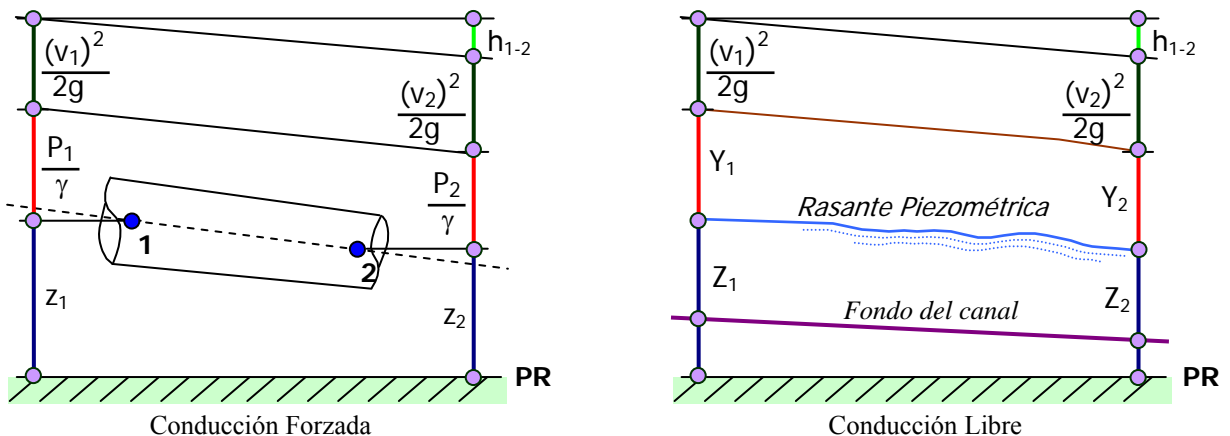


Figura 3.1.2 Circulación esquemática de Flujo Real en Tubería y Canal, Elaboración Propia

¹³⁰ Detalles sobre el principio de Bernoulli, página 18, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

3.1.1 LA NATURALEZA FÍSICA DE LA PÉRDIDA DE CARGA

Para que circule un flujo dentro de una tubería, es necesario aplicarle energía. En las tuberías esta proviene de la presión interna del fluido más la energía externa aplicada al sistema. Los canales hacen circular el agua gracias a la acción de la fuerza gravitatoria.

En ambos casos es la gravedad u otra fuente de poder, la que proporciona la energía necesaria para la circulación del fluido.

Si se observa la siguiente figura:

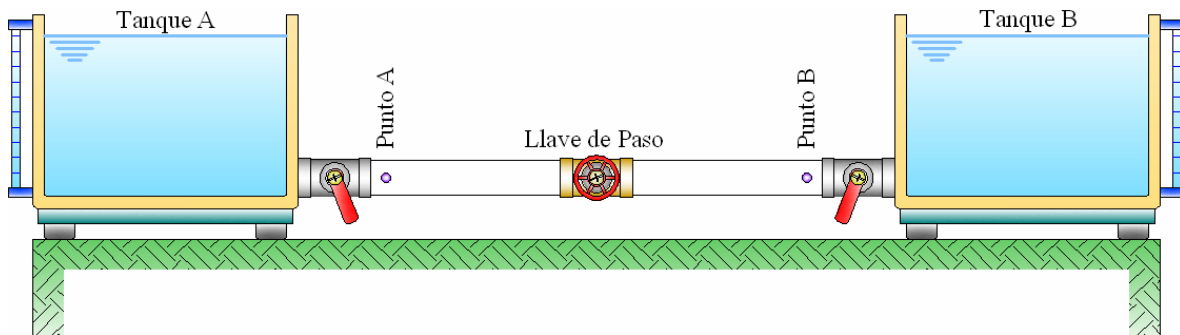


Figura 3.1.1.1 Esquema de Tanques en equilibrio, Elaboración Propia

La rasante de energía entre los puntos “A” y “B” sería similar al gráfico de abajo y solo es debida a la presión interna del fluido:

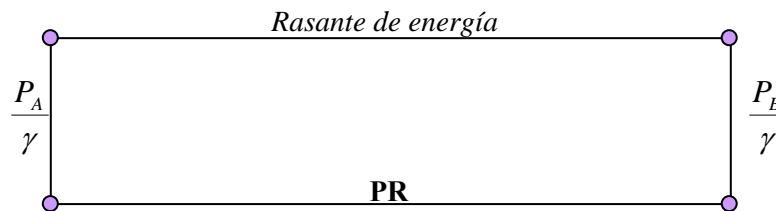


Figura 3.1.1.2 Rasante de energía – Tanques en Equilibrio, Elaboración Propia

Para que exista flujo desde el tanque “A” hacia el tanque “B” o viceversa es necesario que exista un desnivel de aguas entre ambos tanques, es decir que exista un desnivel de alturas (diferencial de energía) en el sistema para trasladar el fluido desde un nivel alto a uno más bajo. Como en muchos fenómenos físicos, también aquí se cumple el Principio de Hamilton o Principio de mínima energía: la energía entregada a un sistema solo es la necesaria para vencer una perturbación en el equilibrio del sistema.

Si se observa ahora esta otra figura:

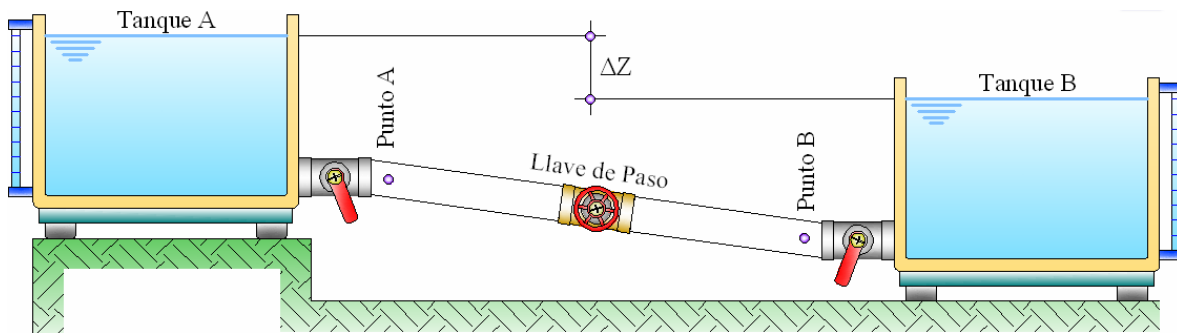


Figura 3.1.1.3 Esquema de Tanque en Desequilibrio, Elaboración Propia

La perturbación en el equilibrio del sistema se denomina ahora diferencia de alturas entre los puntos “A” y “B”. La rasante de energía para tal sistema sería:

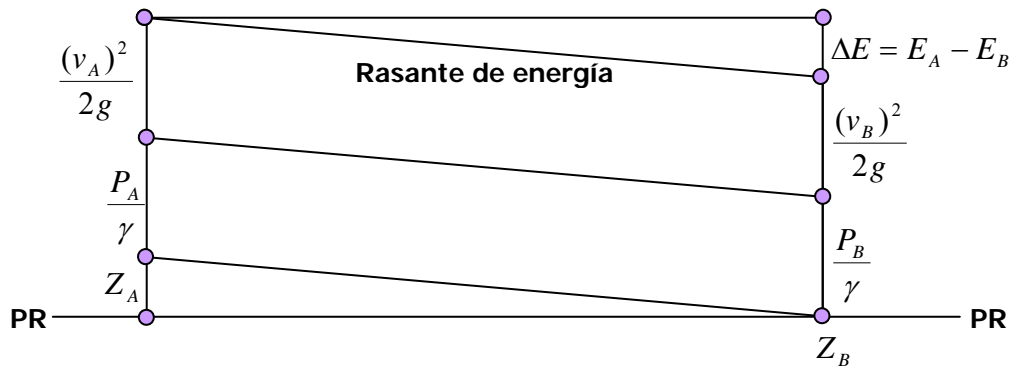


Figura 3.1.1.4 Rasante de energía – Tanques en Desequilibrio, Elaboración Propia

En el sistema de tanques a desnivel, la sumatoria de energía, tanto del Punto A como del Punto B deben permanecer constantes referentes a un Plano de referencia (PR), de esta manera el equilibrio en el sistema está asegurado. La energía debida a Z_A en el punto A (o energía sobrante), no necesariamente debe coincidir con la diferencia de energía ΔE en el punto B (o energía faltante), sin embargo se cumple que la energía en ambos puntos es una cantidad constante.

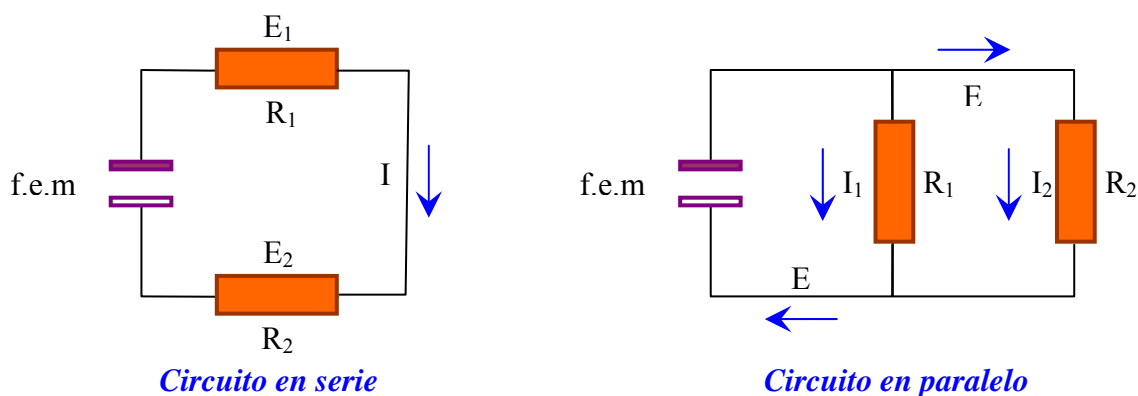
El concepto de Pérdida de energía es histórico, pero no se ajusta al concepto de equilibrio de un sistema físico. Tal vez se debería sustituir por el concepto de Energía Mínima en un sistema. En este caso el sistema hidráulico de tuberías.

Lo importante aquí, es definir que *el concepto de Pérdida de carga se debe entender como el concepto de Energía en el mas puro concepto físico (esto es energía entregada al sistema de tuberías)*.

Entonces la pregunta es ¿de dónde viene esa energía?

La respuesta es simple, la proporciona la misma gravedad (u otra forma de energía), en una cantidad suficiente para vencer la diferencia de desniveles, la renuencia de las tuberías y proporcionar los valores correctos para la presión y la velocidad en ambos puntos.

Por otro lado, si observamos el siguiente esquema eléctrico:



*Figura 3.1.1.5 Esquema de circuitos de resistores eléctricos en serie y paralelo.
Elaboración propia*

En ambos circuitos se observa, que para producir trabajo (calor resistivo) es necesario proporcionar energía al circuito (por la f.e.m.) y vencer la resistencia interna de los conductores y los resistores. Entonces la energía después de vencer la resistencia del circuito produce trabajo para el sistema en forma de calor.

3.1.2 ANALOGÍAS CONCEPTUALES ENTRE VARIABLES HIDRÁULICAS Y ELÉCTRICAS

En un circuito eléctrico es la fuerza electromotriz la que proporciona esta energía para vencer la resistencia eléctrica en los resistores.

En un sistema hidráulico de tuberías, la gravedad u otra de fuente de energía, proporciona la energía necesaria para trasladar cierta cantidad de fluido desde un punto arbitrario a otro,

venciendo la renuencia hidráulica de la tubería (resistencia hidráulica de la tubería y actúa como factor análogo a la resistencia en un circuito eléctrico).

Por lo tanto es posible hacer la siguiente analogía gráfica:

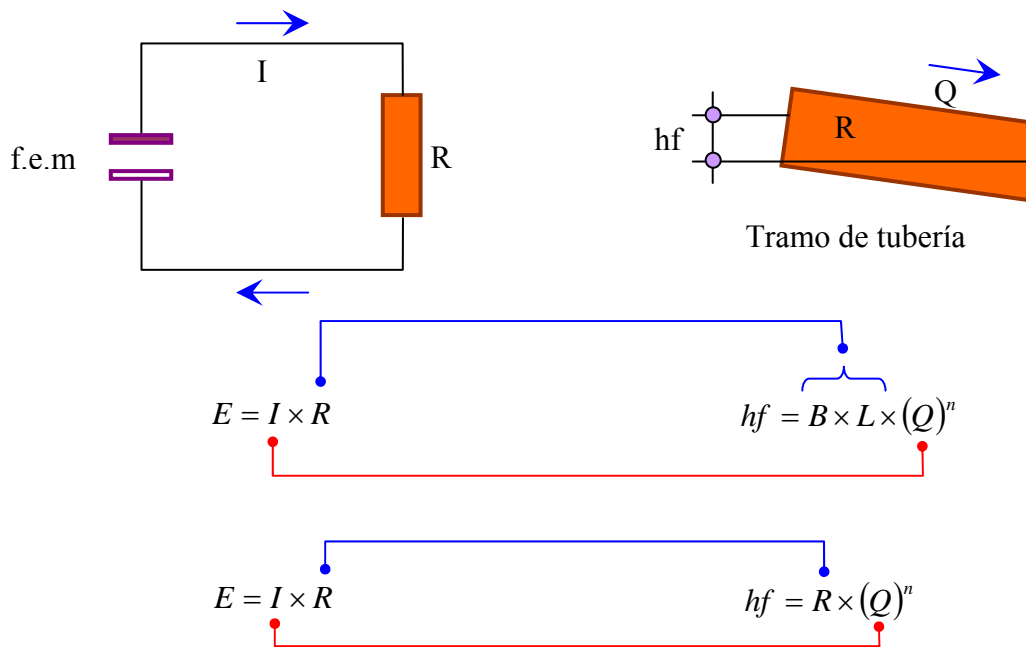


Figura 3.1.2 Esquema de analogías de factores físicos eléctricos e hidráulicos. Elaboración propia

Como se observa en la figura (3.1.2), se presentan analogías gráficas muy evidentes.

De esta manera la ecuación estándar de pérdida de energía en una tubería puede rebautizarse como ecuación de energía mínima:

$$hf = B \times L \times (Q)^n \tag{1.3a}$$

$$hf = R \times (Q)^n \tag{1.3b}$$

El mérito de este trabajo es el de otorgar a las variables hidráulicas importantes la misma propiedad física similar de las variables eléctricas. Por lo tanto se debe tomar en cuenta:

La Pérdida de energía hf, el Caudal Q circulante por la tubería y la Renuencia hidráulica R, están relacionados entre sí.

Una consecuencia de esta analogía se la puede observar en la siguiente tabla:

VARIABLES HIDRÁULICAS	VARIABLES ELÉCTRICAS
Pérdida de carga (hf , energía del sistema)	Diferencia de Potencial (E)
Caudal (Q , cantidad de flujo)	Intensidad de corriente (I)
Renuencia ($R=BL$, resistencia hidráulica)	Resistencia eléctrica (R)

*Tabla 3.1.2 Tabla de analogías resultantes de factores físicos eléctricos e hidráulicos
Elaboración propia*

3.1.3 INTERPRETACIÓN FÍSICA DE LA PÉRDIDA DE CARGA O ENERGÍA Y LA FÓRMULA RESUMIDA ESTANDAR DE PÉRDIDA DE CARGA O ENERGÍA

La interpretación física adaptada a una tubería hidráulica, es la siguiente:

Para trasladar cierta cantidad de fluido (caudal) desde un punto arbitrario a otro es necesario aplicar al tramo entre estos dos puntos cierta cantidad de energía para vencer la Renuencia hidráulica presente y poder trasladar íntegramente toda la cantidad de fluido.

Expresado de manera física:

“El trabajo producido (caudal trasladado desde un punto a otro) es directamente proporcional a la energía aplicada (hf) elevada a una potencia, e inversamente proporcional a la Renuencia Hidráulica R del sistema también elevada a la misma potencia”.

Matemáticamente:

$$hf = R \times (Q)^n$$

$$Q = \frac{(hf)^{1/n}}{R^{1/n}} \quad (3.1)^{131}$$

$$Q = \frac{(hf)^{1/n}}{(B \times L)^{1/n}}$$

¹³¹ Fórmula estándar resumida de pérdida de carga (hf). Caudal en función del cociente elevado al inverso del exponente “n”, entre la pérdida de energía y la renuencia hidráulica; elaboración Propia, Rafael Oros, 2010.

$$Q = \left(\frac{hf}{B \times L} \right)^{1/n}$$

$$Q = \left(\frac{hf}{R} \right)^{1/n}$$

3.2 LA PÉRDIDA DE CARGA TOTAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS

3.2.1 LA PÉRDIDA DE CARGA TOTAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE

La pérdida de carga total de un sistema de tuberías en serie puede ser deducida de la siguiente manera: La ecuación:

$$hf_s = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_{N-1} + hf_N$$

Conduce a la pérdida total del sistema:

$$hf_s = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_{N-1} + hf_N$$

$$hf_s = R_1 Q^n + R_2 Q^n + R_3 Q^n + \dots + R_{N-1} Q^n + R_N Q^n$$

$$hf_s = \{R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_{N-1} + R_N\} \times Q^n \quad (2.92)^{132}$$

$$hf_s = \{B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 + \dots + B_{N-1} L_{N-1} + B_N L_N\} \times Q^n \quad (2.93)^{133}$$

$$hf_s = Q^n \times \sum_{i=1}^N (B_i \cdot L_i) \quad (2.94)^{134}$$

$$hf_s = Q^n \times \sum_{i=1}^N R_i \quad (2.95)^{135}$$

¹³² Fórmula resumida estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en serie. Desglose del caudal como factor multiplicado por las Renuencias parciales de cada tubería, elaboración propia, 2010.

¹³³ Fórmula estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en serie. Desglose del caudal como factor multiplicado por las Renuencias ampliadas parciales de cada tubería, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹³⁴ Forma reducida de la fórmula (2.93), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹³⁵ Forma reducida de la fórmula (2.92), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$\frac{hf_s}{Q^n} = \sum_{i=1}^N R_i$$

$$\frac{hf_s}{Q^n} = \sum_{i=1}^N (B_i \times L_i)$$

3.2.2 LA PÉRDIDA DE CARGA TOTAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS EN PARALELO

La pérdida de carga total para un sistema de tuberías en paralelo puede ser deducida de la siguiente manera:

Sea $hf_i = B_i \times L_i \times (Q_i)^n$, la pérdida de carga individual.

Y $hf_p = B \times L \times (Q)^n$, la pérdida de carga total por el sistema

De:

$$hf_p = hf_1 = hf_2 = \dots = hf_{N-1} = hf_N \quad (2.100)$$

$$Q_p = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{N-1} + Q_N \quad (2.101)$$

$$Q_i = \left[\frac{hf_i}{B_i \cdot L_i} \right]^{1/n}$$

Se tiene:

$$\left[\frac{hf}{BL} \right]^{1/n} = \left[\frac{hf_1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{hf_2}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{hf_{N-1}}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{hf_N}{B_N L_N} \right]^{1/n}$$

$$\left[\frac{1}{BL} \right]^{1/n} = \left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n}$$

Utilizando

$$\frac{Q^n}{hf} = \frac{1}{BL} \quad \text{y} \quad \left[\frac{Q^n}{hf} \right]^{1/n} = \left[\frac{1}{BL} \right]^{1/n}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} \left[\frac{Q^n}{hf} \right]^{1/n} &= \left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n} \\ \frac{Q}{(hf)^{1/n}} &= \left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n} \\ (hf)^{1/n} &= \frac{Q}{\left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n}} \\ hf_p = hf &= \frac{Q^n}{\left\{ \left[\frac{1}{B_1 L_1} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_2 L_2} \right]^{1/n} + \dots + \left[\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right]^{1/n} + \left[\frac{1}{B_N L_N} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.102)^{136} \end{aligned}$$

O escribiendo en su forma compacta:

$$\begin{aligned} hf_p &= \frac{Q^n}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{B_i L_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \\ \frac{hf_p}{Q^n} &= \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{B_i L_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.103)^{137} \\ \frac{hf_p}{Q^n} &= \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \end{aligned}$$

¹³⁶ Fórmula estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en paralelo. Cociente elevado a la potencia n , entre el caudal y la sumatoria de las inversas de Renuencias parciales ampliadas de cada tubería elevadas a la misma potencia n , elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹³⁷ Fórmula estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en paralelo. Cociente inverso de la sumatoria de las inversas de Renuencias parciales ampliadas de cada tubería elevadas a la misma potencia n , elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$hf_p = \frac{Q^n}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.104)^{138}$$

Escribiendo el denominador (libre del exponente n), de la ecuación (2.104), como factor R_T ¹³⁹ (factor importante en estos sistemas) para el sistema de tuberías en paralelo se tiene:

$$R_T = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{R_i} \right)^{1/n}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B_i \times L_i} \right)^{1/n}}$$

$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{R_2} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{R_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{R_N} \right)^{1/n}}$$

$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n}} \quad (3.2)$$

Escribiendo la ecuación (2.104) en función de R_T , se tiene:

$$hf_p = (R_T)^n \times Q^n \quad (3.3)^{140}$$

Que es la ecuación que será encontrada en las conclusiones de este trabajo.

3.3 EL CAUDAL INDIVIDUAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS

3.3.1 EL CAUDAL INDIVIDUAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE

El caudal circulante por el sistema de tuberías en serie es único y es igual a:

¹³⁸ Fórmula estándar de pérdida de energía (hf) total en un sistema de tuberías en paralelo. Cociente elevado a la potencia n , entre el caudal y la sumatoria de las inversas de Renuencias parciales de cada tubería elevadas a la misma potencia n , elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹³⁹ Coeficiente R_T presente en la ecuación (2.104) y que representa la Renuencia Total del sistema de Tuberías en Paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹⁴⁰ Fórmula estándar resumida de pérdida de carga (hf). en función del producto entre el caudal y el coeficiente R_T elevados al exponente “ n ”, elaboración Propia, Rafael Oros, 2007.

$$Q_s = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{N-1} = Q_N \quad (2.91)^{141}$$

Donde:

Q_s ~ Caudal entrante al sistema en serie.

Q_1 ~ Caudal circulante por la tubería 1.

Q_i ~ Caudal circulante por la i-esima tubería.

Q_N ~ Caudal circulante por la tubería N.

El caudal individual, correspondiente a cada tubería se encuentra mediante la expresión:

$$R_i \times (Q_i)^n = hf_i \quad \rightarrow \quad (Q_i)^n = \frac{hf_i}{R_i}$$

$$Q_i = \left(\frac{hf_i}{R_i} \right)^{1/n} \quad \rightarrow \quad Q_i = \left(\frac{hf_i}{B_i \times L_i} \right)^{1/n} \quad (3.4)^{142}$$

3.3.2 EL CAUDAL INDIVIDUAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS EN PARALELO

El caudal total que circula por el sistema en paralelo es la sumatoria de todos los sub-caudales que circulan por las tuberías 1, 2, N-1 y N, según la ecuación:

$$Q_p = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{N-1} + Q_N \quad (2.101)^{143}$$

Donde:

Q_p ~ Caudal entrante al sistema en paralelo.

¹⁴¹ Fórmula de Caudal Total y Parcial, para un sistema de tuberías en serie, página 110, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

¹⁴² Fórmula estándar resumida de pérdida de carga (hf). Caudal en función del cociente elevado a la inversa de la potencia n, entre la pérdida de carga individual y la Renuencias individual de cada tubería, elaboración propia, Rafael Oros, 2007.

¹⁴³ Fórmula de Caudal Total para un sistema de tuberías en paralelo, página 111, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

$Q_1 \sim$ Caudal circulante por la tubería 1.

$Q_i \sim$ Caudal circulante por la i-esima tubería.

$Q_N \sim$ Caudal circulante por la tubería N.

Los caudales individuales no pueden ser expresados en la literatura disponible. En este trabajo se propone las expresiones que se detallan a continuación:

3.3.2.1 EL CAUDAL INDIVIDUAL EN SISTEMAS DE DOS TUBERÍAS EN PARALELO

Para definir esto se examinara una distribución de dos tuberías en paralelo. Un esquema simbólico del sistema de dos tuberías en paralelo puede ser realizado de la siguiente manera:

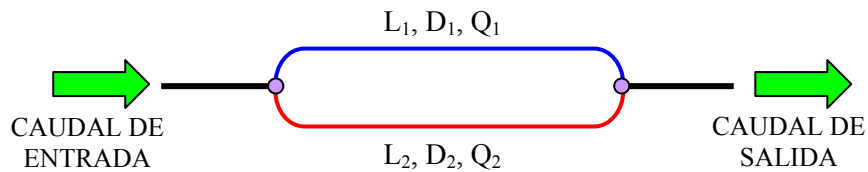


Figura 3.3.2.1 Esquema de Sistema de dos Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia

La pérdida de energía en este sistema se expresa mediante la relación: $hf_p = hf_1 = hf_2$

Siendo: $hf_1 = B_1 \times L_1 \times (Q_1)^n$ y $hf_2 = B_2 \times L_2 \times (Q_2)^n$

Entonces resulta verdadera la siguiente ecuación: $B_1 \times L_1 \times (Q_1)^n = B_2 \times L_2 \times (Q_2)^n$

De esta última relación se puede obtener: $\frac{(Q_1)^n}{(Q_2)^n} = \frac{B_2 \times L_2}{B_1 \times L_1} \rightarrow \left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^n = \frac{B_2 \times L_2}{B_1 \times L_1}$

O simplemente en su forma: $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{B_2 \times L_2}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ (3.10)

De la ecuación: $Q = Q_1 + Q_2$, se puede hacer: $Q_2 = Q - Q_1$

E introduciendo esta última expresión en (3.10), se tiene:
$$\frac{Q_1}{Q-Q_1} = \left(\frac{B_2 \times L_2}{B_1 \times L_1} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.11)$$

Realizando las siguientes sustituciones: $A = B_1 \times L_1$ $B = B_2 \times L_2$ y $e = \left(\frac{1}{n}\right)$

E ingresando estas modificaciones en (3.11) se obtiene:
$$\frac{Q_1}{Q-Q_1} = \left(\frac{B}{A} \right)^e \quad (3.12)$$

Realizando operaciones algebraicas sobre (3.12) se tiene:

$$Q_1 = (Q - Q_1) \times \left(\frac{B}{A} \right)^e \quad \rightarrow \quad Q_1 = \left[Q \times \left(\frac{B}{A} \right)^e \right] - \left[Q_1 \times \left(\frac{B}{A} \right)^e \right]$$

$$Q_1 + \left[Q_1 \times \left(\frac{B}{A} \right)^e \right] = Q \times \left(\frac{B}{A} \right)^e \quad \rightarrow \quad \left[1 + \left(\frac{B}{A} \right)^e \right] \times Q_1 = Q \times \left(\frac{B}{A} \right)^e$$

$$Q_1 = Q \times \frac{\left(\frac{B}{A} \right)^e}{\left[1 + \left(\frac{B}{A} \right)^e \right]} \quad \rightarrow \quad Q_1 = Q \times \frac{\frac{B^e}{A^e}}{\left[1 + \frac{B^e}{A^e} \right]}$$

$$Q_1 = Q \times \frac{\frac{B^e}{A^e}}{\frac{B^e}{A^e} \left[\frac{A^e}{B^e} + 1 \right]} \quad \rightarrow \quad Q_1 = Q \times \frac{1}{1 + \frac{A^e}{B^e}}$$

Eliminando los factores comunes en el numerador y en el denominador, y escribiendo la unidad del denominador como $\frac{A^e}{A^e}$, se obtiene la expresión final:

$$Q_1 = Q \times \frac{1}{\frac{A^e}{A^e} + \frac{A^e}{B^e}} \quad \rightarrow \quad Q_1 = \frac{Q}{A^e} \times \frac{1}{\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e}} \quad (3.14)$$

Realizando el mismo procedimiento algebraico en función del caudal de la tubería 2 se tiene:

$$\frac{(Q_2)^n}{(Q_1)^n} = \frac{B_1 \times L_1}{B_2 \times L_2}, \quad \text{la misma que puede escribirse como:} \quad \left(\frac{Q_2}{Q_1}\right)^n = \frac{B_1 \times L_1}{B_2 \times L_2}$$

O simplemente en su forma:
$$\frac{Q_2}{Q_1} = \left(\frac{B_1 \times L_1}{B_2 \times L_2}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.15)$$

De la ecuación: $Q = Q_1 + Q_2$, se puede hacer $Q_1 = Q - Q_2$

E introduciendo esta última expresión en (3.15), se obtiene:
$$\frac{Q_2}{Q - Q_2} = \left(\frac{B_1 \times L_1}{B_2 \times L_2}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.16)$$

Realizando las siguientes sustituciones: $A = B_1 \times L_1$ $B = B_2 \times L_2$ y $e = \left(\frac{1}{n}\right)$

E ingresando estas modificaciones en (3.16) se obtiene:
$$\frac{Q_2}{Q - Q_2} = \left(\frac{A}{B}\right)^e \quad (3.17)$$

Realizando operaciones algebraicas sobre (3.17) se tiene:

$$Q_2 = (Q - Q_2) \times \left(\frac{A}{B}\right)^e \quad \rightarrow \quad Q_2 = \left[Q \times \left(\frac{A}{B}\right)^e\right] - \left[Q_2 \times \left(\frac{A}{B}\right)^e\right]$$

$$Q_2 + \left[Q_2 \times \left(\frac{A}{B}\right)^e\right] = Q \times \left(\frac{A}{B}\right)^e \quad \rightarrow \quad \left[1 + \left(\frac{A}{B}\right)^e\right] \times Q_2 = Q \times \left(\frac{A}{B}\right)^e$$

$$Q_2 = Q \times \frac{\left(\frac{A}{B}\right)^e}{\left[1 + \left(\frac{A}{B}\right)^e\right]} \quad \rightarrow \quad Q_2 = Q \times \frac{\frac{A^e}{B^e}}{\left[1 + \frac{A^e}{B^e}\right]}$$

$$Q_2 = Q \times \frac{\frac{A^e}{B^e}}{\frac{A^e}{B^e} \left[\frac{B^e}{A^e} + 1\right]} \quad \rightarrow \quad Q_2 = Q \times \frac{1}{\frac{B^e}{A^e} + 1}$$

Eliminando los factores comunes en el numerador y en el denominador, y escribiendo la unidad del denominador como $\frac{B^e}{B^e}$, se obtiene la expresión final:

$$Q_2 = Q \times \frac{1}{\frac{B^e}{A^e} + \frac{B^e}{B^e}} \quad \rightarrow \quad Q_2 = \frac{Q}{B^e} \times \frac{1}{\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e}} \quad (3.19)$$

Finalmente si escribimos las expresiones finales (3.14) (a) y (3.19) (b) una al lado de la otra, se puede observar que existe un factor común, tal como se ve abajo:

$$Q_1 = \frac{Q}{A^e} \times \frac{1}{\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e}} \quad (3.14) \qquad Q_2 = \frac{Q}{B^e} \times \frac{1}{\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e}} \quad (3.19)$$

El factor común encontrado es “ R_T ”, y es igual a: $R_T = \frac{1}{\left[\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e} \right]}$ de orden segundo

O en su forma original:

$$R_T = \frac{1}{\left[\frac{1}{(B_1 L_1)^{\left(\frac{1}{n}\right)}} + \frac{1}{(B_2 L_2)^{\left(\frac{1}{n}\right)}} \right]} \quad \rightarrow \quad R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \right]} \quad (3.2a)^{144}$$

El factor encontrado es el mismo factor “ R_T ” de la ecuación $hf_p = (R_T)^n \times Q^n$ (3.2)

Los caudales individuales para un sistema de tuberías de 2 tramos son:

$$Q_1 = \frac{Q}{A^e} \times \frac{1}{\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e}} \quad \rightarrow \quad Q_1 = \frac{Q}{(B_1 L_1)^{\frac{1}{n}}} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{\frac{1}{n}} \right]}$$

$$Q_1 = R_T \times \frac{Q}{(B_1 L_1)^{\frac{1}{n}}}$$

¹⁴⁴ Coeficiente R_T de segundo orden y que representa la Renuencia Total del sistema de 2 Tuberías en Paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$Q_1 = R_T \times \left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} \times Q \quad (3.21)$$

$$Q_2 = \frac{Q}{B^e} \times \frac{1}{\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e}} \quad \rightarrow \quad Q_2 = \frac{Q}{(B_2 L_2)^{1/n}} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \right]}$$

$$Q_2 = R_T \times \frac{Q}{(B_2 L_2)}$$

$$Q_2 = R_T \times \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \times Q \quad (3.22)$$

Para comprobar la veracidad de los caudales individuales, estos se verificarán usando la ecuación (2.101) en su versión para dos tuberías en paralelo:

$$Q_p = Q_1 + Q_2 \quad (2.101)$$

$$Q_p = Q_1 + Q_2 = \left(R_T \times \left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} \times Q \right) + \left(R_T \times \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \times Q \right)$$

Como $Q_p = Q$ y $R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \right]}$, se obtiene:

$$Q = \left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \right] \times R_T \times Q$$

$$Q = \left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \right] \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \right]} \times Q$$

$$Q = \frac{1}{1} \times Q$$

$1 = 1$, que es lo que se quería demostrar.

3.3.2.3 EL CAUDAL INDIVIDUAL EN SISTEMAS DE “N” TUBERÍAS EN PARALELO

Un esquema simbólico para un sistema de “n” tuberías es el que se ve en la figura:

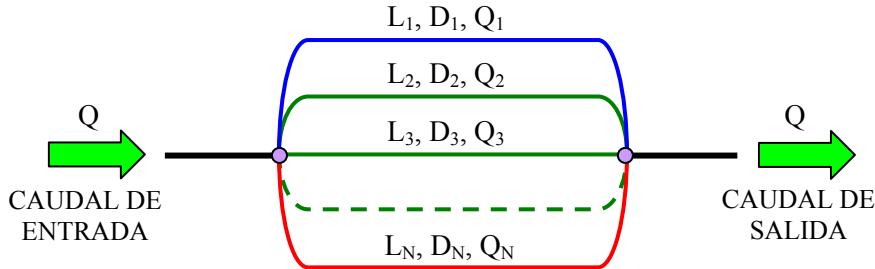


Figura 3.3.2.3 Esquema de Sistema de “N” Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia

Como la pérdida de energía en este sistema es igual en las N tuberías, las relaciones siguientes deben ser verdaderas: $hf_p = hf_1 = hf_2 = hf_3 = \dots = hf_{N-1} = hf_N$

Siendo:

$$\begin{aligned}
 hf_1 &= B_1 \times L_1 \times (Q_1)^n; & hf_2 &= B_2 \times L_2 \times (Q_2)^n \\
 hf_3 &= B_3 \times L_3 \times (Q_3)^n; & & \dots\dots\dots \\
 hf_{N-1} &= B_{N-1} \times L_{N-1} \times (Q_{N-1})^n; & hf_N &= B_N \times L_N \times (Q_N)^n
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$B_1 \times L_1 \times (Q_1)^n = B_2 \times L_2 \times (Q_2)^n = \dots\dots\dots = B_{N-1} \times L_{N-1} \times (Q_{N-1})^n = B_N \times L_N \times (Q_N)^n$$

De estas relaciones se pueden obtener:

$$\begin{aligned}
 \frac{(Q_1)^n}{(Q_2)^n} &= \frac{B_2 \times L_2}{B_1 \times L_1}; \quad \frac{(Q_1)^n}{(Q_3)^n} = \frac{B_3 \times L_3}{B_1 \times L_1}; \quad \dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 \dots\dots\dots; \quad \frac{(Q_1)^n}{(Q_{N-1})^n} &= \frac{B_{N-1} \times L_{N-1}}{B_1 \times L_1}; \quad \frac{(Q_1)^n}{(Q_N)^n} = \frac{B_N \times L_N}{B_1 \times L_1}
 \end{aligned}$$

Las mismas que puede escribirse como:

$$\left(\frac{Q_1}{Q_2}\right)^n = \frac{B_2 \times L_2}{B_1 \times L_1} ; \quad \left(\frac{Q_1}{Q_3}\right)^n = \frac{B_3 \times L_3}{B_1 \times L_1} ; \quad \dots\dots$$

$$\left(\frac{Q_1}{Q_{N-1}}\right)^n = \frac{B_{N-1} \times L_{N-1}}{B_1 \times L_1} ; \quad \left(\frac{Q_1}{Q_N}\right)^n = \frac{B_N \times L_N}{B_1 \times L_1}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{B_2 \times L_2}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.70) ; \quad \frac{Q_1}{Q_3} = \left(\frac{B_3 \times L_3}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.71)$$

.....

$$\frac{Q_1}{Q_{N-1}} = \left(\frac{B_{N-1} \times L_{N-1}}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.72) ; \quad \frac{Q_1}{Q_N} = \left(\frac{B_N \times L_N}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.73)$$

De la ecuación: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots\dots + Q_{N-1} + Q_N$

Se puede hacer $Q_1 = Q - Q_2 - Q_3 - \dots\dots - Q_{N-1} - Q_N$

E introduciendo esta expresión en (3.70), (3.71),, (3.73), se tiene:

$$\frac{Q - Q_2 - Q_3 - \dots\dots - Q_{N-1} - Q_N}{Q_2} = \left(\frac{B_2 \times L_2}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.74)$$

$$\frac{Q - Q_2 - Q_3 - \dots\dots - Q_{N-1} - Q_N}{Q_3} = \left(\frac{B_3 \times L_3}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.75)$$

.....

$$\frac{Q - Q_2 - Q_3 - \dots\dots - Q_{N-1} - Q_N}{Q_{N-1}} = \left(\frac{B_{N-1} \times L_{N-1}}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.76)$$

$$\frac{Q - Q_2 - Q_3 - \dots\dots - Q_{N-1} - Q_N}{Q_N} = \left(\frac{B_N \times L_N}{B_1 \times L_1}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (3.77)$$

Realizando las siguientes sustituciones:

$$A = B_1 \times L_1 ; \quad B = B_2 \times L_2 ; \quad Y = B_{N-1} \times L_{N-1} ; \quad Z = B_N \times L_N \quad \text{y} \quad e = \left(\frac{1}{n} \right)$$

E ingresando estas modificaciones en (3.74), (3.75),, (3.77), se obtiene:

$$\frac{Q - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_{N-1} - Q_N}{Q_2} = \left(\frac{B}{A} \right)^e$$

$$\frac{Q - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_{N-1} - Q_N}{Q_3} = \left(\frac{C}{A} \right)^e$$

.....

$$\frac{Q - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_{N-1} - Q_N}{Q_{N-1}} = \left(\frac{Y}{A} \right)^e$$

$$\frac{Q - Q_2 - Q_3 - \dots - Q_{N-1} - Q_N}{Q_N} = \left(\frac{Z}{A} \right)^e$$

Re-escribiendo estas expresiones en forma lineal:

$$Q = \left(\frac{B}{A} \right)^e Q_2 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots + Q_{N-1} + Q_N$$

$$Q = Q_2 + \left(\frac{C}{A} \right)^e Q_3 + Q_3 + Q_4 + \dots + Q_{N-1} + Q_N$$

$$Q = Q_2 + Q_3 + \left(\frac{D}{A} \right)^e Q_4 + Q_4 + \dots + Q_{N-1} + Q_N$$

.....

$$Q = Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots + \left(\frac{Y}{A} \right)^e Q_{N-1} + Q_{N-1} + Q_N$$

$$Q = Q_2 + Q_3 + Q_4 + \dots + Q_{N-1} + \left(\frac{Z}{A} \right)^e Q_N + Q_N$$

Como se ve, en la matriz de coeficientes, la diagonal principal tiene valores diferentes de cero, por lo tanto el determinante de esta matriz existe, siendo la solución única.

La forma original para el determinante es:

$$\Delta = \left(\frac{B}{A}\right)^e \left(\frac{C}{A}\right)^e \times \dots \times \left(\frac{Y}{A}\right)^e \left(\frac{Z}{A}\right)^e + \left(\frac{B}{A}\right)^e \left(\frac{C}{A}\right)^e + \left(\frac{B}{A}\right)^e \left(\frac{D}{A}\right)^e + \dots + \left(\frac{X}{A}\right)^e \left(\frac{Z}{A}\right)^e + \left(\frac{Y}{A}\right)^e \left(\frac{Z}{A}\right)^e$$

Pudiéndose escribir de N maneras:

$$\Delta = \left(\frac{C}{A}\right)^e \left(\frac{D}{A}\right)^e \times \dots \times \left(\frac{Y}{A}\right)^e \left(\frac{Z}{A}\right)^e \left[\left(\frac{B}{A}\right)^e + \left(\frac{B}{D}\right)^e + \left(\frac{B}{C}\right)^e + \dots + \left(\frac{B}{Y}\right)^e + \left(\frac{B}{Z}\right)^e + \left(\frac{B}{B}\right)^e \right]$$

$$\Delta = \left(\frac{B}{A}\right)^e \left(\frac{D}{A}\right)^e \times \dots \times \left(\frac{Y}{A}\right)^e \left(\frac{Z}{A}\right)^e \left[\left(\frac{C}{A}\right)^e + \left(\frac{C}{D}\right)^e + \left(\frac{C}{B}\right)^e + \dots + \left(\frac{C}{Y}\right)^e + \left(\frac{C}{Z}\right)^e + \left(\frac{C}{C}\right)^e \right]$$

$$\Delta = \left(\frac{B}{A}\right)^e \left(\frac{C}{A}\right)^e \times \dots \times \left(\frac{Y}{A}\right)^e \left(\frac{Z}{A}\right)^e \left[\left(\frac{D}{A}\right)^e + \left(\frac{D}{B}\right)^e + \left(\frac{D}{C}\right)^e + \dots + \left(\frac{D}{Y}\right)^e + \left(\frac{D}{Z}\right)^e + \left(\frac{D}{D}\right)^e \right]$$

$\Delta = \dots$

$$\Delta = \left(\frac{B}{A}\right)^e \left(\frac{C}{A}\right)^e \times \dots \times \left(\frac{Y}{A}\right)^e \left(\frac{Z}{A}\right)^e \left[\left(\frac{X}{A}\right)^e + \left(\frac{X}{D}\right)^e + \left(\frac{X}{C}\right)^e + \dots + \left(\frac{X}{Y}\right)^e + \left(\frac{X}{Z}\right)^e + \left(\frac{X}{X}\right)^e \right]$$

$$\Delta = \left(\frac{B}{A}\right)^e \left(\frac{C}{A}\right)^e \times \dots \times \left(\frac{X}{A}\right)^e \left(\frac{Z}{A}\right)^e \left[\left(\frac{Y}{A}\right)^e + \left(\frac{Y}{D}\right)^e + \left(\frac{Y}{B}\right)^e + \dots + \left(\frac{Y}{X}\right)^e + \left(\frac{Y}{Z}\right)^e + \left(\frac{Y}{Y}\right)^e \right]$$

$$\Delta = \left(\frac{B}{A}\right)^e \left(\frac{C}{A}\right)^e \times \dots \times \left(\frac{X}{A}\right)^e \left(\frac{Y}{A}\right)^e \left[\left(\frac{Z}{A}\right)^e + \left(\frac{Z}{B}\right)^e + \left(\frac{Z}{C}\right)^e + \dots + \left(\frac{Z}{Y}\right)^e + \left(\frac{Z}{X}\right)^e + \left(\frac{Z}{Z}\right)^e \right]$$

A este grupo de ecuaciones se les denominara ecuación **(3.79)**.

Por la regla de Cramer los caudales individuales Q_2 , Q_3 y Q_4 se expresan de la siguiente manera:

$$Q_2 = \frac{\Delta_{Q_2}}{\Delta} \quad Q_3 = \frac{\Delta_{Q_3}}{\Delta} \quad Q_4 = \frac{\Delta_{Q_4}}{\Delta} \quad Q_{N-1} = \frac{\Delta_{Q_{N-1}}}{\Delta} \quad Q_N = \frac{\Delta_{Q_N}}{\Delta}$$

La resolución del sistema de ecuaciones simultáneas, ecuación (3.78) y utilizando las expresiones dadas en la ecuación (3.79), arroja los siguientes resultados:

$$Q_2 = \frac{Q}{B^e} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{A}\right)^e + \left(\frac{1}{B}\right)^e + \left(\frac{1}{C}\right)^e + \left(\frac{1}{D}\right)^e + \dots + \left(\frac{1}{Y}\right)^e + \left(\frac{1}{Z}\right)^e \right]}$$

$$Q_3 = \frac{Q}{C^e} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{A}\right)^e + \left(\frac{1}{B}\right)^e + \left(\frac{1}{C}\right)^e + \left(\frac{1}{D}\right)^e + \dots + \left(\frac{1}{Y}\right)^e + \left(\frac{1}{Z}\right)^e \right]}$$

$$Q_4 = \frac{Q}{D^e} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{A}\right)^e + \left(\frac{1}{B}\right)^e + \left(\frac{1}{C}\right)^e + \left(\frac{1}{D}\right)^e + \dots + \left(\frac{1}{Y}\right)^e + \left(\frac{1}{Z}\right)^e \right]}$$

$$Q_{\dots} = \frac{Q}{\dots^e} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{A}\right)^e + \left(\frac{1}{B}\right)^e + \left(\frac{1}{C}\right)^e + \left(\frac{1}{D}\right)^e + \dots + \left(\frac{1}{Y}\right)^e + \left(\frac{1}{Z}\right)^e \right]}$$

$$Q_{N-1} = \frac{Q}{Y^e} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{A}\right)^e + \left(\frac{1}{B}\right)^e + \left(\frac{1}{C}\right)^e + \left(\frac{1}{D}\right)^e + \dots + \left(\frac{1}{Y}\right)^e + \left(\frac{1}{Z}\right)^e \right]}$$

$$Q_N = \frac{Q}{Z^e} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{A}\right)^e + \left(\frac{1}{B}\right)^e + \left(\frac{1}{C}\right)^e + \left(\frac{1}{D}\right)^e + \dots + \left(\frac{1}{Y}\right)^e + \left(\frac{1}{Z}\right)^e \right]}$$

De $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{B}{A}\right)^e$, se obtiene el valor para Q_1 :

$$Q_1 = \frac{Q}{B^e} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{A}\right)^e + \left(\frac{1}{B}\right)^e + \left(\frac{1}{C}\right)^e + \left(\frac{1}{D}\right)^e + \dots + \left(\frac{1}{Y}\right)^e + \left(\frac{1}{Z}\right)^e \right]} \times \left(\frac{B}{A}\right)^e$$

$$Q_1 = \frac{Q}{A^e} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{A}\right)^e + \left(\frac{1}{B}\right)^e + \left(\frac{1}{C}\right)^e + \left(\frac{1}{D}\right)^e + \dots + \left(\frac{1}{Y}\right)^e + \left(\frac{1}{Z}\right)^e \right]}$$

Como se ve en los resultados finales para Q_1, Q_2, Q_3, Q_{N-1} y Q_N las expresiones finales presentan el factor común “ R_T ” de orden N:

$$R_T = \frac{1}{\left[\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e} + \frac{1}{C^e} + \frac{1}{D^e} + \dots + \frac{1}{Y^e} + \frac{1}{Z^e} \right]}$$

O en su forma original:

$$R_T = \frac{1}{\left[\frac{1}{(B_1 L_1)^{1/n}} + \frac{1}{(B_2 L_2)^{1/n}} + \frac{1}{(B_3 L_3)^{1/n}} + \frac{1}{(B_4 L_4)^{1/n}} + \dots + \frac{1}{(B_{N-1} L_{N-1})^{1/n}} + \frac{1}{(B_N L_N)^{1/n}} \right]}$$

$$R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_3 L_3} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_4 L_4} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} \right]}$$

$$R_T = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \right]} \tag{3.2c}^{145}$$

Por lo tanto los caudales individuales en un sistema de tuberías de “N” tramos son iguales a:

$$Q_i = \frac{Q}{(i)^e} \times \frac{1}{\left[\frac{1}{A^e} + \frac{1}{B^e} + \frac{1}{C^e} + \frac{1}{D^e} + \dots + \frac{1}{Y^e} + \frac{1}{Z^e} \right]}$$

$$Q_i = \frac{Q}{(B_i L_i)^{1/n}} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} \right]}$$

$$Q_i = R_T \times \frac{Q}{(B_i L_i)^{1/n}} \tag{3.80}$$

¹⁴⁵ Coeficiente R_T de orden “N” y que representa la Renuencia Total del sistema de “N” Tuberías en Paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$Q_i = R_T \times \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \times Q \quad (3.81)$$

$$Q_i = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \right]} \times \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \times Q \quad (3.82)$$

Para comprobar la veracidad de los caudales individuales, estos se verificarán usando la ecuación (2.101) en su versión para “N” tuberías en paralelo:

$$Q_P = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_{N-1} + Q_N \quad (2.101)$$

$$Q_P = \left(R_T \cdot \left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} Q \right) + \left(R_T \cdot \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} Q \right) + \dots + \left(R_T \cdot \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} Q \right) + \left(R_T \cdot \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} Q \right)$$

Como $Q_P = Q$ y $R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} \right]}$, se

obtiene:

$$Q = \left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} \right] \times R_T \times Q$$

$$Q = \left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} \right] \cdot \frac{Q}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} \right]}$$

$$Q = \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \right] \times \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \right]} \times Q \quad (3.83)$$

$$Q = \frac{1}{1} \times Q \quad \rightarrow \quad 1 = 1, \text{ que es lo que se quería demostrar.}$$

El factor “ R_T ” es una medida exclusiva de las propiedades geométricas y de rugosidad de las tuberías conectadas en un sistema de tuberías. A este factor se le conoce como **Renuencia Hidráulica**. Más detalles sobre la renuencia en el Anexo C.

3.3.2.3.1 CONSECUENCIAS MATEMÁTICAS DEL FACTOR “ R_T ”

Como se pudo observar de la ecuación (3.83), el producto de R_T por la sumatoria de los inversos de las renuencias individuales arroja la unidad:

$$1 = \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \right] \times \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \right]}$$

$$1 = \frac{1}{\left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{B_i L_i} \right)^{1/n} \right]} \times \left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_{N1}} \right)^{1/n} \right]$$

$$1 = R_T \times \left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_{N1}} \right)^{1/n} \right]$$

$$Q = R_T \times \left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} \right] \times Q$$

$$Q_P = \left(R_T \cdot \left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} Q \right) + \left(R_T \cdot \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} Q \right) + \dots + \left(R_T \cdot \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}} \right)^{1/n} Q \right) + \left(R_T \cdot \left(\frac{1}{B_N L_N} \right)^{1/n} Q \right)$$

$$Q_P = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_{N-1} + Q_N$$

Esta propiedad actúa como factor de distribución del caudal total Q , entre las “N” tuberías del sistema de tuberías en paralelo. El factor R_T se utiliza además para el control del sistema, en lo que respecta a la continuidad del valor del caudal.

3.3.2.4 FÓRMULAS PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DE LAS CARACTERÍSTICAS HIDRAULICAS DE LOS SISTEMAS DE DOS TUBERÍAS EN PARALELO

3.3.2.4.1 FÓRMULAS PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DE LA RENUENCIA TOTAL EN SISTEMAS DE DOS TUBERÍAS EN PARALELO

El factor R_T permite desarrollar la renuencia total para un sistema de tuberías de dos tramos de una manera muy práctica:

De la ecuación (3.2a), $R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \right]}$ y su desglose:

$$R_T = \frac{1}{\left[\frac{1}{(B_1 L_1)^{1/n}} + \frac{1}{(B_2 L_2)^{1/n}} \right]} = \frac{1}{\frac{1}{(B_1 L_1)^{1/n}} + \frac{1}{(B_2 L_2)^{1/n}}} = \frac{1}{\frac{(B_2 L_2)^{1/n} + (B_1 L_1)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} \times (B_2 L_2)^{1/n}}}$$

$$R_T = \frac{(B_1 L_1)^{1/n} \times (B_2 L_2)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n}} \quad (3.90)^{146}$$

3.3.2.4.2 FÓRMULAS PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DE LOS CAUDALES INDIVIDUALES EN SISTEMAS DE DOS TUBERÍAS EN PARALELO

La última ecuación encontrada (3.90), se utilizará en lugar de la ecuación (3.2a), para ser utilizadas en las ecuaciones (3.21) y (3.22), tal como se ve a continuación:

¹⁴⁶ Fórmula práctica de la Renuencia Total para un sistema de “2” Tuberías en Paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$Q_1 = R_T \times \left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} \times Q \quad (3.21)$$

$$Q_2 = R_T \times \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \times Q \quad (3.22)$$

Reemplazando la ecuación (3.90) en (3.21), se tiene el caudal Q_1 :

$$Q_1 = \frac{(B_1 L_1)^{1/n} \times (B_2 L_2)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n}} \times \left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} \times Q = \frac{(B_1 L_1)^{1/n} \times (B_2 L_2)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n}} \times \frac{1}{(B_1 L_1)^{1/n}} \times Q$$

$$Q_1 = \frac{(B_2 L_2)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n}} \times Q \quad (3.91)^{147}$$

De la misma manera, siguiendo el mismo procedimiento, el caudal Q_2 es:

$$Q_2 = \frac{(B_1 L_1)^{1/n} \times (B_2 L_2)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n}} \times \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \times Q = \frac{(B_1 L_1)^{1/n} \times (B_2 L_2)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n}} \times \frac{1}{(B_2 L_2)^{1/n}} \times Q$$

$$Q_2 = \frac{(B_1 L_1)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n}} \times Q \quad (3.92)^{148}$$

3.3.2.4.3 FÓRMULAS PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DE LA PÉRDIDA DE CARGA TOTAL EN SISTEMAS DE DOS TUBERÍAS EN PARALELO

El factor R_T permite desarrollar la pérdida de carga total para un sistema de tuberías de dos tramos de una manera muy práctica.

De la ecuación (3.2a), y de las ecuaciones (2.103) y (2.104):

¹⁴⁷ Fórmula práctica del Caudal 1, Q_1 en función de la Renuencia Total para un sistema de “2” Tuberías en Paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹⁴⁸ Fórmula práctica del Caudal 2, Q_2 en función de la Renuencia Total para un sistema de “2” Tuberías en Paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \right]} \quad (3.2a)$$

$$\frac{hf_p}{Q^n} = \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.103)$$

$$hf_p = \frac{Q^n}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.104)$$

$$hf_p = \frac{Q^n}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} = \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \times Q^n = \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n}} \right\}^n \times Q^n$$

$$hf_p = \left\{ \frac{1}{\sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{B_i L_i} \right]^{1/n}} \right\}^n \times Q^n = \{R_T\}^n \times Q^n$$

Para el caso de 2 tuberías en paralelo, se tiene:

$$hf_p = \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{1/n} \right]} \right\}^n \times Q^n = \left\{ \frac{(B_1 L_1)^{1/n} \times (B_2 L_2)^{1/n}}{(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n}} \right\}^n \times Q^n$$

$$hf_p = \frac{(B_1 L_1) \times (B_2 L_2)}{\left[(B_1 L_1)^{1/n} + (B_2 L_2)^{1/n} \right]^n} \times Q^n \quad (3.93)^{149}$$

¹⁴⁹ Fórmula practica de la Pérdida de carga, (hf), en función de las Renuencias Individuales para un sistema de “2” Tuberías en Paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

3.4 COROLARIO DEL MODELO MATEMÁTICO PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE TUBERÍAS: SERIE, PARALELO

De esta manera se presenta el siguiente corolario tabular o “*Teorema de Afinidad*” de comportamiento, que establece una “similitud” entre las características de sistemas de tuberías en serie y paralelo con las características de los circuitos eléctricos en serie y paralelo. Para esto se establece las siguientes relaciones de afinidad entre variables físicas, las mismas que se observan en las tablas siguientes:

Variables eléctricas	Variables hidráulicas
Diferencia de Potencial (E)	Pérdida de carga; hf
Intensidad de corriente (I)	Caudal, Q
Resistencia eléctrica (R)	Renuencia, BL

Tabla 3.4.1 Tabla Resultado de analogías entre factores eléctricos e hidráulicos
Elaboración propia.

La ley de Ohm establece el comportamiento de las variables: voltaje, corriente eléctrica y resistencia eléctrica del circuito global y de los resistores individuales en circuitos en serie y paralelo, tal como se ve en la tabla 3.4.1A:

TABLA 3.4.1A	Circuitos de resistores en SERIE	Circuitos de resistores en PARALELO
Intensidad de corriente (I)	La corriente que fluye por el circuito es la misma en cada resistor: $I = I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_N$	La corriente total es la suma de las corrientes que circulan por cada resistor: $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_N$
Resistencia eléctrica (R)	La resistencia total es la suma de las resistencias individuales: $R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$	La resistencia total del circuito puede ser encontrada aplicando la formula: $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_N}$
Voltaje o Diferencia de Potencial (E)	El voltaje aplicado al circuito es igual a la suma de los voltajes en cada resistor: $E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N$	El voltaje aplicado al circuito es el mismo que fluye por cada resistor: $E = E_1 = E_2 = E_3 = \dots = E_N$

Tabla 3.4.1A Testigo, Características físicas en circuitos eléctricos, Elaboración Propia.

La tabla 3.4.1B, basándose en la ley Ohm, identifica la afinidad de comportamiento físico de las variables eléctricas de los circuitos en serie y paralelo con las variables hidráulicas en sistemas de tuberías en serie y paralelo, que son en realidad los elementos conclusivos de este trabajo:

TABLA 3.4.1B	Sistemas de tuberías en SERIE	Sistemas de tuberías en PARALELO
Caudal (Q)	El caudal que fluye por el sistema es el mismo por cada tubería: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_N$	El caudal total es la suma de los caudales que fluyen por cada tubería: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_N$
Renuencia (R=BL)	La renuencia total del sistema es la suma de las renuencias individuales: $R = BL = B_1L_1 + B_2L_2 + \dots + B_NL_N$	La renuencia total del sistema puede ser encontrada aplicando la formula $\frac{1}{R_T} = \left(\frac{1}{B_1L_1}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{B_2L_2}\right)^{\frac{1}{n}} + \dots + \left(\frac{1}{B_NL_N}\right)^{\frac{1}{n}}$
Pérdida de carga (hf)	La pérdida de carga total es igual a la suma de las pérdidas de carga individuales: $hf = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_N$	La pérdida de carga del sistema es la misma en cada tramo: $hf = hf_1 = hf_2 = hf_3 = \dots = hf_N$

Tabla 3.4.1B Tabla - Características físicas en Sistemas de Tuberías, Elaboración Propia

Por otro lado, a semejanza con la “Ley de Ohm”, se tiene la siguiente forma de control para la Renuencia en un sistema de Tuberías en Paralelo:

La Renuencia Total en un sistema de Tuberías en Paralelo es menor que la menor Renuencia Individual del Sistema.¹⁵⁰

Las tres tablas (Tabla 3.4.1, Tabla 3.4.1A, Tabla 3.4.1B) presentadas en este corolario constituyen el “**Teorema de Afinidad**”, para tuberías basándose en la similitud de comportamiento con circuitos eléctricos de resistores.

El “**Teorema de Afinidad**” permite abordar problemas de sistemas de tuberías más complejos, tales como la resolución de sistemas combinados: serie-paralelo y paralelo-serie

¹⁵⁰ Postulado general de control para la Renuencia Total en un sistema de Tuberías en Paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

3.5 RESOLUCIÓN POR EL TEOREMA DE AFINIDAD DE LOS SISTEMAS DE TUBERÍAS COMBINADOS: SERIE-PARALELO Y PARALELO-SERIE

3.5.1 RESOLUCIÓN POR EL TEOREMA DE AFINIDAD DE LOS SISTEMAS DE TUBERÍAS COMBINADOS: SERIE-PARALELO

Un esquema de este tipo de combinación de tuberías es el que se presenta a continuación:

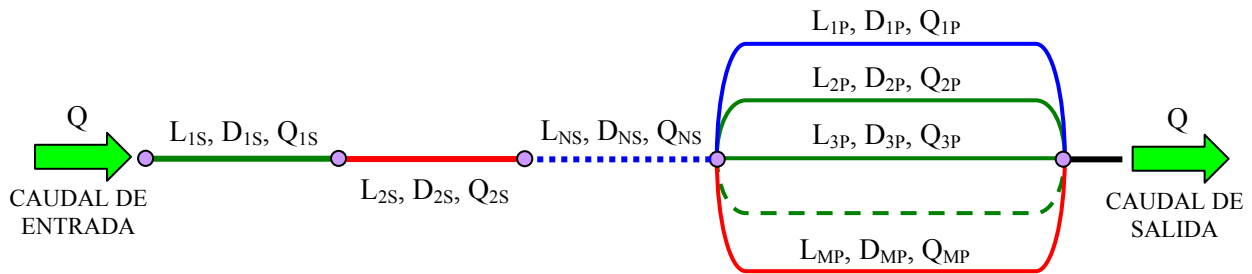


Figura 3.5.1 Esquema de Sistema Combinado de Tuberías: Serie-Paralelo, Elaboración Propia

Las pérdidas de carga en un sistema de tuberías en serie obedecen a la ecuación (2.94), y las pérdidas de carga en un sistema de tuberías en paralelo a la ecuación (3.3):

$$hf_s = Q^n \times \sum_{i=1}^N (B_i \cdot L_i) \quad (2.94) \qquad hf_p = (R_T)^n \times Q^n \quad (3.3)$$

Donde el factor R_T es igual a:

$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2}\right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_N L_N}\right)^{1/n}}$$

En el esquema se observa que:

$$hf_{SP} = hf_s + hf_p \quad (3.100)^{151}$$

Donde:

$hf_{SP} \sim$ Pérdida de carga total en el sistema serie-paralelo.

$hf_s \sim$ Pérdida de carga en el sub-sistema en serie.

¹⁵¹ Fórmula Reducida de Pérdida de carga Total, (hf), para un sistema combinado de Tuberías serie-paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$hf_p \sim$ Pérdida de carga en el sub-sistema en paralelo.

La última expresión puede desarrollarse así:

$$hf_{SP} = [B_{1S}L_{1S}Q^n + B_{2S}L_{2S}Q^n + \dots + B_{NS}L_{NS}Q^n] + \frac{Q^n}{\left[\left(\frac{1}{B_{1P}L_{1P}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_{2P}L_{2P}} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{MP}L_{MP}} \right)^{1/n} \right]^n}$$

$$hf_{SP} = Q^n [B_{1S}L_{1S} + B_{2S}L_{2S} + \dots + B_{NS}L_{NS}] + \frac{Q^n}{\left[\left(\frac{1}{B_{1P}L_{1P}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_{2P}L_{2P}} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{MP}L_{MP}} \right)^{1/n} \right]^n}$$

$$hf_{SP} = Q^n \times \left\{ [B_{1S}L_{1S} + B_{2S}L_{2S} + \dots + B_{NS}L_{NS}] + \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_{1P}L_{1P}} \right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_{2P}L_{2P}} \right)^{1/n} + \dots + \left(\frac{1}{B_{MP}L_{MP}} \right)^{1/n} \right]^n} \right\}$$

O en un formato más general:

$$hf_{SP} = Q^n \times \left\{ \sum_{i=1}^N B_i L_i + \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{B_j L_j} \right)^{1/n} \right]^n} \right\} \tag{3.101}^{152}$$

$$\frac{hf_{SP}}{Q^n} = \sum_{i=1}^N B_i L_i + \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{B_j L_j} \right)^{1/n} \right]^n} \tag{3.102}^{153}$$

¹⁵² Fórmula ampliada de Pérdida de carga Total, (hf), para un sistema combinado de Tuberías serie-paralelo, elaboración propia, en función del caudal y de la renuencia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹⁵³ Fórmula ampliada del Cociente entre la Pérdida de carga Total, (hf) y el Caudal elevado a la “n”, para un sistema combinado de Tuberías serie-paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$\frac{hf_{SP}}{Q^n} = \sum_{i=1}^N R_i + \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{R_j} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n} \quad (3.103)^{154}$$

Donde el subsistema en serie puede extenderse a N tramos y el subsistema en paralelo puede contener M tramos. Sistemas combinados más elaborados, se pueden tratar desde adentro hacia fuera, al igual que esquemas eléctricos similares.

3.5.2 RESOLUCIÓN POR EL TEOREMA DE AFINIDAD DE LOS SISTEMAS DE TUBERÍAS COMBINADOS: PARALELO-SERIE

Un esquema de este tipo de combinación de tuberías es el que se presenta a continuación:

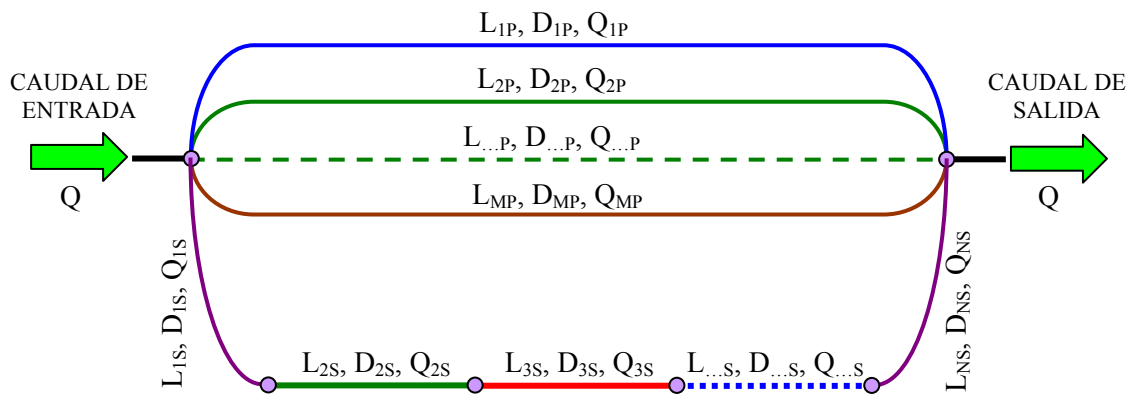


Figura 3.5.2 Esquema de Sistema Combinado de Tuberías: Paralelo-Serie, Elaboración Propia

Las pérdidas de carga en un sistema de tuberías en serie obedecen a la ecuación (2.94), y las pérdidas de carga en un sistema de tuberías en paralelo a la ecuación (3.3):

$$hf_s = Q^n \times \sum_{i=1}^N (B_i \cdot L_i) \quad (2.94) \qquad hf_p = (R_T)^n \times Q^n \quad (3.3)$$

Donde el factor R_T es igual a:

¹⁵⁴ Fórmula reducida del Cociente entre la Pérdida de carga Total, (hf) y el Caudal elevado a la “n”, para un sistema combinado de tuberías serie-paralelo, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{B_2 L_2}\right)^{\frac{1}{n}} + \dots + \left(\frac{1}{B_{N-1} L_{N-1}}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{B_N L_N}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

En el esquema se observa que:

$$hf_{PS} = (R_{T-PS})^n \times Q^n \quad (3.110)^{155}$$

Donde:

$hf_{PS} \sim$ Pérdida de carga Total.

$R_{T-PS} \sim$ Factor R_T del sistema Paralelo-Serie.

El factor R_{T-PS} debe ser desglosado de la siguiente manera:

$$R_{T-PS} = \frac{1}{\left(\frac{1}{B_{1P} L_{1P}}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{B_{2P} L_{2P}}\right)^{\frac{1}{n}} + \dots + \left(\frac{1}{B_{MP} L_{MP}}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{[B_{1S} L_{1S} + B_{2S} L_{2S} + \dots + B_{NS} L_{NS}]}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$R_{T-PS} = \frac{1}{\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{B_j L_j}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^N (B_i L_i)}\right)^{\frac{1}{n}}} \quad (3.111)^{156}$$

Reemplazando el valor de en la ecuación (3.110), $hf_{PS} = (R_{T-PS})^n \times Q^n$, se tiene el formato general para sistemas combinados de tuberías paralelo-serie:

¹⁵⁵ Fórmula Reducida de Pérdida de carga Total, (hf), para un sistema combinado de Tuberías paralelo-serie, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹⁵⁶ Factor R_T , para un sistema combinado de Tuberías paralelo-serie, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

$$hf_{PS} = Q^n \times \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{B_j L_j} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^N (B_i L_i)} \right)^{\frac{1}{n}}} \right)^n \quad (3.112)^{157}$$

$$\frac{hf_{PS}}{Q^n} = \left\{ \frac{1}{\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{B_j L_j} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^N (B_i L_i)} \right)^{\frac{1}{n}}} \right\}^n \quad (3.113)^{158}$$

$$\frac{hf_{PS}}{Q^n} = \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{R_j} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^N (R_i)} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n} \quad (3.114)^{159}$$

Donde el subsistema en serie puede extenderse a N tramos y el subsistema en paralelo puede contener M tramos. Sistemas combinados más elaborados, se pueden tratar desde adentro hacia fuera, al igual que esquemas eléctricos similares.

¹⁵⁷ Fórmula ampliada de Pérdida de carga Total, (*hf*), para un sistema combinado de Tuberías paralelo-serie, elaboración propia, en función del caudal y de la renuencia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹⁵⁸ Fórmula ampliada del Cociente entre la Pérdida de carga Total, (*hf*) y el Caudal elevado a la “n”, para un sistema combinado de Tuberías paralelo-serie, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

¹⁵⁹ Fórmula reducida del Cociente entre la Pérdida de carga Total, (*hf*) y el Caudal elevado a la “n”, para un sistema combinado de Tuberías paralelo-serie, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2010.

3.6 VERIFICACIÓN DE LAS HIPÓTESIS

De acuerdo a la información generada en este trabajo de investigación, se han elaborado las siguientes repuestas a las hipótesis declaradas en el capítulo I.

3.6.1 DE PRIMER GRADO

Se presentan las siguientes respuestas a las hipótesis declaradas:

- La “Ley de Ohm” para sistemas de circuitos eléctricos SI se adapta por su afinidad de comportamiento físico a sistemas hidráulicos de tuberías.
- Los sistemas eléctricos e hidráulicos SI obedecen a reglas matemáticas similares, aunque los elementos matemáticos de los sistemas de tuberías no son tan notorios como sus similares eléctricos.
- Los factores hidráulicos de analogía similar SI pueden redefinirse en función a las características de los factores de sistemas eléctricos similares: circuitos eléctricos en serie y paralelo, con sistemas de tuberías en serie y paralelo.

3.6.2 DE SEGUNDO GRADO

Se presentan las siguientes respuestas a las hipótesis declaradas:

- El corolario resultante de este trabajo demuestra que SI es posible la generalización matemática de los factores y magnitudes de los sistemas de tuberías.
- Los resultados de este trabajo demuestran que la cantidad de variables no es una cuestión relevante en el tratamiento numérico de los sistemas objeto de estudio. Por lo tanto el nivel de incertidumbre de los procedimientos de cálculo, es tan grande o tan pequeño como así se desee.
- Las cifras significativas de los resultados numéricos de problemas vinculados a sistemas de tuberías, son tan grandes o tan pequeños como se desea esperar en los propios resultados.

3.6.3 DE TERCER GRADO

Se presentan las siguientes respuestas a las hipótesis declaradas:

- Los resultados cualitativos esperados de este trabajo de investigación SI se pueden expresarse como postulados ya definidos en la “Ley de Ohm”, pero conservando sus propias características y terminología.
- Las definiciones conceptuales de los factores y magnitudes de los sistemas de tuberías hidráulicas SI pueden expresarse como sus similares, en sistemas eléctricos, tal como se denota en la tabla 3.4.1:

Variables eléctricas	Variables hidráulicas
Diferencia de Potencial (E)	Perdida de carga; h_f
Intensidad de corriente (I)	Caudal, Q
Resistencia eléctrica (R)	Renuencia, BL

*Tabla 3.4.1 Tabla Resultado de analogías entre factores eléctricos e hidráulicos
Elaboración propia.*

3.7 CONTRASTACIÓN CON INFORMACIÓN EXPERIMENTAL, DEDUCTIVA Y APLICADA

3.7.1 DATOS EXPERIMENTALES

Los datos experimentales son el producto de la recolección de datos realizados por los estudiantes de Ingeniería Civil, en la asignatura de Hidráulica, en los dos semestres (CIV 321 Y CIV 322), a través de los años, desde el 2003 al 2012.

Los valores tabulados de los experimentos se escogieron en grupos de cinco pruebas experimentales, según la metodología del libro “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica” de Ernesto García Ruiz, edición 1997. La metodología (procedimientos, formularios y técnicas), se utiliza como base de comparación para los nuevos cálculos basados en el “Corolario” del presente trabajo. La colección relevante de los datos se presenta en el Anexo D, de acuerdo a formato establecido por el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad Autónoma “Juan Misael Saracho”.

3.7.1.1 EXPERIMENTACIÓN CON SISTEMAS DE TUBERÍAS EN SERIE

Para este sistema de tuberías se presenta datos experimentales de un sistema compuesto de dos tramos en serie según el esquema grafico:

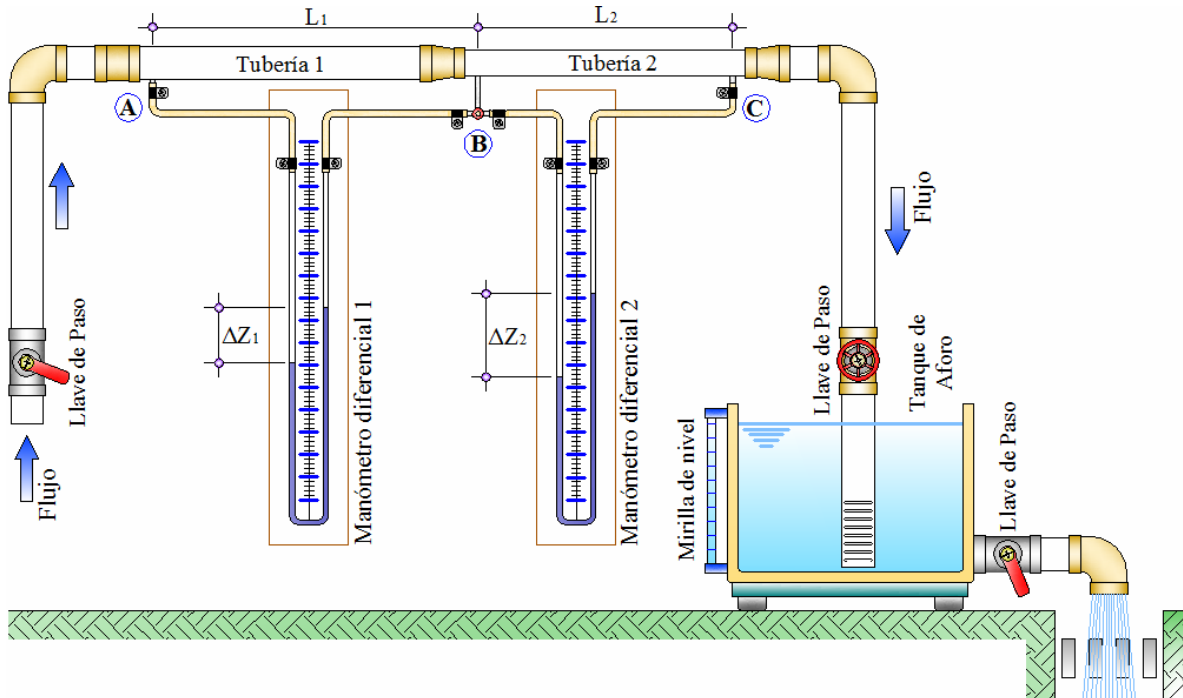


Figura 3.7.1.1 Grafico esquemático del Sistema de dos Tubería en Serie (experimento real), Elaboración Propia

Observando la figura 3.7.3.1, se debe mencionar que la tubería 1 comprende no solo a la tubería misma, sino a la reducción gradual y a un pequeño tramo de tubería con D_2 . Para llevar a cabo este experimento estos 3 objetos se consideraron como una sola unidad.

Los datos iniciales son:

DATOS INICIALES

Tubería 1		Tubería 2	
Material:	acero galvanizado	Material:	acero galvanizado
Diámetro interior D_1 :	50.80 [mm]	Diámetro interior D_2 :	38.10 [mm]
Longitud L_1 :	5.01 [m]	Longitud L_2 :	5.18 [m]
C de Hazen - Williams	125-130	C de Hazen - Williams	125-130

Tabla 3.7.1.1.1 Datos iniciales de las Tuberías reales del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia

Para más detalles sobre el coeficiente C de Hazen – Williams, ver el Anexo D.

DATOS GENERALES

Aceleración de la gravedad	g	:	9.80665	[m/s ²]
Temperatura del agua	t	:	18	[°C]
Altura del punto A	Z _A	:	2.070	[m]
Altura del punto B	Z _B	:	2.070	[m]
Altura del punto C	Z _C	:	2.070	[m]
Área del tanque de aforo	A	:	1.01	[m ²]
Coeficiente de reducción brusca	K _{rb}	:	0.220	
Viscosidad cinemática	ν	:	1.07428E-06	[m ² /s]

Tabla 3.7.1.1.2 Datos Generales del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia

El valor de la aceleración de la gravedad se consideró con estas cifras decimales, debido a la seriedad científica de este trabajo.

Los valores tabulados de este experimento (5 pruebas experimentales según la fórmula de Hazen-Williams), según la metodología del libro “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica” de Ernesto García Ruiz, se observan en la tabla 3.7.3.3.

Nro. Prueba	Caudal [m ³ /s]	ΔZ_1 [cm]	ΔZ_2 [cm]	hf ₁ [m]	hf ₂ [m]	v ₁ [m/s]	v ₂ [m/s]	C_1 Hazen	C_2 Hazen
1	0.00127	0.48	2.02	0.06054	0.25371	0.6259	1.1127	125.056	125.170
2	0.00243	1.61	6.75	0.20196	0.84780	1.2006	2.1344	125.166	125.169
3	0.00324	2.73	11.47	0.34314	1.44013	1.5982	2.8413	125.148	125.165
4	0.00419	4.40	18.46	0.55239	2.31832	2.0668	3.6744	125.154	125.171
5	0.00480	5.65	23.72	0.70964	2.97873	2.3663	4.2068	125.159	125.167

Tabla 3.7.1.1.3 Resultados del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Metodología “Manual de Practicas del Laboratorio de Hidráulica - UAJMS”

Donde el caudal se calcula según el método volumétrico y la pérdida de carga se obtiene según la ecuación:

$$hf = \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} = (S - 1) \times \Delta Z \quad (3.200)^{160}$$

Donde:

S ~ peso específico relativo del líquido manométrico, adimensional

ΔZ ~ lectura del desnivel del líquido manométrico, en [m]

Los valores originales de los datos experimentales se ven en el Anexo E.

3.7.1.1.1 DEMOSTRACIÓN USANDO LA FÓRMULA DE HAZEN - WILLIAMS

Los valores a comparar son las pérdidas de carga del sistema, es decir los valores sombreados de la tabla 3.7.3.3.

Para esto se deben calcular las renuencias individuales de las tuberías, según la ecuación:

$R_i = B_i \times L_i$, donde B es según la Formula de Hazen Williams

$$R_1 = B_1 \times L_1$$

$$R_1 = \frac{10.64806344}{0.0508^{4.87} \times 130^{1.852}} \times 5.01 = 2794.06822896 \times 5.01$$

$$R_1 = 11341.97418111$$

$$R_2 = \frac{10.64806344}{0.0381^{4.87} \times 130^{1.852}} \times 5.01 = 13998.2818271 \times 5.18$$

$$R_2 = 58751.4262581$$

La pérdida de carga es igual a: $hf = \frac{10.64806344}{D^{4.87} C^{1.852}} \times L \cdot Q^{1.852} \quad (2.82)$

¹⁶⁰ Fórmula de pérdida de carga experimental (hf), para una tubería orientada a un sistema de tuberías en serie, según metodología adoptada en este libro, página 117, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

Con esta ecuación, donde $C=125$ del acero galvanizado; se obtiene la tabla 3.7.3.4 de resultados comparativos:

Nro. Prueba	Caudal [m ³ /s]	hf ₁ [m]	hf ₂ [m]	hf ₁ [m]	hf ₂ [m]	Δhf ₁ [m]	Δhf ₂ [m]
		Calculado		Experimental		En valor absoluto	
1	0.0012685691	0.060452	0.253721	0.0605392	0.2537120	0.00009	0.00001
2	0.0024334513	0.202004	0.847818	0.2019648	0.8478000	0.00004	0.00002
3	0.0032393421	0.343116	1.440073	0.3431392	1.4401296	0.00002	0.00006
4	0.0041891380	0.552395	2.318426	0.5523888	2.3183248	0.00001	0.00010
5	0.0047961005	0.709708	2.978678	0.7096400	2.9787296	0.00007	0.00005

Tabla 3.7.1.1.1.1 Resultados de valores comparativos del Experimento real, usando la fórmula de Hazen-Williams, para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia

Como se observa en los resultados tabulados, la diferencia de la pérdida de carga en ambas tuberías es ciertamente aceptable.

3.7.1.1.2 DEMOSTRACIÓN USANDO LA FÓRMULA DE DARCY - WEISBACH

Los valores a comparar son las pérdidas de carga del sistema, es decir los valores sombreados de la tabla 3.7.3.1.2

Para esto se deben calcular las renuencias individuales de las tuberías, según la ecuación:

$$R_i = B_i \times L_i, \text{ donde } B \text{ es según la Formula de Darcy -Weisbach}$$

$$\text{La pérdida de carga es igual a: } hf = f \frac{8}{g \cdot \pi^2 \cdot D^5} \times L \cdot Q^2 \quad (2.76)$$

Y f se calcula mediante la ecuación de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \text{Log}_{10} \left(\frac{k}{3.7 \times D} + \frac{2.51}{\text{Re} \cdot \sqrt{f}} \right) \quad (2.75)$$

Los valores de f tabulados, así como las renuencias se observan en la tabla de abajo:

Nro. Prueba	Caudal [m ³ /s]	f_1	f_2	$B_1 - DW$	$B_2 - DW$	$R_1 - DW$	$R_2 - DW$
1	0.00106	0.030342081	0.031161284	7413.040	32081.896	37139.332	166184.223
2	0.00206	0.028472653	0.029852544	6956.310	30734.492	34851.114	159204.667
3	0.00306	0.027749123	0.029367298	6779.541	30234.910	33965.498	156616.833
4	0.00402	0.027370504	0.029118800	6687.038	29979.070	33502.061	155291.584
5	0.00501	0.027123900	0.028959081	6626.789	29814.633	33200.213	154439.797

Tabla 3.7.1.1.2.1 Valores tabulados de f y de las Renuencias Individuales del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia

Los valores tabulados de este experimento (5 pruebas experimentales según la fórmula de Darcy-Weisbach), según la metodología del libro “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica” de Ernesto García Ruiz, se observan en la tabla 3.7.3.1.2.2

Nro. Prueba	Caudal [m ³ /s]	ΔZ_1 [cm]	ΔZ_2 [cm]	hf_1 [m]	hf_2 [m]	v_1 [m/s]	v_2 [m/s]	Re 1	Re 2
1	0.00106	0.332	1.478	0.04170	0.18564	0.5213	0.9267	26219.32	34959.09
2	0.00206	1.178	5.392	0.14796	0.67724	1.0182	1.8101	51210.29	68280.38
3	0.00306	2.536	11.724	0.31852	1.47253	1.5100	2.6844	75947.00	101262.67
4	0.00402	4.294	20.070	0.53933	2.52079	1.9839	3.5270	99785.33	133047.10
5	0.00501	6.618	30.978	0.83122	3.89084	2.4731	4.3966	124388.04	165850.72

Tabla 3.7.1.1.2.2 Resultados del Experimento real para un sistema de dos Tuberías en Serie, Metodología “Manual de Practicas del Laboratorio de Hidráulica - UAJMS”, según la fórmula de Darcy-Weisbach

Donde el caudal se calcula según el método volumétrico y la pérdida de carga se obtiene según la ecuación:

$$hf = \frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} = (S - 1) \times \Delta Z \quad (3.200)^{161}$$

Donde:

S ~ peso específico relativo del líquido manométrico, adimensional

ΔZ ~ lectura del desnivel del líquido manométrico, en [m]

Los valores originales de los datos experimentales se ven en el Anexo E.

Los valores a comparar son las pérdidas de carga del sistema, es decir los valores sombreados de la tabla 3.7.3.1.2.2.

Con los valores de la tabla 3.7.3.1.2.1; se obtiene la tabla 3.7.3.1.2.3 de resultados comparativos:

Nro. Prueba	Caudal [m ³ /s]	hf ₁ [m]	hf ₂ [m]	hf ₁ [m]	hf ₂ [m]	Δhf_1 [m]	Δhf_2 [m]
		Calculado		Experimental		En valor absoluto	
1	0.0010565653	0.0414598	0.1855165	0.0416992	0.1856368	0.00024	0.00012
2	0.0020636317	0.1484161	0.6779851	0.1479568	0.6772352	0.00046	0.00075
3	0.0030604521	0.3181333	1.4669308	0.3185216	1.4725344	0.00039	0.00560
4	0.0040210702	0.5416950	2.5109105	0.5393264	2.5207920	0.00237	0.00988
5	0.0050124907	0.8341574	3.8803096	0.8312208	3.8908368	0.00294	0.01053

Tabla 3.7.1.1.2.3 Resultados de valores comparativos del Experimento real, usando la fórmula de Darcy-Weisbach, para un sistema de dos Tuberías en Serie, Elaboración propia

¹⁶¹ Fórmula de pérdida de carga experimental (hf), para una tubería orientada a un sistema de tuberías en serie, según metodología adoptada en este libro, página 117, “Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica”, Ernesto García Ruiz, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, 1997.

3.7.2 EJEMPLOS DEDUCTIVOS

En esta sección se deducirán algunas propiedades para un sistema de tuberías de cuatro tuberías en serie y de tres tuberías en paralelo, tal como se observa a continuación:

3.7.2.1 DEDUCCIÓN DE LA PÉRDIDA DE CARGA DE UN SISTEMA DE TUBERÍAS EN SERIE DE CUATRO TRAMOS IGUALES

Sea el sistema de cuatro tuberías en serie, según el esquema.

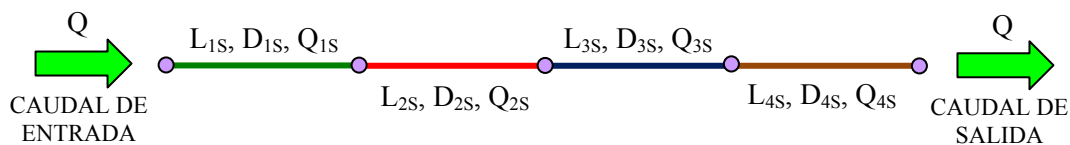


Figura 3.7.2.1 Esquema de Sistema de cuatro Tuberías en Serie, Elaboración Propia

Demostrar que las pérdidas de carga individuales en este sistema es igual a $\frac{1}{4}$ de la pérdida de carga total; si todos los tramos poseen tuberías con propiedades físicas y geométricas de igual valor cuantitativo, de acuerdo a los siguientes datos y considerando que las tuberías son de PVC.

$$L_1 = 120[\text{m}], \quad D_1 = 50.8[\text{mm}] \quad \text{y} \quad L_2 = 120[\text{m}], \quad D_2 = 50.8[\text{mm}]$$

$$L_3 = 120[\text{m}], \quad D_3 = 50.8[\text{mm}] \quad \text{y} \quad L_4 = 120[\text{m}], \quad D_4 = 50.8[\text{mm}]$$

3.7.2.1.1 DEMOSTRACIÓN

De la ecuación (2.90); $hf_s = hf_1 + hf_2 + hf_3 + \dots + hf_{N-1} + hf_N$; se tiene:

$$hf_s = \{B_1 L_1 + B_2 L_2 + B_3 L_3 + B_4 L_4\} \times Q^n$$

$$\text{Para esta deducción se utilizará la fórmula de Manning: } hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2 \quad (2.87)$$

En esta fórmula, se debe indicar que para tuberías de PVC y PE; $\eta = 0,008$

Por otro lado: $R = R_1 = \frac{4^{(10/3)} \cdot (0.008)^2}{\pi^2 \cdot (0.0508)^{(16/3)}} \times 120$, y $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4$

La fórmula de Manning puede ser escrita en el formato de la “**Fórmula resumida estándar de pérdida de energía**” como:

$$hf_s = \{R_1 + R_2 + R_3 + R_4\} \times Q^2$$

$$hf_s = 4R \times Q^2$$

Si se asigna al caudal, $Q = 1.0$ [m³/s] y a la pérdida de carga, $hf_s = 1.0$ [m], entonces la última expresión adopta la forma:

$$hf_s = 4R$$

$$1 = 4R$$

$$R = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto: $R_1 = \frac{1}{4}$ $R_2 = \frac{1}{4}$ $R_3 = \frac{1}{4}$ y $R_4 = \frac{1}{4}$

Reemplazando este valor en: $hf_s = \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right\} \times Q^2$; que es lo que se quería demostrar

Resultando $hf_1 = \frac{1}{4}$; $hf_2 = \frac{1}{4}$; $hf_3 = \frac{1}{4}$ y $hf_4 = \frac{1}{4}$; con lo que la deducción esta completa.

3.7.2.2 DEDUCCIÓN DE CAUDALES INDIVIDUALES EN UN SISTEMA DE TUBERÍAS EN PARALELO DE TRES TRAMOS IGUALES

Sea el sistema de tres tuberías en paralelo, según el esquema.

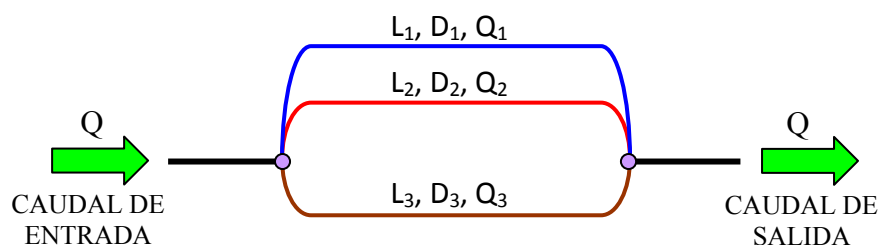


Figura 3.7.2.2 Esquema de Sistema de tres Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia

3.7.2.2.1 DEMOSTRACIÓN

Para este sistema, el factor R_T es:
$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_3 L_3}\right)^{1/n}}$$

Como las tres tuberías son iguales, entonces
$$R_T = \frac{1}{3 \times \left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{1/n}} = \frac{1}{3 \times \left(\frac{1}{BL}\right)^{1/n}} = \frac{1}{3 \times \frac{1}{(BL)^{1/n}}}$$

De acuerdo a la ecuación (3.80), $Q_i = R_T \times \frac{Q}{(B_i L_i)^{1/n}}$, se tiene que el caudal 1, Q_1 es:

$$Q_1 = R_T \times \frac{Q}{(B_1 L_1)^{1/n}} = \frac{1}{3 \times \frac{1}{(B_1 L_1)^{1/n}}} \times \frac{Q}{(B_1 L_1)^{1/n}} = \frac{1}{3} \times Q$$

$$Q_1 = \frac{1}{3} \times Q$$

Para el caudal 2, Q_2 se tiene:

$$Q_2 = R_T \times \frac{Q}{(B_2 L_2)^{1/n}} = \frac{1}{3 \times \frac{1}{(BL)^{1/n}}} \times \frac{Q}{(BL)^{1/n}} = \frac{1}{3} \times Q$$

$$Q_2 = \frac{1}{3} \times Q$$

De la misma manera para el caudal 3, Q_3 se tiene:

$$Q_3 = R_T \times \frac{Q}{(B_3 L_3)^{1/n}} = \frac{1}{3 \times \frac{1}{(BL)^{1/n}}} \times \frac{Q}{(BL)^{1/n}} = \frac{1}{3} \times Q$$

$$Q_3 = \frac{1}{3} \times Q$$

Finalmente, se debe cumplir la condición $Q = Q_p = Q_1 + Q_2 + Q_3$

$$Q = \left(\frac{1}{3} \times Q\right) + \left(\frac{1}{3} \times Q\right) + \left(\frac{1}{3} \times Q\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \times Q$$

$Q = Q$, que es lo que se quería demostrar

3.7.3 EJEMPLO DE PROBLEMA APLICADO

En la localidad de Huancanane (población aprox. 40000 habitantes), provincia Moquegua del Perú se implemento un sistema de aprovisionamiento de agua potable con tuberías PVC. En su tramo critico (cruce del río Moquegua) presenta un desnivel de 9.24[m].

La configuración resultante de tuberías, según el esquema simplificado, presenta los siguientes datos y con un coeficiente $C=140$ según la fórmula de Hazen-Williams, para todos los tramos (Sistema de tuberías PVC, con diseño de vida útil igual a 20 años):

Datos:

$$L_1 = 40[m]$$

$$D_1 = 76[mm]$$

$$L_2 = 60[m]$$

$$D_2 = 63[mm]$$

$$L_3 = 50[m]$$

$$D_3 = 76[mm]$$

$$L_4 = 45[m]$$

$$D_4 = 51[mm]$$

$$L_5 = 55[m]$$

$$D_5 = 63[mm]$$

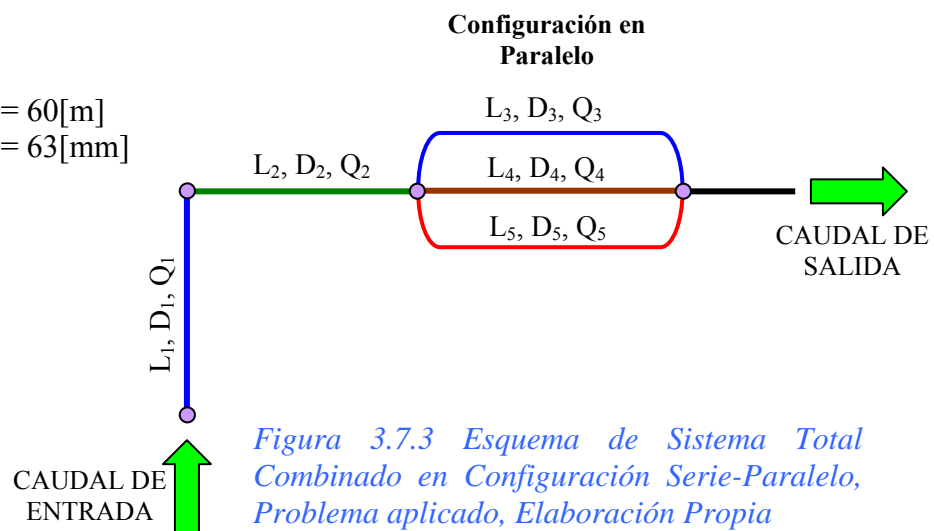


Figura 3.7.3 Esquema de Sistema Total Combinado en Configuración Serie-Paralelo, Problema aplicado, Elaboración Propia

Por el “Teorema de Afinidad”, para sistemas combinados de tuberías serie-paralelo, se tiene:

$$\frac{hf_T}{Q^n} = \sum_{i=1}^N B_i L_i + \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{B_j L_j} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n} \quad (3.102)$$

Para el Sub-sistema en serie: $\frac{hf_S}{Q^n} = \sum_{i=1}^N B_i L_i = (B_1 L_1) + (B_2 L_2)$

$$\frac{hf_S}{Q^n} = \sum_{i=1}^N B_i L_i = \left(\frac{10.64806344}{(D_1)^{4.871} (C_1)^{1.852}} \times L_1 \right) + \left(\frac{10.64806344}{(D_2)^{4.871} (C_2)^{1.852}} \times L_2 \right)$$

$$\frac{hf_S}{Q^n} = \sum_{i=1}^N B_i L_i = \left(\frac{10.64806344}{(0.076)^{4.871} (140)^{1.852}} \times 40 \right) + \left(\frac{10.64806344}{(0.063)^{4.871} (140)^{1.852}} \times 60 \right)$$

$$\frac{hf_S}{Q^n} = \sum_{i=1}^N B_i L_i = 12739.116369 + 47643.568474$$

$$\frac{hf_S}{Q^n} = \sum_{i=1}^N B_i L_i = 60382.684843$$

Para el Sub-sistema en paralelo:

$$\frac{hf_P}{Q^n} = \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{B_j L_j} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_3 L_3} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{B_4 L_4} \right)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{1}{B_5 L_5} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^n}$$

$$\frac{hf_P}{Q^n} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 50}{(0.076)^{4.871} (140)^{1.852}}} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 45}{(0.051)^{4.871} (140)^{1.852}}} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 55}{(0.063)^{4.871} (140)^{1.852}}} \right)^{\frac{1}{1.852}} \right]^n}$$

$$\frac{hf_P}{Q^n} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{15923.895461} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{99997.067483} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{43673.271101} \right)^{\frac{1}{1.852}} \right]^{1.852}}$$

$$\frac{hf_P}{Q^n} = \frac{1}{[0.005384 + 0.001996 + 0.003122]^{1.852}} = \frac{1}{0.010502^{1.852}} = 4619.3708102$$

Para el conjunto del Sistema se cumple:

$$hf_T = (R_{TS} \times Q^n) + (R_{TP} \times Q^n)$$

$$\frac{hf_T}{Q^n} = (60382.684843) + (4619.3708102) = 65002.055653$$

$$\frac{hf_T}{Q^n} = 65002.055653$$

El cociente del último resultado permite elegir la pérdida de carga o el caudal como incógnita.

En este problema, se debe superar un desnivel de 9.24 metros debido a que el cruce debe trabajar aun si una de las tuberías deja de funcionar, situación requerida por el diseño. En esta situación se elige a la pérdida de carga como dato de diseño conocido. Se redondea los 9.24[m] requeridos a 10[m] por razones de seguridad.

Entonces, se tiene que el caudal permisible es:

$$Q = \left(\frac{10}{65002.055653} \right)^{\frac{1}{1.852}} = 0.008733415 \text{ [m}^3\text{/s]} \quad \rightarrow \quad Q = 8.733415 \text{ [L/s]}$$

3.7.3.1 VERIFICACIÓN DEL PROBLEMA

Con el caudal encontrado, procedemos a verificar las pérdidas de carga.

Para el Sub-sistema en serie:

$$\frac{hf_s}{Q^n} = \sum_{i=1}^N B_i L_i = (B_1 L_1) + (B_2 L_2)$$

$$hf_s = \sum_{i=1}^N B_i L_i Q^n = (12739.116369 \times 0.008733415^{1.852}) + (47643.568474 \times 0.008733415^{1.852})$$

$$hf_s = \sum_{i=1}^N B_i L_i Q^n = 1.959802 + 7.329548$$

$$hf_s = \sum_{i=1}^N B_i L_i Q^n = 9.289350$$

$$hf_s = 9.289350$$

Para el Sub-sistema en paralelo

$$\frac{hf_p}{Q^n} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{15923.895461} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{99997.067483} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{43673.271101} \right)^{\frac{1}{1.852}} \right]^{1.852}}$$

$$\frac{hf_p}{Q^n} = \frac{1}{[0.005384 + 0.001996 + 0.003122]^{1.852}} = \frac{1}{0.010502^{1.852}}$$

$$hf_p = \frac{0.008733415^{1.852}}{[0.005384 + 0.001996 + 0.003122]^{1.852}} = \frac{0.008733415^{1.852}}{0.010502^{1.852}} = 0.71064996$$

$$hf_p = 0.71064996 \text{ [m]}$$

Para el conjunto del Sistema se cumple: $hf_T = hf_s + hf_p$

$$hf_T = (hf_s) + (hf_p)$$

$$hf_T = 9.28935004 + 0.71064996$$

$$hf_T = 10.000 \text{ [m]}, \text{ que es la perdida de carga de diseño.}$$

Con el caudal encontrado se debe verificar las condiciones en el subsistema en paralelo con el caudal permisible $Q = 8.733415 \text{ [L/s]}$

Por el teorema de Afinidad, se tiene:

$$Q_3 = R_T \times \frac{Q}{(B_3 L_3)^{\frac{1}{n}}}; \quad Q_4 = R_T \times \frac{Q}{(B_4 L_4)^{\frac{1}{n}}}; \quad Q_5 = R_T \times \frac{Q}{(B_5 L_5)^{\frac{1}{1.852}}}$$

Donde R_T es de tercer orden y es igual a:

$$R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_3 L_3} \right)^{\left(\frac{1}{1.852} \right)} + \left(\frac{1}{B_4 L_4} \right)^{\left(\frac{1}{1.852} \right)} + \left(\frac{1}{B_5 L_5} \right)^{\left(\frac{1}{1.852} \right)} \right]}$$

$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 50}{(0.076)^{4.871} (140)^{1.852}}} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 45}{(0.051)^{4.871} (140)^{1.852}}} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 55}{(0.063)^{4.871} (140)^{1.852}}} \right)^{\frac{1}{1.852}}}$$

$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{15923.895461} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{99997.067483} \right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{43673.271101} \right)^{\frac{1}{1.852}}}$$

$$R_T = \frac{1}{0.005384 + 0.001996 + 0.003122} = \frac{1}{0.0105023} = 95.2174241$$

Reemplazando este valor en Q_3 , Q_4 y Q_5 , tenemos:

$$Q_3 = 95.2174241 \times \frac{0.008733415}{(15923.895461)^{\frac{1}{1.850}}} = 0.0044768879$$

$$Q_4 = 95.2174241 \times \frac{0.008733415}{(99997.067483)^{\frac{1}{1.850}}} = 0.001660058$$

$$Q_5 = 95.2174241 \times \frac{0.008733415}{(43673.271101)^{\frac{1}{1.850}}} = 0.002596479$$

Sumando los caudales Q_3 , Q_4 y Q_5 , se tiene:

$$Q_T = Q_3 + Q_4 + Q_5 = 0.004478879 + 0.001660058 + 0.002596479 = 0.0087334146$$

$$Q_T = 0.0087334146 \text{ [m}^3\text{/s]}, \text{ que es el caudal permisible.}$$

Verificando con la pérdida de carga para estos sub-caudales, se obtiene:

$$hf_3 = B_3 L_3 Q_3^n ; \quad hf_4 = B_4 L_4 Q_4^n ; \quad hf_5 = B_5 L_5 Q_5^n$$

$$hf_3 = B_3 L_3 Q_3^n = 15923.895461 \times 0.0044768879^{1.852} = 0.71064996$$

$$hf_3 = 0.71064996 \text{ [m]}$$

$$hf_4 = B_4 L_4 Q_4^n = 99997.067483 \times 0.001660058^{1.852} = 0.71064996$$

$$hf_4 = 0.71064996 \text{ [m]}$$

$$hf_5 = B_5 L_5 Q_5^n = 43673.271101 \times 0.002596479^{1.852} = 0.71064996$$

$$hf_5 = 0.71064996 \text{ [m]}$$

Las pérdidas de carga son iguales en el Sub-sistema en paralelo, es decir: $hf_3 = hf_4 = hf_5$

Por otro lado se debe cumplir el Postulado general de control para la Renuencia Total en un sistema de Tuberías en Paralelo.

Por un lado se tiene la Renuencia Total del sistema en paralelo:

$$R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_3 L_3} \right)^{\left(\frac{1}{1.852} \right)} + \left(\frac{1}{B_4 L_4} \right)^{\left(\frac{1}{1.852} \right)} + \left(\frac{1}{B_5 L_5} \right)^{\left(\frac{1}{1.852} \right)} \right]}$$

$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 50}{(0.076)^{4.871} (140)^{1.852}}}\right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 45}{(0.051)^{4.871} (140)^{1.852}}}\right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{\frac{10.64806344 \times 55}{(0.063)^{4.871} (140)^{1.852}}}\right)^{\frac{1}{1.852}}}$$

$$R_T = \frac{1}{\left(\frac{1}{15923.895461}\right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{99997.067483}\right)^{\frac{1}{1.852}} + \left(\frac{1}{43673.271101}\right)^{\frac{1}{1.852}}}$$

$$R_T = \frac{1}{0.005384 + 0.001996 + 0.003122} = \frac{1}{0.0105023} = 95.2174241$$

$$R_T = 95.2174241$$

Por otro lado se tiene la Menor Renuencia Individual del sistema en paralelo:

$$R_3 = B_3 \times L_3$$

$$R_3 = \left(\frac{10.64806344}{(0.076)^{4.871} (140)^{1.852}} \times 50 \right)$$

$$R_3 = 15923.895461$$

Por lo tanto $R_T < R_3$, es decir $95.2174241 < 15923.895461$, que SI es verdadero

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

LIBROS FÍSICOS:

ERNESTO RUIZ GARCÍA, “Manual del Laboratorio de Hidráulica”, Editorial Offsset Universitaria “UAJMS”, Noviembre de 1997.

JUAN G. SALDARRIAGA, “Hidráulica de Tuberías”, Editorial MacGraw Hill, 1998.

VÍCTOR HUGO SALMÓN CARRILLO, “Introducción a la Hidráulica”, Imprenta Ramírez, 2003, I.B.S.N. -99905-0-338-9

CALLOGERO DEL PIERO, “Estadística Practica con elementos Caóticos”, Editorial “Bona Italia”, 2004

CALLOGERO DEL PIERO, “Hidráulica de Tuberías” – Visión Matemática, Editorial “Bona Italia”, 2006

VICTOR L. STREETER, “Mecánica de los Fluidos”, Libros MacGraw Hill, 1970.

GILBERTO SOTELO AVILA, “Hidráulica General” – Volumen I - Fundamentos, Editorial “LIMUSA”, 1997.

MANUEL A. OCHOA CASTILLO, “Apuntes de Álgebra”, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2002.

MANUEL A. OCHOA CASTILLO, “Apuntes de Matemática I, II, III, IV”, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2002-2003.

JUAN CARLOS LOZA, “Apuntes de Hidráulica I, II”, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2004-2005.

ALONSO FINN, “Física”, Tomo II, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

LAROUSSE S.A., Sociedad Comercial y Editorial Santiago Ltda., Enciclopedia Ilustrada LAROUSSE, Tomo IV, 1998.

LAROUSSE S.A., Sociedad Comercial y Editorial Santiago Ltda., Enciclopedia Ilustrada LAROUSSE, Tomo VI, 1998.

LIBROS ELECTRÓNICOS:

ARTURO ROCHA FELICES, “Hidráulica de Tuberías y Canales”, libro electrónico en formato PDF de 515 páginas, creado en Acrobat Distiller 5.00 (entornoWindows), Mayo de 2003.

RANALD V. GILES, “Mecánica de los Fluidos e Hidráulica”, Libros de la serie Schaum, Mc Graw Hill, libro electrónico en formato PDF de 281 páginas, creado en Acrobat Distiller 6.00 (entornoWindows), Noviembre de 2005.

VICTOR L. STREETER, “Mecánica de los Fluidos”, Libros MacGraw Hill, libro electrónico en formato PDF de 373 páginas, creado en Acrobat Distiller 5.00 (entornoWindows), Abril de 2007.

ANEXOS

ANEXO A

ÁLGEBRA CLÁSICO Y ÁLGEBRA MATRICIAL

A.1 DESCRIPCIÓN DEL ALGEBRA CLASICO Y ALGEBRA MATRICIAL

La palabra árabe *al-ýabr* que significa “**reducción**”, es el origen de la palabra *álgebra*⁴⁰⁰

El Álgebra es una rama de la matemática en la que se usan letras para representar relaciones aritméticas. Al igual que en la aritmética, las operaciones fundamentales del álgebra son: adición, sustracción, multiplicación, división y cálculo de raíces.

La aritmética no puede generalizar las relaciones matemáticas, como el teorema de Pitágoras: en un triángulo rectángulo el área del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados, cuyos lados son los catetos. La aritmética sólo da casos particulares de esta relación (por ejemplo, 3, 4 y 5, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$). El álgebra, por el contrario, puede dar una generalización que cumple las condiciones del teorema: $a^2 + b^2 = c^2$.

El álgebra clásico, que se ocupa de resolver ecuaciones, utiliza símbolos y operaciones aritméticas para determinar cómo usar dichos símbolos⁴⁰¹. El álgebra moderno centra su atención en las estructuras matemáticas. Los matemáticos consideran el álgebra como un conjunto de objetos con reglas que los relacionan. Así, en un concepto general, se dice que en su forma más pura, el álgebra es el idioma de la matemática⁴⁰².

A.1.1 ÁLGEBRA MATRICIAL

El algebra matricial proporciona una herramienta adecuada para el análisis de sistemas lineales, ya que es relativamente fácil la solución de tales sistemas en una forma concisa,

⁴⁰⁰ Definición, Enciclopedia Ilustrada LAROUSSE, Tomo 4, página 362, Larousse S.A., Sociedad Comercial y Editorial Santiago Ltda., 1998.

⁴⁰¹ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴⁰² Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

para luego efectuar las operaciones matriciales necesarias por medio de un ordenador o de procedimientos definidos.

A.1.1.1 DEFINICIONES BÁSICAS Y TIPOS DE MATRICES

A.1.1.1.1 MATRIZ

Una matriz es un arreglo rectangular de números, variables o funciones. Estos números, variables o funciones se denominan elementos de la matriz⁴⁰³, por ejemplo:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0.4 & 8 \\ 5 & -32 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad M_3 = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}; \quad M_5 = \begin{bmatrix} e^x & 3x \\ e^{2x} & x^2 \end{bmatrix}; \quad M_6 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{7} \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

Las matrices usualmente se encierran entre corchetes. Las matrices, en notación moderna, están ordenadas en filas y columnas. Por ejemplo: La matriz M_1 tiene 2 filas (líneas horizontales), y 3 columnas (líneas verticales). La matriz M_2 se compone de 1 sola columna y suele también denominarse vector columna. La matriz M_3 se compone de 1 sola fila y suele también denominarse vector fila. Las matrices M_4 y M_5 son matrices cuadradas, es decir tienen tantas filas como columnas; 2 en este caso.

En general, se define una matriz como un arreglo rectangular de números organizados en “ m ” filas y “ n ” columnas⁴⁰⁴, la cual se puede ver en la ecuación (G.1):

$$A = (a_{jk}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{G.1})$$

⁴⁰³ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴⁰⁴ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

Suele adoptarse la variable “ m ” para indicar el número de filas, y la variable “ n ” para indicar el número de columnas.

Una aplicación de las matrices es la representación de sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas. Cada fila de la matriz representa una ecuación, siendo los valores de una fila, los coeficientes de las variables de la ecuación, en determinado orden⁴⁰⁵:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 2x + 2y - 7z = -6 \\ 4x - 3y + 2z = -5 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (\text{G.2})$$

Donde x , y , z son las variables que se deben determinar. Un método para resolver tales ecuaciones es la “técnica de eliminación”. La solución de las ecuaciones (G.2) claramente depende de los coeficientes de x , y , z en el lado izquierdo de las ecuaciones, como también de las constantes a la derecha. Se puede escribir estos dos conjuntos de números como matrices, denotados por A y B , respectivamente, como en la ecuación (G.3):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (\text{G.3})$$

En este caso se denominan matrices a A y B , siendo A una matriz cuadrada de 3×3 y B una matriz columna de 3×1 . Los números restantes en (G.2), esto es, las incógnitas x , y , z se pueden escribir como una matriz columna usando la letra X para denotar esta matriz de incógnitas:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (\text{G.4})$$

⁴⁰⁵ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

A.1.1.1.2 MATRIZ FILA

Es una matriz formada por elementos organizados en una sola fila⁴⁰⁶. A la matriz fila también se le denominar vector fila⁴⁰⁷. Por ejemplo, una matriz fila $1 \times n$ se escribe:

$$M = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n]$$

Aquí se usa un solo subíndice para denotar un elemento ya que el subíndice de fila siempre se sobreentiende que es igual a 1, esto es: $a_1 = a_{11}$ $a_2 = a_{12}$ $a_3 = a_{13}$ *etc.*

A.1.1.1.3 MATRIZ COLUMNA

Es una matriz formada por elementos organizados en una sola columna⁴⁰⁸. A las matrices columna también se les suele denominar vector columna⁴⁰⁹. La matriz B denotada en (G.3) es una matriz columna, así como la matriz X denotada en (G.4). Por ejemplo, una matriz columna $m \times 1$ se escribe como:

$$M = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Aquí se usa un solo subíndice para denotar un elemento ya que el subíndice de columna siempre se sobreentiende que es igual a 1, esto es: $a_1 = a_{11}$ $a_2 = a_{21}$ $a_3 = a_{31}$ *etc.*

⁴⁰⁶ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴⁰⁷ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴⁰⁸ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴⁰⁹ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

A.1.1.1.4 MATRIZ CUADRADA

Cuando el número de filas es igual al número de columnas se tiene una matriz cuadrada. Una matriz cuadrada⁴¹⁰ de $n \times n$, sería:

$$A = (a_{jk}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A.1.1.1.5 MATRIZ DIAGONAL

Cuando todos los elementos de una matriz cuadrada son ceros, excepto los elementos de la diagonal principal (que va de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha), la matriz se denomina matriz diagonal⁴¹¹, como en el ejemplo de abajo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Esta matriz posee propiedades interesantes al calcular su determinante.

A.1.1.1.6 MATRIZ UNITARIA O MATRIZ IDENTIDAD

La matriz unitaria o matriz identidad, es una matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal iguales a 1⁴¹². La matriz identidad es el equivalente de la unidad en los

⁴¹⁰ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴¹¹ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴¹² Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

números naturales en su concepción más pura y matemática, y se comporta como la unidad dentro de las operaciones matriciales⁴¹³:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A.1.1.1.7 MATRIZ NULA

Si todos los elementos de una matriz son ceros, es decir $a_{ij} = 0$; la matriz se denomina matriz nula⁴¹⁴. La matriz nula es el equivalente del cero en los números naturales en su concepción más pura y matemática, y se comporta como el cero dentro de las operaciones matriciales.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

A.1.1.1.8 MATRIZ SIMÉTRICA

Una matriz cuadrada es simétrica⁴¹⁵ si $a_{jk} = a_{kj}$; Esta matriz posee propiedades interesantes al calcular su transpuesta. Una matriz simétrica posee la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

⁴¹³ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴¹⁴ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴¹⁵ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

A.1.1.2 OPERACIONES CON MATRICES

A.1.1.2.1 IGUALDAD DE MATRICES

Se dice que las matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden, tamaño y cada uno de sus elementos son iguales entre sí⁴¹⁶, esto es $a_{jk} = b_{jk}$. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{Entonces } A = B.$$

A.1.1.2.2 ADICION Y SUSTRACI3N DE MATRICES

Dos matrices pueden sumarse o restarse entre sí cuando son del mismo orden y tamaño. La matriz resultante se obtiene sumando o bien restando elemento por elemento⁴¹⁷. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}; \quad A - B = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

A.1.1.2.3 MULTIPLICACI3N POR UN ESCALAR

Cuando una matriz se multiplica por un escalar, cada uno de sus elementos se multiplica por el escalar. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}; \quad k = -6$$
$$kA = \begin{bmatrix} -24 & -6 \\ -36 & 12 \end{bmatrix}$$

⁴¹⁶ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴¹⁷ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

A.1.1.2.4 MULTIPLICACIÓN MATRICIAL

Dos matrices A y B se pueden multiplicar entre si solo si son conformables⁴¹⁸. Esta condición se satisface si el número de columnas en la matriz A es igual al número de filas de la matriz B ⁴¹⁹. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

Entonces AB puede determinarse ya que A tiene 2 columnas y B tiene 2 filas. Sin embargo, se debe notar que BA no es posible. Se ve abajo que la multiplicación de la matriz A de orden $(m \times n)$ por la matriz B $(n \times q)$ da como resultado una matriz C de orden $(m \times q)$ ⁴²⁰.

$$\begin{matrix} A & B & = & C \\ (m \times n) & (n \times q) & & (m \times q) \end{matrix} \quad (G.5)$$

Los elementos de la matriz C se encuentran usando los elementos a_{ij} de la matriz A y los elementos b_{ij} de la matriz B como sigue:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{k=n} (a_{ik} \cdot b_{kj}) \quad (G.6)$$

La metodología de la fórmula (G.6) puede explicarse con unos pocos ejemplos. Si se considera:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

⁴¹⁸ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴¹⁹ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴²⁰ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

Por inspección, el producto $C = AB$ es posible, ya que las matrices son conformables⁴²¹, esto es, la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B tiene 3 filas. Según la ecuación (G.5), la multiplicación dará la matriz C con 2 filas y 1 columna. Los resultados se obtienen como sigue:

c_{11} : Multiplicar los elementos en la primera fila de la matriz A por los elementos en la primera columna de la matriz B , y luego sumar los resultados; esto es:

$$c_{11} = c_1 = (2 \times 2) + (4 \times 6) + (3 \times 7) = 49$$

c_{21} : Multiplicar los elementos en la segunda fila de la matriz A por los elementos en la primera columna de la matriz B , y luego sumar los resultados; esto es:

$$c_{21} = c_2 = (-1 \times 2) + (6 \times 6) + (1 \times 7) = 41$$

Este esquema de multiplicación sigue la aplicación de la ecuación (G.6). Cabe notar que BA no existe, ya que escritas de esta manera, las matrices no son conformables.

Las siguientes reglas son aplicables a la multiplicación de matrices.

- a. A menos que las matrices sean diagonales, el producto de dos matrices en general, no es conmutativo:

$$AB \neq BA \quad (\text{G.7})$$

- b. La ley distributiva es válida:

$$A(B + C) = AB + AC \quad (\text{G.8})$$

- c. La ley asociativa es válida:

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{G.9})$$

⁴²¹ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, "Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal", Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias "UAJMS", 2000.

A.1.1.2.5 MATRIZ TRANSPUESTA

Una matriz puede ser transpuesta intercambiando sus filas por sus columnas⁴²². Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

Entonces,

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad B^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Se debe notar que AB no es conformable, por lo que el producto matricial no existe en este caso (A tiene 3 columnas y B tiene 1 fila).

La multiplicación AB^T es posible: las matrices son conformables (A tiene 3 columnas y B^T tiene 3 filas). Las siguientes propiedades para matrices transpuestas son validas:

$$\bullet (A + B)^T = A^T + B^T \quad (\text{G.10})$$

$$\bullet (kA)^T = kA^T \quad (\text{G.11})$$

$$\bullet (AB)^T = B^T A^T \quad (\text{G.12})$$

Esta última identidad se ilustrará con un ejemplo. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

⁴²² Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

Entonces, de acuerdo con la ecuación (G.12),

$$\left\{ \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right\}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28 & 28 \\ -2 & -12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix}$$

A.1.1.2.6 SUBDIVISION DE UNA MATRIZ

Una matriz puede descomponerse en sub-matrices por subdivisión⁴²³. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Aquí, las sub-matrices son:

$$A_{11} = [a_{11}];$$

$$A_{12} = [a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}]$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix};$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Las reglas del algebra matricial se aplican a las matrices subdivididas siempre que la subdivisión sea conformable.

Por ejemplo, las sub-matrices correspondientes de A y B pueden sumarse o restarse, siempre que tengan un número igual de filas y columnas.

⁴²³ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

Igualmente, la multiplicación matricial es posible si el número respectivo de columnas y filas de A y B , y de sus sub-matrices es igual. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Aquí, el producto AB existe, ya que el número de columnas de A es igual al número de filas de B . Igualmente, las matrices subdivididas son conformables para la multiplicación, ya que A está subdividida en 2 columnas y B está subdividida en 2 filas, esto es:

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

La multiplicación de las matrices resulta ser:

$$A_{11}B_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{12}B_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{11} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A_{22}B_{21} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 & 32 \end{bmatrix}$$

Así, entonces;

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 56 & 32 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -39 & -18 \\ 68 & 50 \end{bmatrix}$$

A.1.1.3 DETERMINANTES

En el caso de que A sea una matriz cuadrada se puede asociar con A un número o determinante $n \times n$ o de orden " n " de A el cual se denota por $\det(A)$ ⁴²⁴.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 2 & -7 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Entonces $\det(A) = 57$; y $\det(B) = 7$.

Se debe distinguir entre la matriz cuadrada y su determinante, la primera es un arreglo de números y el último es un número obtenido de la primera⁴²⁵.

Un determinante suele denotarse entre barras verticales. Por ejemplo, un determinante de orden n :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{G.20})$$

La evaluación de este determinante conduce a un valor numérico único que puede obtenerse aplicando el desarrollo de Laplace⁴²⁶, el mismo que hace uso de los menores como de los cofactores del determinante.

⁴²⁴ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, "Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal", Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias "UAJMS", 2000.

⁴²⁵ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, "Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal", Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias "UAJMS", 2000.

⁴²⁶ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, "Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal", Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias "UAJMS", 2000.

A.1.1.3.1 MENORES Y COFACTORES

El menor⁴²⁷ resultante se obtiene de cancelar la fila j -ésima y la columna k -ésima en que esta contenido el elemento (a_{jk}) . Si el menor se multiplica por $(-1)^{j+k}$, el resultado se llama cofactor⁴²⁸ de (a_{jk}) y se denota por:

$$|C_{jk}| = (-1)^{j+k} \times |M_{jk}| \quad (\text{G.21})$$

Cada elemento (a_{jk}) de un determinante de orden n tiene un menor (M_{jk}) que es un determinante de orden $(n-1)$. Por ejemplo, si se considera el determinante de tercer orden:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Los cofactores para los elementos en la primera fila son:

$$|C_{11}| = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|C_{12}| = (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|C_{13}| = (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La expansión de Laplace⁴²⁹ para un determinante de orden n , ecuación (G.20), establece que el valor numérico del determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna y sus respectivos cofactores, esto es:

⁴²⁷ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴²⁸ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

⁴²⁹ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

$$D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + a_{j3}C_{j3} + \dots + a_{jn}C_{jn} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + a_{3k}C_{3k} + \dots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (\text{G.22})$$

Se observa que debido a los cofactores el número D se define en términos de n determinantes (cofactores), cada uno de orden $(n-1)$. Cada uno de estos determinantes puede calcularse mediante la misma fórmula, según la cual se deben $(n-1)$ determinantes de orden $(n-2)$, etc. El proceso de cálculo continúa hasta que los determinantes por calcularse quedan reducidos al segundo orden, en donde los cofactores de los elementos son simples elementos de $|D|$. Por ejemplo, el determinante de segundo orden:

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Se puede evaluar $|D|$ según la fila superior de elementos, lo que arroja:

$$D = [3 \times (-1)^{1+1}(2)] + [5 \times (-1)^{1+2}(-1)] = 11$$

O, por ejemplo, según la segunda columna de elementos:

$$D = [5 \times (-1)^{1+2}(-1)] + [2 \times (-1)^{2+2}(3)] = 11$$

En vez de utilizar las ecuaciones (G.22), es más fácil evaluar el determinante de segundo orden multiplicando los elementos arriba a la izquierda y abajo a la derecha de la diagonal principal y restar de ese resultado el producto de los elementos arriba a la derecha y abajo a la izquierda de la diagonal secundaria, esto es de acuerdo con el recorrido de las flechas, en el esquema siguiente⁴³⁰:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})$$

⁴³⁰ A este esquema se le conoce como regla de Sarrus para obtener el determinante de segundo orden. Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos, "Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal", Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias "UAJMS", 2000.

O en el ejemplo numérico: $|D| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (3 \times 2) - (5 \times -1) = 11$

Observando ahora el determinante de tercer orden:

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{G.23})$$

Mediante la expansión de Laplace o las ecuaciones (G.22), se puede calcular $|D|$ con el uso de los elementos a lo largo de la fila superior, lo que arroja:

$$D = \left[1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right] + \left[3 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right] + \left[-1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right]$$

$$D = [1(4 - 0)] - [3(8 + 6)] - [1(0 + 2)] = -40$$

Es posible calcular $|D|$ con el uso de los elementos a lo largo de la primera columna:

$$D = \left[1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right] + \left[4 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right] + \left[-1 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right]$$

$$D = [1(4 - 0)] - [4(6 - 0)] - [1(18 + 2)] = -40$$

El esquema para evaluar los determinantes de tercer orden se pueden conseguir siguiendo la regla de Sarrus⁴³¹. El esquema a seguir es el siguiente:

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{G.24})$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

⁴³¹ Regla de Sarrus para obtener el determinante de tercer orden. Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

$$|D| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

En este esquema se repiten las primeras dos columnas del determinante (G.24) como se muestra. Luego se forman los productos indicados siguiendo las flechas en el esquema usando signos más para las flechas que apuntan a la derecha y signos menos para las flechas que apuntan a la izquierda y se suman algebraicamente los resultados⁴³².

El cálculo de determinantes a través del desarrollo, usando o no la regla de Sarrus es muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales, como se vera a continuación:

A.1.1.3.1 DETERMINANTE DE LA MATRIZ DIAGONAL

El determinante de una matriz diagonal siguiendo la regla de Sarrus (en caso de determinantes de segundo y tercer orden), o el desarrollo de Laplace, posee una propiedad interesante:

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (0 \cdot 0) = (a_{11} \cdot a_{22})$$

$$|D| = (a_{11} \cdot a_{22})$$

Para un determinante de tercer orden, según el desarrollo de Laplace:

$$|D| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|D| = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + a_{j3}C_{j3}; \quad \text{en la primera fila:}$$

$$|D| = \left[a_{11} \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} \right] + \left[0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} \right] + \left[0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right]$$

⁴³² Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

$$|D| = a_{11} \times (a_{22} \cdot a_{33}) - 0 \times (0 - 0) + 0 \times (0 - 0)$$

$$|D| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

La regla de Sarrus da un resultado similar, por lo que el determinante de una matriz diagonal⁴³³ de orden “ $n \times n$ ” obedece la siguiente propiedad:

$$|D| = \prod_{j=1}^n a_{jj} \quad (\text{G.15})$$

A.1.1.3.2 SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES USANDO DETERMINANTES

Si se considere el sistema lineal de ecuaciones con dos incógnitas x, y dado por:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} \cdot x) + (a_{12} \cdot y) &= b_1 \\ (a_{21} \cdot x) + (a_{22} \cdot y) &= b_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.25})$$

Resolviendo para x, y por el método de eliminación se tiene:

$$x = \frac{(b_1 \cdot a_{22}) - (b_2 \cdot a_{12})}{(a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})}; \quad y = \frac{(a_{11} \cdot b_2) - (a_{21} \cdot b_1)}{(a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12})} \quad (\text{G.26})$$

En un esfuerzo de escribir éstas en una forma que se recuerde fácilmente se nota que los denominadores en (G.26) son los mismos y pueden obtenerse escribiendo los cuatro coeficientes de x, y de las ecuaciones (G.25) en una forma llamada un determinante de 2×2 o de segundo orden dado por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{21} \cdot a_{12}) \quad (\text{G.27})$$

⁴³³ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

Donde se multiplica los números del lado superior izquierdo e inferior derecho y luego sustraemos el producto de los números del lado superior derecho e inferior izquierdo como indican las flechas.

Usando el mismo procedimiento para los numeradores y denominadores en (G.6), la solución requerida se puede entonces escribir como:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}} \quad (\text{G.28})$$

Esto se puede recordar fácilmente si notamos las siguientes reglas llamadas reglas de Cramer⁴³⁴.

A.1.1.3.3 REGLA DE CRAMER

Se resumen de la siguiente manera

- (i) Los denominadores iguales en (G.28) se escriben como en (G.27) lo cual se llama el determinante de los coeficientes de x, y en las ecuaciones (G.25).
- (ii) El numerador para x en (G.28) se obtiene reemplazando los elementos en la primera columna del denominador por los elementos de la matriz columna B, del lado derecho de las ecuaciones (G.25) y dejando inalteradas los elementos en la segunda columna.
- (iii) El numerador para y en (G.28) se obtiene reemplazando los elementos en la segunda columna del denominador por los elementos de la matriz columna B, del lado derecho de las ecuaciones (G.25) y dejando inalteradas las entradas en la primera columna.

Ejemplo 1: Para resolver:
$$\left. \begin{array}{l} 3x - 4y = 30 \\ 5x + 7y = -32 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -32 \end{bmatrix}$$

⁴³⁴ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

Se escribe

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 30 & -4 \\ -32 & 7 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}} = \frac{(30 \times 7) - (-32 \times -4)}{(3 \times 7) - (5 \times -4)}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 30 \\ 5 & -32 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}} = \frac{(3 \times -32) - (5 \times 30)}{(3 \times 7) - (5 \times -4)}$$

$$\text{Esto es: } x = \frac{82}{41} = 2; \quad y = \frac{-246}{41} = -6$$

Lo cual se puede verificar por sustitución. En sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, se observan las siguientes particularidades. Por ejemplo:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} \cdot x) + (a_{12} \cdot y) + (a_{13} \cdot z) &= b_1 \\ (a_{21} \cdot x) + (a_{22} \cdot y) + (a_{23} \cdot z) &= b_2 \\ (a_{31} \cdot x) + (a_{32} \cdot y) + (a_{33} \cdot z) &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{G.30})$$

Aplicando la regla de Cramer⁴³⁵, se tiene:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}{\Delta}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}}{\Delta}; \quad z = \frac{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}}{\Delta} \quad (\text{G.31})$$

Donde el determinante de los coeficientes en (G.30) está dado por:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{G.32})$$

⁴³⁵ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

Ejemplo 2:

$$\text{Para resolver: } \left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 2x + 1y - 1z = -6 \\ 4x - 3y + 2z = -5 \end{array} \right\}$$

Usando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 7 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \end{bmatrix}}{\Delta}; \quad y = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}}{\Delta}; \quad z = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -6 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}}{\Delta}$$

$$\text{Donde: } \Delta = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Evaluando estos determinantes se tiene: $x = \frac{74}{-37} = -2$; $y = \frac{-37}{-37} = 1$; $z = \frac{-111}{-37} = 3$

A.1.1.4 INVERSA DE UNA MATRIZ

La inversa⁴³⁶ de una matriz A es otra matriz del mismo orden y se escribe simbólicamente como A^{-1} . La inversa de una matriz tiene la siguiente propiedad:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Donde I es la matriz identidad.

Si se considera el siguiente conjunto de 3 ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11} \cdot x_1) + (a_{12} \cdot x_2) + (a_{13} \cdot x_3) = b_1 \\ (a_{21} \cdot x_1) + (a_{22} \cdot x_2) + (a_{23} \cdot x_3) = b_2 \\ (a_{31} \cdot x_1) + (a_{32} \cdot x_2) + (a_{33} \cdot x_3) = b_3 \end{array} \right\} \quad (\text{G.40})$$

⁴³⁶ Detalles matemáticos sobre el Álgebra, conceptos y teoría, “Apuntes de Lógica y Álgebra Lineal”, Manuel Alfredo Ochoa, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2000.

Que puede escribirse en formato matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{G.41})$$

O en formato matricial reducido: $Ax = B$ (G.42)

Se puede pensar que una solución para “ x ” se obtendría dividiendo B entre A . Sin embargo, la división no es posible en el algebra matricial. En vez de esto, se multiplica por la inversa de la matriz. Entonces se puede multiplicar ambos lados de la ecuación (G.42) por A^{-1} , y se obtiene: $A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot B$

Como $A^{-1} \cdot Ax = Ix = x$, resulta: $x = A^{-1} \cdot B$ (G.43)

Si A^{-1} puede obtenerse, es posible una solución para “ x ”.

Para cálculos manuales, el método usado para formular A^{-1} puede desarrollarse con el uso de la regla de Cramer. El desarrollo del método no se expondrá aquí, solo se mostraran los resultados. Respecto a esto, los elementos en las matrices de la ecuación (G.43) pueden escribirse como:

$$x = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (\text{G.44})$$

En la ecuación (G.44); $|A|$ es una evaluación del determinante de los coeficientes de A , que se obtiene mediante la expansión de Laplace.

La matriz cuadrada que contiene los cofactores se denomina *matriz adjunta*. Por comparación se puede ver que la matriz inversa A^{-1} se obtiene de A reemplazando primero

cada elemento a_{jk} por su cofactor $|C_{jk}|$ y luego transponiendo la matriz resultante (matriz adjunta), y finalmente multiplicando la matriz adjunta por el inverso del determinante $1/|A|$, según la expresión:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

De acuerdo con todo lo expuesto hasta aquí, está claro que los cálculos numéricos son muy laboriosos para grandes conjuntos de ecuaciones. Por esta razón se usan ordenadores para determinar las inversas de matrices

A.1.1.5 MÉTODO DE GAUSS PARA RESOLVER ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Cuando se tiene que resolver muchas ecuaciones lineales simultáneas, puede usarse el método de eliminación de Gauss, debido a su eficiencia numérica.

La aplicación de este método requiere despejar de un conjunto de n ecuaciones, una incógnita, podría ser x_1 , en términos de las otras incógnitas x_2, x_3, \dots, x_n . Si se sustituye la así llamada ecuación pivote en las ecuaciones restantes se obtiene un conjunto de $(n-1)$ ecuaciones con $(n-1)$ incógnitas.

Si se repite el proceso, esto es, despejando x_2 en términos de las $(n-2)$ incógnitas restantes x_3, x_4, \dots, x_n se obtiene la segunda ecuación pivote. Esta ecuación se sustituye entonces en las otras ecuaciones, lo que deja un conjunto de $(n-3)$ ecuaciones con $(n-3)$ incógnitas.

El proceso se repite hasta que queda una ecuación pivote con una sola incógnita, que se resuelve directamente. Las otras incógnitas se resuelven por sustitución hacia atrás en las otras ecuaciones pivote. Para mejorar la exactitud de la solución, al desarrollar cada ecuación pivote, se debe seleccionar la ecuación del conjunto que tenga el coeficiente numérico más grande para la incógnita que se trata de eliminar.

Este proceso se ilustrará a continuación por medio de un ejemplo:

$$-2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2 \quad (\text{G.45})$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \quad (\text{G.46})$$

$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \quad (\text{G.47})$$

Se comienza por eliminar x_1 . El coeficiente más grande de x_1 está en la ecuación (G.47); por tanto a esta se considera la ecuación pivote. Despejando x_1 , se obtiene:

$$x_1 = 1 + 1.25x_2 - 0.75x_3 \quad (\text{G.48})$$

Se sustituye este valor en las ecuaciones (G.45) y (G.46), y luego de simplificar resulta en:

$$2.75x_2 + 1.75x_3 = 2 \quad (\text{G.49})$$

$$1.50x_2 + 0.50x_3 = 0 \quad (\text{G.50})$$

A continuación se elimina x_2 . Se elige la ecuación (G.49) como ecuación pivote, debido a que su coeficiente en x_2 tiene el valor más grande, obteniéndose:

$$x_2 = 0.727 - 0.636x_3 \quad (\text{G.51})$$

Se sustituye la ecuación (G.51) en la ecuación (G.50), y simplificando se obtiene la ecuación pivote final, de la que se despeja a x_3 :

$$x_3 = 0.75$$

Se sustituye el valor x_3 en la ecuación (G.51), obteniéndose el valor de x_2 :

$$x_2 = 0.25$$

Finalmente, de la ecuación pivote, se obtiene el valor de x_1 :

$$x_1 = 0.75$$

El método numérico de Gauss fue modificado por Jordán, conociéndose como método de Gauss-Jordán y es el que usualmente se implementa en ordenadores.

ANEXO B

PRINCIPIO DE BERNOULLI

Según el enunciado del principio de conservación de la energía, esta no puede ser creada ni destruida en un sistema dado, sino solo puede ser transformada de un tipo de energía a otro.

La creación de energía en procesos nucleares tales como la fisión nuclear libera la energía contenida en determinadas cantidades de masa cual si esta estuviera empaquetada en quantos de energía. Este proceso libera energía a partir de masas con valores determinados y que se encuentran en un sistema de referencia inercial. En Hidráulica no se considera esta situación.

Al analizar el problema del flujo en conductos, se consideran 3 tipos de energía:

Si se toma un elemento de un líquido con determinado volumen y con un peso igual a W , y que fluye por un conducto, como el de la figura de abajo, se nota que el fluido se encuentra a una elevación z con respecto a un nivel de referencia, y que además el fluido posee una velocidad v y una presión P .

El elemento del fluido tiene las siguientes formas de energía:

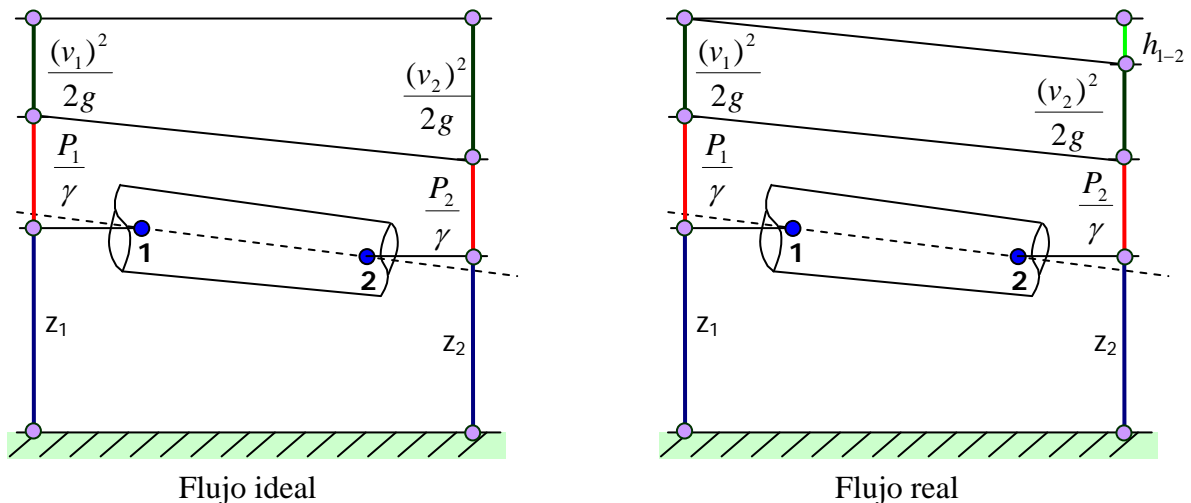


Figura B.1 Circulación esquemática de Flujo: Ideal y Real, Elaboración Propia

En la gráfica se observan los tres tipos de energía.

ENERGÍA POTENCIAL

Debido a la elevación con respecto al nivel de referencia. Viene dado por la expresión:

$$E_p = z \cdot W$$

Donde:

z ~ Altura del elemento de fluido sobre el plano de referencia

W ~ Peso del elemento de fluido.

ENERGÍA CINÉTICA

Debido a la velocidad que posee el elemento de fluido. Se expresa por:

$$E_c = W \frac{v^2}{2g}$$

Donde:

v ~ velocidad del elemento de fluido.

W ~ Peso del elemento de fluido.

g ~ Aceleración de la gravedad terrestre.

ENERGÍA DE FLUJO

También denominada energía debida a la presión. Representa la cantidad de trabajo necesario para mover el elemento del fluido a través de una sección en contra de la presión reinante en esa sección.

$$E_f = W \frac{P}{\gamma}$$

Donde:

P ~ Presión en esa sección.

W ~ Peso del elemento de fluido.

$\gamma \sim$ Peso específico del fluido.

La energía total que tiene el elemento del fluido será la suma de los tipos de energía. Se expresa por:

$$E = E_p + E_c + E_f \quad \rightarrow \quad E = zW + \frac{v^2}{2g}W + \frac{P}{\gamma}W$$

Cada uno de los términos se expresa en unidades de energía; por ejemplo Newton-metro en el Sistema Internacional, o en pie-libra (*foot-pound*) en el sistema inglés.

Si se considera el elemento del fluido que se mueve desde la sección 1 hasta la sección 2, los valores de presión (P), elevación (z) y velocidad (v) son diferentes en las dos secciones:

En la sección 1 la energía total es:

$$E_1 = z_1W + \frac{(v_1)^2}{2g}W + \frac{P_1}{\gamma}W$$

En la sección 2 la energía total es:

$$E_2 = z_2W + \frac{(v_2)^2}{2g}W + \frac{P_2}{\gamma}W$$

Según el principio de conservación de la energía, si no se pierde o se suministra energía entre las secciones, se cumple la afirmación:

$$E_1 = E_2$$

Esta expresión al suprimir el peso del fluido W , toma la siguiente forma:

$$z_1 + \frac{(v_1)^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{(v_2)^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma}$$

Que es la conocida ecuación de Bernoulli.

Al factor (P/γ) se le denomina carga a presión, la relación $(v^2/2g)$ es nominada carga a velocidad y a (z) se le conoce como carga a elevación. La suma de los tres elementos da como resultado la carga total y se expresa en metros.

Debido a que cada término de esa expresión representa una altura, el esquema de la segunda página resulta útil para visualizar la relación entre los tres tipos de energía.

En el caso del fluido ideal no existe pérdida de energía, y la carga permanece siempre constante. De ahí que cada término varíe según lo establecido por la ecuación de Bernoulli. Según el gráfico *B.1*, la carga a velocidad en la sección 1 es menor que en la sección 2 debido a que el área de la sección 1 es mayor que en la sección 2. Cuando la carga a velocidad disminuye usualmente la carga a presión aumenta, sin embargo este cambio se ve afectado por el hecho de que la carga a elevación también está variando. La ecuación de Bernoulli permite comprender con facilidad estos cambios.

En el caso de fluidos reales en los cuales está presente la viscosidad, se producen pérdidas de carga. De aquí que la energía total no se mantenga constante en las diferentes secciones. En la gráfica *B.1* lado derecho se visualiza este caso también. En la misma se puede apreciar que la rasante de energía no es una línea horizontal. Para los fluidos reales la ecuación de Bernoulli^B toma la forma:

$$z_1 + \frac{(v_1)^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{(v_2)^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + hf_{1-2}$$

Donde:

$hf_{1-2} \sim$ Representa la pérdida de carga.

Despejando de la última expresión, hf_{1-2} es igual a:

$$hf_{1-2} = (z_1 - z_2) + \left(\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} \right) + \left(\frac{(v_1)^2}{2g} - \frac{(v_2)^2}{2g} \right)$$

Que es la expresión utilizada por los investigadores para calcular la pérdida de carga en tuberías de manera experimental.

^B Detalles sobre el Principio de Bernoulli, paginas 17-18, "Manual de Prácticas del Laboratorio de Hidráulica", Ernesto Gracia Ruiz, Editorial Offsset Universitaria "UAJMS", 1997.

ANEXO C

LA RESISTENCIA HIDRÁULICA (RENUENCIA HIDRAULICA)

A similitud con el fenómeno físico de resistencia eléctrica, la resistencia hidráulica es la propiedad física del tipo de material de las tuberías de oponerse al flujo de un fluido.

Para evitar confusión con la resistencia eléctrica, la resistencia hidráulica se conoce como: *Renuencia Hidráulica* o simplemente *Renuencia*.

FÓRMULA ESTÁNDAR DE LA PÉRDIDA DE CARGA

La pérdida de carga o de energía en una conducción forzada puede ser “re-escrita” en una forma estándar general bajo la expresión:

$$hf_i = B_i \times L_i \times (Q_i)^n \quad (1.3a)^c$$

Donde:

hf_i ~ Pérdida de energía en una tubería.

B_i ~ Coeficiente en función del diámetro de tubería y de un factor de pérdida adimensional. En algunos casos se considera el número de Reynolds.

L_i ~ Longitud de tubería.

Q_i ~ Caudal que circula por la tubería.

n ~ Exponente que afecta al caudal

Esta forma de escribir la ecuación de la pérdida de energía engloba a todas las fórmulas existentes, y se la conoce como la *fórmula estándar de pérdida de energía*. En esta

^c Fórmula estándar de pérdida de energía (hf), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2007.

expresión se reemplaza la velocidad por el caudal, para poder identificar los factores análogos con sistemas similares: circuitos de resistencias eléctricas.

FÓRMULA RESUMIDA ESTÁNDAR DE LA PÉRDIDA DE CARGA

La fórmula (1.3a) puede resumirse bajo la expresión, la misma que es denominada “*Fórmula resumida estándar de pérdida de energía*”^D:

$$hf_i = R_i \times (Q_i)^n \quad (1.3b)^E$$

Donde:

hf_i ~ Pérdida de carga o de energía en una tubería.

R_i ~ Resistencia hidráulica o **Renuencia hidráulica**, cuyo valor está en función de la longitud, diámetro y del coeficiente B .

Q_i ~ Caudal que circula por la tubería.

n ~ Exponente que afecta al caudal

Cualquier fórmula, sin importar su escritura puede ser reducida a los formatos de “*Fórmula estándar de pérdida de energía*” y “*Fórmula resumida estándar de pérdida de energía*”.

Con estas consideraciones se pueden resolver sistemas de tuberías en serie y paralelo, sistemas mixtos de tuberías serie-paralelo y/o paralelo-serie.

RENUENCIA HIDRÁULICA

La **Renuencia Hidráulica** está determinada por muchos factores. Sin embargo se debe tomar en cuenta:

^D Denominación adoptada, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2011.

^E Denominación adoptada, fórmula resumida estándar de pérdida de carga o de energía (hf), elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2007.

La Pérdida de energía h_f , el Caudal Q circulante por la tubería y la Renuencia hidráulica R , están relacionados entre sí.

Para comprender el concepto de **Renuencia Hidráulica**, se debe considerar las siguientes observaciones:

- La viscosidad del fluido es uniforme a través del sistema de tubería. Esta magnitud física solo es afectada directamente por la temperatura del mismo fluido.
- La temperatura del fluido es uniforme a través del sistema de tuberías, mientras circula a través del sistema de tuberías, en un régimen de flujo permanente.
- Los efectos combinados de la viscosidad y de la temperatura no ejercen influencia sobre el comportamiento físico del flujo en el sistema de tuberías.
- La “**Renuencia Hidráulica**”, en su nueva concepción debe ser igual a:

$$R_i = B_i \times L_i \quad (1.3c)^F$$

Donde:

R_i ~ Resistencia hidráulica o **Renuencia hidráulica**^G.

B_i ~ Coeficiente en función del diámetro de tubería y de un factor de pérdida adimensional. En algunos casos se considera el número de Reynolds. Existen muchas formulas empíricas: Darcy-Weisbach; Hazen-Williams, Chezy, Manning

L_i ~ Longitud de la tubería.

^F Equivalencia física entre la Renuencia hidráulica y el producto mutuo del coeficiente adimensional y la longitud, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2007.

^G Denominación adoptada, elaboración propia, Rafael Oros, Oficina personal, 2011. A similitud de la Resistencia eléctrica, la Renuencia hidráulica representa el grado de resistencia al flujo que ofrece una tubería. Se adoptó el término de “Renuencia hidráulica” para evitar confusión con el término “Resistencia eléctrica” al realizar análisis cualitativos y cuantitativos de ambos sistemas. También se evita la confusión con los términos hidráulicos: rugosidad absoluta y relativa.

La “*Fórmula estándar de pérdida de energía*” y la “*Fórmula resumida estándar de pérdida de energía*” desempeñan un papel importante en la solución de los sistemas de tuberías complejos: serie, paralelo, serie-paralelo, paralelo-serie.

Por otro lado, se debe mencionar que la *Resistencia Hidráulica* no tiene unidad de medición definida.

En este trabajo solo se consideran fluidos comunes bajo condiciones normales de presión y temperatura:

- Temperaturas desde 0° - 25°C
- Presiones atmosféricas desde 100000 – 102000[Pa]

Existe el inverso de la *Resistencia Hidráulica*, el mismo que es la *Conductancia Hidráulica* o propiedad de los materiales de conducir fluidos.

ANEXO D

ECUACIONES Y TABLAS AUXILIARES

A continuación se presentaran algunas ecuaciones y tablas a utilizaran en este trabajo.

D.1 ECUACIÓN DEL NÚMERO DE REYNOLDS

El número de Reynolds, viene dado por la expresión:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot D}{\nu} \quad (1.1)^{425}$$

Donde:

v ~ Velocidad media del líquido en la sección, en m/s

D ~ Diámetro de la sección, en m

ν ~ Viscosidad dinámica, en m^2/s . Depende de la temperatura

D.1.1 ECUACIÓN DEL NÚMERO DE REYNOLDS EN FUNCIÓN DEL CAUDAL

La ecuación (1.1) puede escribirse en función del Caudal de la siguiente forma:

$$\text{Re} = \frac{4Q}{\pi \cdot \nu \cdot D} \quad (1.1a)^{426}$$

Donde:

Q ~ Caudal circulante por una tubería de diámetro D .

D ~ Diámetro de la sección, en m

ν ~ Viscosidad dinámica, en m^2/s . Depende de la temperatura

⁴²⁵ Fórmula del número de Reynolds (Re), pagina 7, “Hidráulica de Tuberías”, Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

⁴²⁶ Fórmula del numero de Reynolds (Re), pagina 7, “Hidráulica de Tuberías”, Juan G. Saldarriaga, Editorial Mc Graw Hill, 1998.

D.2 PÉRDIDAS LOCALIZADAS Ó MENORES

Los accesorios, tales como: codos, válvulas, “T”, reducciones, ampliaciones, etc., provocan un aumento de las pérdidas de carga en el punto por encima de los valores que se producen en los tramos rectos de tuberías. Estas pérdidas se denominan menores o localizadas.

Se pueden usar dos métodos para determinar estas pérdidas menores:

D.2.1 CALCULAR LAS PÉRDIDAS DIRECTAMENTE POR UNA EXPRESIÓN DEL TIPO:

$$h_m = K \frac{V^2}{2g}$$

Donde:

h_m ~ Pérdida de carga menor, en m.

K ~ Coeficiente de pérdida localizada.

$\frac{v^2}{2g}$ ~ carga a velocidad, en m.

v ~ Velocidad media del gasto considerado, en (m/s).

g ~ Aceleración de la gravedad terrestre, en (m/s²).

En esta fórmula, el coeficiente K se determina experimentalmente para cada accesorio.

Se asume, que la velocidad media del gasto ocurre en un recto de tubería de igual diámetro que el diámetro nominal del accesorio correspondiente.

D.2.2 POR LONGITUD EQUIVALENTE

Se entiende por longitud equivalente a la longitud de tubería de igual diámetro que el diámetro nominal del accesorio y que produzca una pérdida igual de carga que el accesorio cuando circule el mismo caudal.

Para calcular la longitud equivalente (L_e) de un accesorio cualquiera se procede a igualar la pérdida de carga en un tramo de tubería recta a la expresión de pérdida localizada.

$$L_e = \frac{KD}{f}$$

Donde:

L_e ~ Longitud equivalente, en m.

K ~ Coeficiente de pérdida localizada, adimensional.

D ~ Diámetro de la tubería, en m.

f ~ Coeficiente de fricción de Weisbach-Darcy, adimensional.

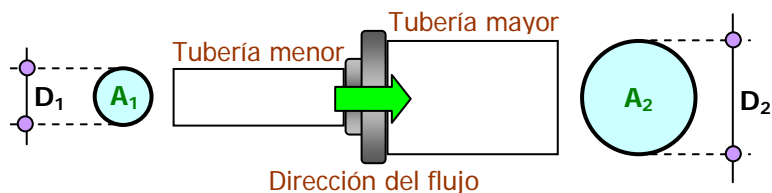
A continuación se presentan las principales las principales causas que son el origen de las pérdidas localizadas con sus respectivos valores K , de acuerdo con el tipo de perturbación.

D.2.3 PÉRDIDA POR AMPLIACIÓN DE LA SECCIÓN

Esta se origina al producirse una ampliación de la sección transversal de la tubería. La ampliación puede ser gradual o brusca.

D.2.3.1 PÉRDIDA POR AMPLIACIÓN BRUSCA (h_{ab})

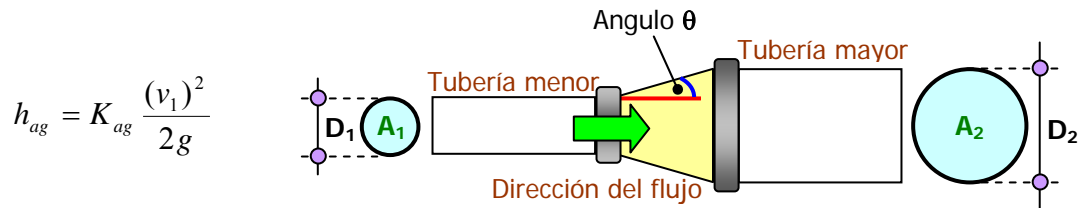
$$h_{ab} = K_{ab} \frac{(V_1)^2}{2g}$$



El valor de K_{ab} depende de la relación de áreas (A_1/A_2) de la sección transversal después (A_2 – aguas abajo) y antes (A_1 – aguas arriba). La velocidad a tomar en cuenta para el cálculo de (h_{ab}), es la de aguas arriba (diámetro menor). Observar la tabla de referencia:

(A_1/A_2)	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
K_{ab}	1.0	0.81	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01

D.2.3.2 PÉRDIDA POR AMPLIACIÓN GRADUAL (h_{ag})



El valor de K_{ag} depende de la relación de áreas (A_1/A_2) de la sección transversal después (A_2 – aguas abajo) y antes (A_1 – aguas arriba) de la ampliación, y del ángulo θ del difusor. La velocidad a tomar en cuenta para el cálculo de (h_{ag}) es la de aguas arriba (diámetro menor).

La expresión para calcular K_{ag} es: $K_{ag} = C_a \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$

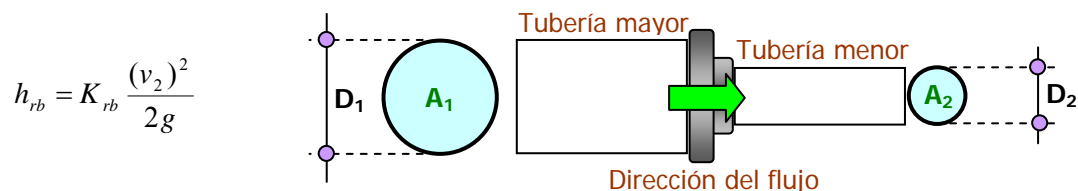
El valor de C_a depende del ángulo θ del difusor, como se ve en la tabla de abajo:

θ	6°	10°	15°	20°	30°	40°	50°	60°	75°	90°
Ca	0.14	0.20	0.30	0.40	0.7	0.9	1.0	1.1	1.1	1.1

D.2.4 PÉRDIDA POR REDUCCIÓN DE LA SECCIÓN

En este caso se produce un fenómeno de contracción semejante al de entrada a la tubería. La reducción puede ser brusca o gradual.

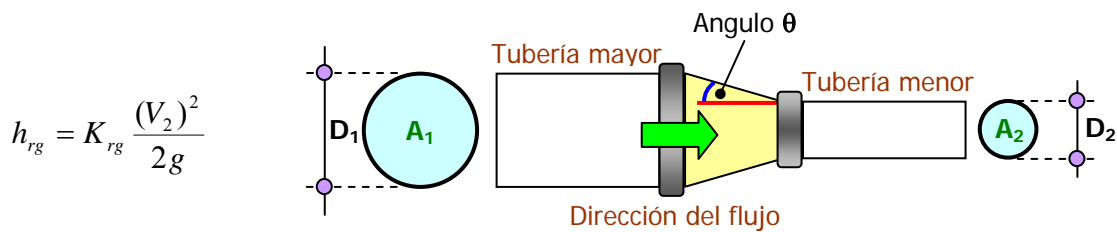
D.2.4.1 PÉRDIDA POR REDUCCIÓN BRUSCA (h_{rb})



En este caso (v_2) es la velocidad media en el conducto de menor diámetro. El valor de K_{rb} depende de la relación de diámetros (D_2/D_1) de las conducciones antes (D_1 – aguas arriba) y después (D_2 – aguas abajo) y de la brusquedad. Ver la tabla de referencia:

(D_2/D_1)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
K_{rb}	0.49	0.47	0.45	0.42	0.37	0.32	0.26	0.18	0.10

D.2.4.1 PÉRDIDA POR REDUCCIÓN GRADUAL (h_{rg})



El valor de K_{rg} depende casi exclusivamente del ángulo θ del difusor. Esto debido a que las pérdidas menores en este accesorio son mínimas en comparación con las de las ampliaciones. Ver la tabla de abajo:

θ	5°	7°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°	75°	80°
Ca	0.06	0.16	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35

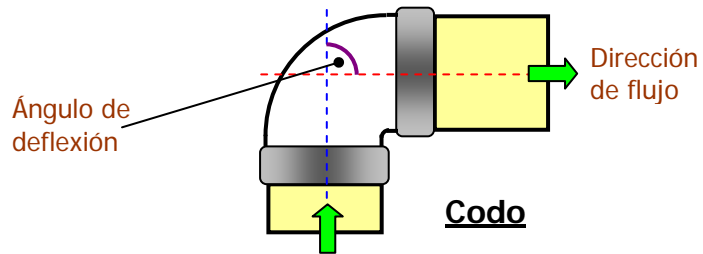
D.2.5 PÉRDIDA POR CAMBIO DE DIRECCIÓN

En un cambio de dirección se visualiza el flujo, y se observa que los filetes tienden a conservar su movimiento rectilíneo en razón de su propia inercia.

El cambio de dirección modifica la distribución de velocidades del flujo y produce zonas de separación de los filetes en el lado interno del cambio de dirección y aumentos de presión en el lado externo. El cambio de dirección de un flujo puede verificarse en tuberías con presencia de codos o con curvas.

D.2.5.1 PÉRDIDA POR CAMBIO DE DIRECCIÓN CON CODO (h_{c1})

$$h_{c1} = K_{c1} \frac{V^2}{2g}$$

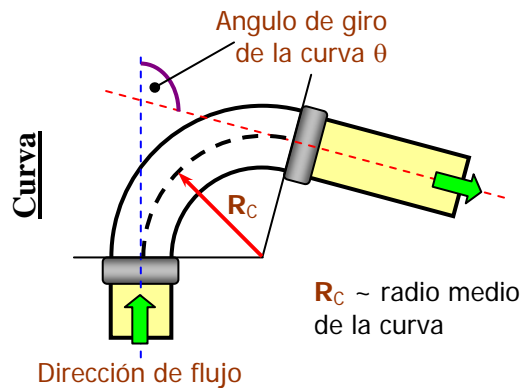


Donde, el valor de K_{c1} toma la forma: $K_{c1} = C \sqrt{\frac{\Delta}{90^\circ}}$ y v es la velocidad media en la tubería, en (m/s). El valor de C en la expresión de K_{c1} es un coeficiente, cuyo valor usualmente es 0.25 y Δ es el ángulo de deflexión en grados

D.2.5.2 PÉRDIDA POR CAMBIO DE DIRECCIÓN CON CURVA (h_{c2})

$$h_{c2} = K_{c2} \frac{V^2}{2g}$$

$$K_{c2} = C_2 \eta$$



Donde V es la velocidad media en la tubería, en (m/s) y K_{c2} es el coeficiente de pérdida por cambio de dirección de curva. K_{c2} es igual a $C_2 \times \eta$; que depende de la relación del radio medio de la curva (R_C) con el diámetro del tubo que forma la curva (D). Ver tablas abajo:

(RC/D)	1	2	4	6	10
C2	0.52	0.29	0.23	0.20	0.18

θ	10°	20°	30°	40°	60°	90°	135°	150°	180°
η	0.20	0.40	0.50	0.70	0.85	1.00	1.15	1.20	1.30

η ~ es un coeficiente que es función del Angulo de giro de la curva (θ).

D.3 VALORES TABULADOS DE COEFICIENTES

D.3.1 RUGOSIDAD ABSOLUTA

El rozamiento (ocurrido durante la circulación del agua u otro fluido), definido por su coeficiente λ , depende de la rugosidad interior de la tubería. La Rugosidad absoluta K es la altura máxima de las asperezas de su superficie interior, y la rugosidad relativa K/D es la relación entre la rugosidad absoluta y el diámetro del tubo.

La fórmula de Reynolds, ecuación (1.1), conocida por el número de Reynolds (Re), está relacionada con el coeficiente de rozamiento λ y combina, sin dimensiones, estas magnitudes.

MATERIAL	K (mm)
Vidrio, bronce, cobre, polietileno (PE)	0 a 0,0015
Policloruro de vinilo (PVC)	0 a 0,010
Amianto-cemento	0,0125
Hierro forjado y acero	0,05 a 0,15
Fundición asfaltada	0,10 a 0,15
Hierro galvanizado	0,15
Fundición nueva	0,5 a 1,0
Fundición en servicio	1,5 a 3,0
Hormigón liso	0,3 a 3,0
Hormigón rugoso	3,0 a 20,0
Acero roblonado	1,0 a 10,0

El líquido puede circular por el interior del tubo en régimen laminar o turbulento, según las condiciones que se presenten. Estas y el propio coeficiente λ dependerán de:

- El diámetro interior de la tubería
- La velocidad media de circulación
- La rugosidad de las paredes interiores de la tubería
- La viscosidad cinemática del líquido, a la temperatura de servicio.

Estos factores son independientes de la presión del líquido en el interior del tubo.

D.3.2 VISCOCIDAD CINEMÁTICA DEL AGUA

A continuación se presenta la tabla para este valor y otros:

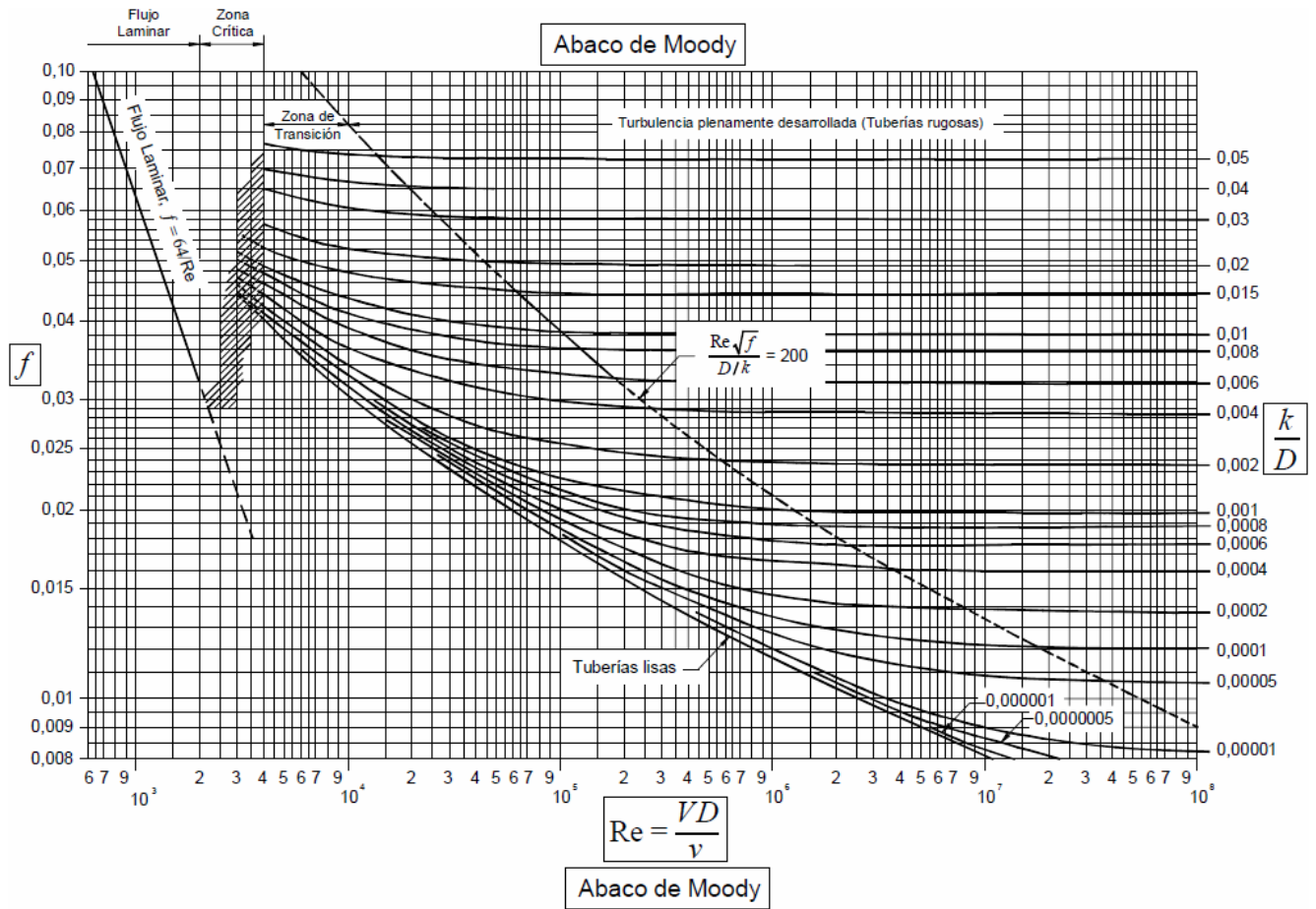
PROPIEDADES MECÁNICAS DEL AGUA

Temperatura	Densidad	Peso Especifico	Viscosidad dinámica	Viscosidad cinemática
T [°C]	ρ [Kg - s ² /m ⁴]	γ [Kg/cm ³]	μ [Kg - s/m ²]	ν [m ² /s]
0.0	101.94	1.0000	0.0001810	0.000001780
5.0	101.94	1.0000	0.0001550	0.000001520
10.0	101.94	0.9996	0.0001330	0.000001300
15.0	101.94	0.9990	0.0001170	0.000001150
20.0	101.74	0.9982	0.0001040	0.000001020
25.0	101.63	0.9970	0.0000909	0.000000894
30.0	101.53	0.9955	0.0000815	0.000000803
35.0	101.33	0.9939	0.0000732	0.000000722
40.0	101.12	0.9921	0.0000663	0.000000656
45.0	100.92	0.9900	0.0000606	0.000000600
50.0	100.71	0.9888	0.0000552	0.000000548
55.0	100.51	0.9857	0.0000508	0.000000505
60.0	100.31	0.9831	0.0000468	0.000000467

Tabla tomada del libro "Mecánica de Fluidos Aplicada" de Robert L. Mott, pagina 102, 1996

D.3.3 f DE DARCY-WEISBACH

El diagrama de Moody es un excelente ábaco para el cálculo de “*f*”:



En las tablas de abajo y de la página siguiente se presentan algunos valores f para el régimen turbulento:

Factor de fricción f (en la fórmula de Weisbach-Darcy), para cuando circula agua

Diámetro (en mm)	TUBERÍA DE HIERRO Y ACERO								TUBERÍA de CONCRETO			
	NUEVA				MUY USADA							
	velocidad (en m/s)				velocidad (en m/s)				velocidad (en m/s)			
	0.5	1.5	3.0	6.0	0.5	1.5	3.0	6.0	0.5	1.5	3.0	6.0
25.4	0.040	0.035	0.034	0.030	0.071	0.071	0.071	0.071	-----	-----	-----	-----

76.0	0.030	0.270	0.025	0.023	0.054	0.054	0.054	0.054	-----	-----	-----	-----
152.0	0.025	0.023	0.021	0.019	0.045	0.045	0.045	0.045	0.035	0.030	0.027	0.025
254.0	0.022	0.020	0.019	0.017	0.040	0.040	0.040	0.040	0.031	0.026	0.024	0.022
381.0	0.020	0.018	0.017	0.015	0.036	0.036	0.036	0.036	0.027	0.024	0.022	0.020
610.0	0.018	0.016	0.015	0.013	0.032	0.032	0.032	0.032	0.024	0.021	0.019	0.018
924.0	0.016	0.014	0.014	0.012	0.029	0.029	0.029	0.029	0.022	0.019	0.017	0.016
1220.0	0.015	0.013	0.013	0.011	0.026	0.026	0.026	0.026	0.020	0.018	0.016	0.015
1830.0	0.013	0.012	0.011	0.010	0.024	0.024	0.024	0.024	0.019	0.016	0.015	0.013

Valores para el coeficiente de fricción f , en la fórmula de Weisbach-Darcy

Régimen turbulento liso

Re	4000	1×10 ⁴	2×10 ⁴	4×10 ⁴	1×10 ⁵	2×10 ⁵	4×10 ⁵	1×10 ⁶	2×10 ⁶	4×10 ⁶	1×10 ⁷
f	0.040	0.0309	0.0259	0.0220	0.0180	0.0156	0.0137	0.0117	0.0104	0.0093	0.0081

Régimen turbulento rugoso

ϵ/D	0.1	0.05	0.033	0.025	0.018	0.01	0.005	0.0033	0.0025	0.002	0.001	0.0001
f	0.1005	0.7150	0.0597	0.0529	0.0455	0.0380	0.0304	0.0269	0.0249	0.0234	0.0197	0.0120

Régimen turbulento de transición

ϵ/D	Número de Reynolds (Re)									
	5×10 ³	1×10 ⁴	2×10 ⁴	3×10 ⁴	1×10 ⁵	2×10 ⁵	4×10 ⁵	1×10 ⁶	3×10 ⁶	1×10 ⁷
0.050	0.0758	0.0737	0.0726	0.0722	0.0717	0.0715	0.0715	0.0715	0.0715	0.0715
0.025	0.0592	0.0562	0.0547	0.0541	0.0534	0.0532	0.0531	0.0530	0.0530	0.0530
0.010	0.0472	0.0431	0.0407	0.0398	0.0385	0.0382	0.0380	0.0380	0.0380	0.0380
0.005	0.0426	0.0376	0.0344	0.0332	0.0314	0.0308	0.0306	0.0304	0.0304	0.0304
0.002	0.0396	0.0338	0.0298	0.0280	0.0251	0.0243	0.0239	0.0236	0.0235	0.0234
0.001	0.0385	0.0324	0.0279	0.0260	0.0222	0.0210	0.0204	0.0199	0.0197	0.0197
0.0005	0.0379	0.0316	0.0269	0.0248	0.0203	0.0188	0.0179	0.0172	0.0169	0.0167
0.0002	0.0376	0.0312	0.0263	0.0240	0.0190	0.0171	0.0158	0.0147	0.0141	0.0138
0.0001	0.0375	0.0310	0.0261	0.0283	0.0185	0.0164	0.0148	0.0134	0.0126	0.0122
0.00005	0.0375	0.0310	0.0260	0.0236	0.0183	0.0160	0.0143	0.0126	0.0115	0.0109
0.00002	0.0374	0.0309	0.0260	0.0235	0.0181	0.0158	0.0140	0.0121	0.0105	0.0096
0.00001	0.0374	0.0309	0.0259	0.0235	0.0180	0.0157	0.0138	0.0119	0.0102	0.0090
0.000005	0.0374	0.0309	0.0259	0.0235	0.0180	0.0157	0.0138	0.0118	0.0100	0.0086
0.000001	0.0374	0.0309	0.0259	0.0235	0.0180	0.0156	0.0137	0.0117	0.0098	0.0082

D.3.4 C DE HAZEN-WILLIAMS

En la tabla de abajo se observa el valor del coeficiente C de Hazen-Williams, que depende del tipo de material de la tubería. Es un valor adimensional:

TIPO DE MATERIAL	C HW
Acero corrugado	60
Acero galvanizado nuevo y usado	125
Acero remachado nuevo	110

Acero remachado usado	85
Acero soldado o con remache nuevo	120
Acero soldado o con remache usado	90
Acero soldado con revestimiento especial	130
Hierro fundido limpio nuevo	130
Hierro fundido sin incrustaciones	110
Hierro fundido con incrustaciones	90
Plástico PVC o PE	150
Asbesto-Cemento	135
Cobre y latón	130
Conductos con acabado de cemento	100
Concreto, acabado liso	130
Concreto, acabado común	120
tubos de barro vitrificado (drenes)	110
Macera cepillada	120

El coeficiente C es una función casi enteramente, conjunta y exclusiva de las paredes de la tubería y del fluido. Por esta razón, el uso de la fórmula de Hazen – Williams debe estar limitado a ciertas características del fluido y del flujo. Los límites, claramente establecidos por los dos investigadores son los siguientes:

- El fluido debe ser agua a temperaturas normales, desde 0~30°C.
- El diámetro de la tubería debe ser superior o igual a 2 pulgadas o 50.8[mm].
- La velocidad del flujo en las tuberías se debe limitar a 3.0[m/s].

La fórmula de Hazen - Williams, requiere para su aplicación provechosa la mayor precaución en la adopción del coeficiente C. Una selección inadecuada de C reduce mucho la precisión de la formula. Para tubos de hierro y acero, el coeficiente C es una función del tiempo, de modo que su valor debe ser fijado teniendo en cuenta la vida útil esperada de la tubería. Esta formula es aplicable a flujos turbulento.

La fórmula de Hazen – Williams tiene la ventaja de ser aplicable con rapidez, debido a su escritura explícita. La desventaja de esta fórmula radica en que algunas veces se olvida que es una ecuación válida para un determinado rango de velocidades y de diámetros de las tuberías.

D.3.5 m DE KUTTER EN LA FÓRMULA DE CHEZY

En la tabla de abajo, se observa el valor del coeficiente “m” de Kutter, que depende del tipo de material de la tubería. Este coeficiente se introduce en la fórmula de Chezy. Es un valor adimensional.

TIPO DE MATERIAL	“m”
Tubos nuevos de hierro fundido	0.15 ~ 0.17
Tubos nuevos de cemento	0.15 ~ 0.17
Tubos de hierro fundido en servicio corriente con agua no incrustante	0.275
Tubos de hierro fundidos muy usados	0.350
Tubos de hierro fundido muy incrustados y con aguas sucias	0.450

La fórmula de Chezy posee la forma:

$$hf = \frac{64}{\pi^2 \times D^5 \times \left[\frac{100 \cdot \sqrt{D/4}}{m + \sqrt{D/4}} \right]^2} \times L \cdot Q^2 \quad (2.86)^{427}$$

⁴²⁷ Formula de Chezy, para calcular la pérdida de carga (hf) en una tubería, “Apuntes de Hidráulica”, Juan Carlos Loza, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2004.

D.3.6 n DE MANNING

En la tabla de abajo, se observa el valor del coeficiente “n” de Manning⁴²⁸, que depende del tipo de material de la tubería. Este coeficiente se introduce en la fórmula de Manning. Es un valor adimensional.

TIPO DE MATERIAL	“n”
Acero galvanizado	0.015 ~ 0.017
Acero remachado	0.015 ~ 0.017
Acero soldado	0.011 ~ 0.014
Asbesto cemento	0.010 ~ 0.012
Cobre y latón	0.009 ~ 0.012
Hormigón Liso	0.011 ~ 0.012
Hormigón bien terminado	0.013 ~ 0.014
Hormigón simple	0.014 ~ 0.016
Barro vitrificado	0.012 ~ 0.015
Fierro fundido nuevo	0.011 ~ 0.015
Fierro fundido usado	0.015 ~ 0.025
Fierro con ondulaciones	0.020 ~ 0.022
Madera	0.011 ~ 0.013
PVC, Polietileno (PE)	0.007 ~ 0.010

La fórmula de Manning posee la forma:

$$hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2 \quad (2.87)^{429}$$

⁴²⁸ Valores obtenidos de la página 238, “Introducción a la Hidráulica”, Víctor Hugo Salmón Carrillo, Imprenta Ramírez, 2003, I.B.S.N. -99905-0-338-9.

⁴²⁹ Fórmula de Manning, para calcular la pérdida de carga (hf) en una tubería, “Apuntes de Hidráulica”, Juan Carlos Loza, Aulas Universitarias “UAJMS”, 2004. Esta fórmula es una adaptación de la ecuación utilizada en canales, donde el radio hidráulico es reemplazado por $(D/4)$.

ANEXO E**DATOS DEL SISTEMA DE TUBERÍAS EN SERIE (HAZEN-WILLIAMS)****Gestión :** " 2007, 2008, 2009, 2010, 2011"**Docente :** Universitario Rafael Oros**Fecha :** Distintas fechas

		Cantidad	Unidad
Longitud mayor del tanque de aforo	Ly :	1.010	m
Longitud menor del tanque de aforo	Lx :	1.000	m
Area del tanque de aforo	A :	1.010	m ²
Temperatura del agua	t :	20.00	°C
Viscosidad cinemática	v :	1.010E-06	m ² /s
Diámetro interior de la tubería 1	D :	50.80	mm
Longitud de la tubería 1	L :	5.010	m
Diámetro interior de la tubería 2	D :	38.10	mm
Longitud de la tubería 2	L :	5.180	m
Densidad relativa líquido manométrico	S :	13.56	

Material de la tubería 1	:	H°G°
Material de la tubería 2	:	H°G°

Caudal 1	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en [m ³ /s]
	1	40.60	0.48	2.08	5	0.001244
	2	79.65	0.46	2.09	10	0.001268
	3	118.45	0.47	2.11	15	0.001279
	4	156.85	0.46	2.09	20	0.001288
	5	199.75	0.47	2.10	25	0.001264
Media Dif. Manométrica =			0.47	2.09	Media Q1 =	0.001269

Caudal 2	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en m ³ /s
	1	20.50	1.61	7.43	5	0.002463
	2	41.30	1.59	7.44	10	0.002446
	3	62.50	1.62	7.45	15	0.002424
	4	83.30	1.63	7.42	20	0.002425
	5	104.80	1.64	7.43	25	0.002409
Media Dif. Manométrica =			1.62	7.43	Media Q2 =	0.002433

Caudal 3	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en m ³ /s
	1	15.40	2.82	13.03	5	0.003279
	2	31.60	2.80	13.00	10	0.003196
	3	46.60	2.83	13.02	15	0.003251
	4	62.40	2.81	13.04	20	0.003237
	5	78.10	2.82	13.05	25	0.003233
Media Dif. Manométrica =			2.82	13.03	Media Q3 =	0.003239

Caudal 4	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en m ³ /s
	1	12.10	4.66	21.65	5	0.004174
	2	24.07	4.65	21.64	10	0.004196
	3	36.14	4.64	21.65	15	0.004192
	4	48.23	4.65	21.63	20	0.004188
	5	60.18	4.67	21.68	25	0.004196
Media Dif. Manométrica =			4.65	21.65	Media Q4 =	0.004189

Caudal 5	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en m ³ /s
	1	10.50	6.05	28.39	5	0.004810
	2	20.94	6.08	28.37	10	0.004823
	3	31.57	6.07	28.38	15	0.004799
	4	42.25	6.05	28.36	20	0.004781
	5	52.96	6.08	28.37	25	0.004768
Media Dif. Manométrica =			6.07	28.37	Media Q5 =	0.004796

ANEXO E**DATOS DEL SISTEMA DE TUBERÍAS EN SERIE (DARCY-WEISBACH)****Gestión :** " 2007, 2008, 2009, 2010, 2011"**Docente :** Universitario Rafael Oros**Fecha :** Distintas fechas

		Cantidad	Unidad
Longitud mayor del tanque de aforo	Ly :	1.010	m
Longitud menor del tanque de aforo	Lx :	1.000	m
Area del tanque de aforo	A :	1.010	m ²
Temperatura del agua	t :	20.00	°C
Viscosidad cinemática	v :	1.010E-06	m ² /s
Diámetro interior de la tubería 1	D :	50.80	mm
Longitud de la tubería 1	L :	5.010	m
Diámetro interior de la tubería 2	D :	38.10	mm
Longitud de la tubería 2	L :	5.180	m
Densidad relativa líquido manométrico	S :	13.56	

Material de la tubería 1	:	H°G°
Material de la tubería 2	:	H°G°

Caudal 1	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en [m ³ /s]
	1	47.77	0.33	1.48	5	0.001057
	2	95.80	0.34	1.47	10	0.001054
	3	143.23	0.32	1.49	15	0.001058
	4	191.34	0.35	1.48	20	0.001056
	5	238.67	0.32	1.47	25	0.001058
Media Dif. Manométrica =			0.33	1.48	Media Q1 =	0.001057

Caudal 2	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en m ³ /s
	1	24.31	1.17	5.40	5	0.002077
	2	49.11	1.19	5.39	10	0.002057
	3	73.61	1.18	5.38	15	0.002058
	4	97.37	1.18	5.38	20	0.002075
	5	123.08	1.17	5.41	25	0.002052
Media Dif. Manométrica =			1.18	5.39	Media Q2 =	0.002064

Caudal 3	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en m ³ /s
	1	16.51	2.54	11.71	5	0.003059
	2	32.99	2.53	11.72	10	0.003062
	3	49.49	2.56	11.74	15	0.003061
	4	65.97	2.52	11.72	20	0.003062
	5	82.55	2.53	11.73	25	0.003059
Media Dif. Manométrica =			2.54	11.72	Media Q3 =	0.003060

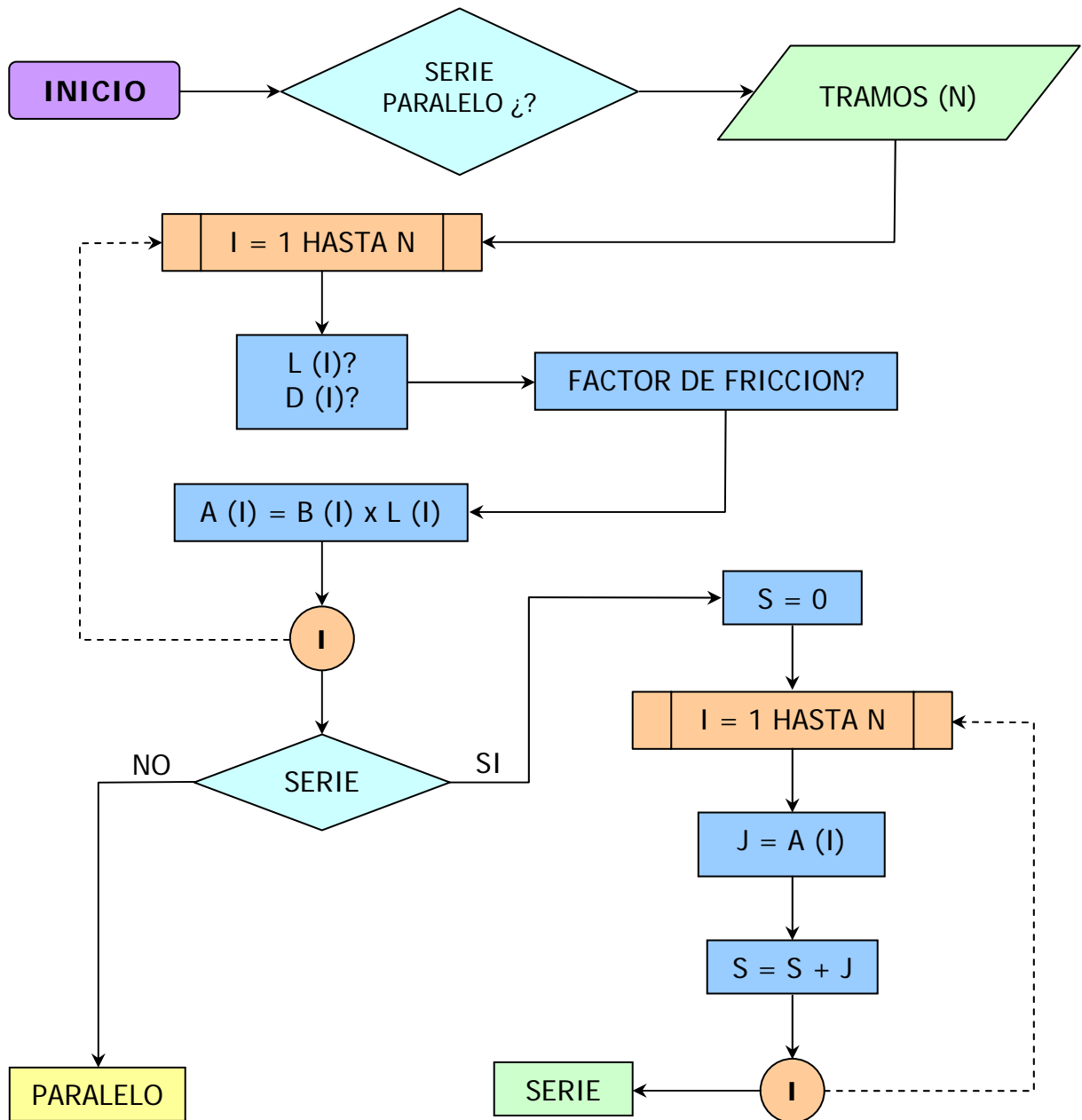
Caudal 4	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en m ³ /s
	1	12.58	4.31	20.05	5	0.004014
	2	25.07	4.28	20.09	10	0.004029
	3	37.69	4.29	20.06	15	0.004020
	4	50.28	4.31	20.08	20	0.004018
	5	62.73	4.28	20.07	25	0.004025
Media Dif. Manométrica =			4.29	20.07	Media Q4 =	0.004021

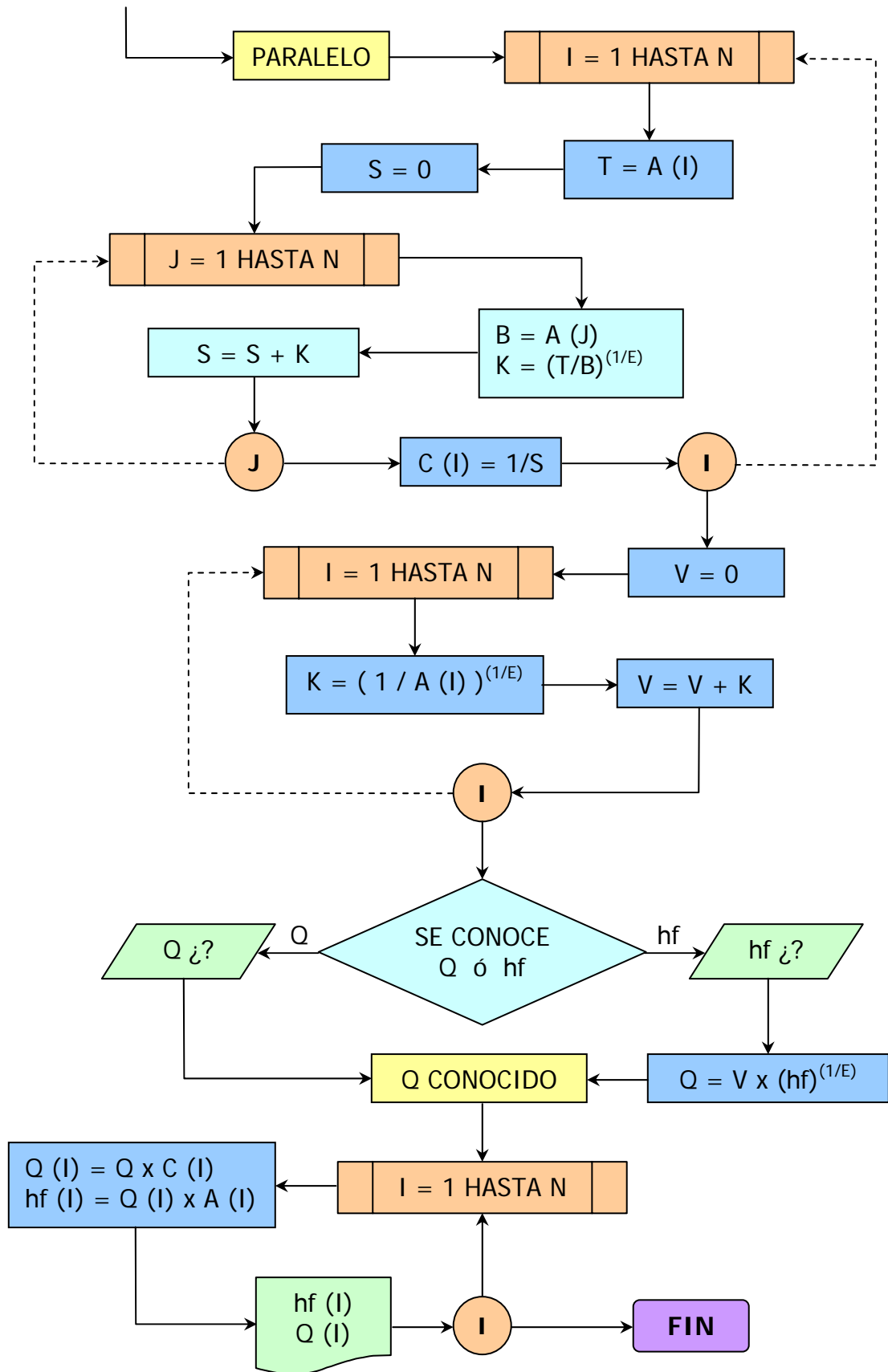
Caudal 5	No. de medición	Tiempo en segundos	Diferencia manométrica 1	Diferencia manométrica 2	Altura (tubo tanque de aforo en cm)	Caudal en m ³ /s
	1	10.07	6.63	30.99	5	0.005015
	2	20.16	6.62	30.97	10	0.005010
	3	30.23	6.59	30.98	15	0.005012
	4	40.31	6.64	30.98	20	0.005011
	5	50.35	6.61	30.97	25	0.005015
Media Dif. Manométrica =			6.62	30.98	Media Q5 =	0.005012

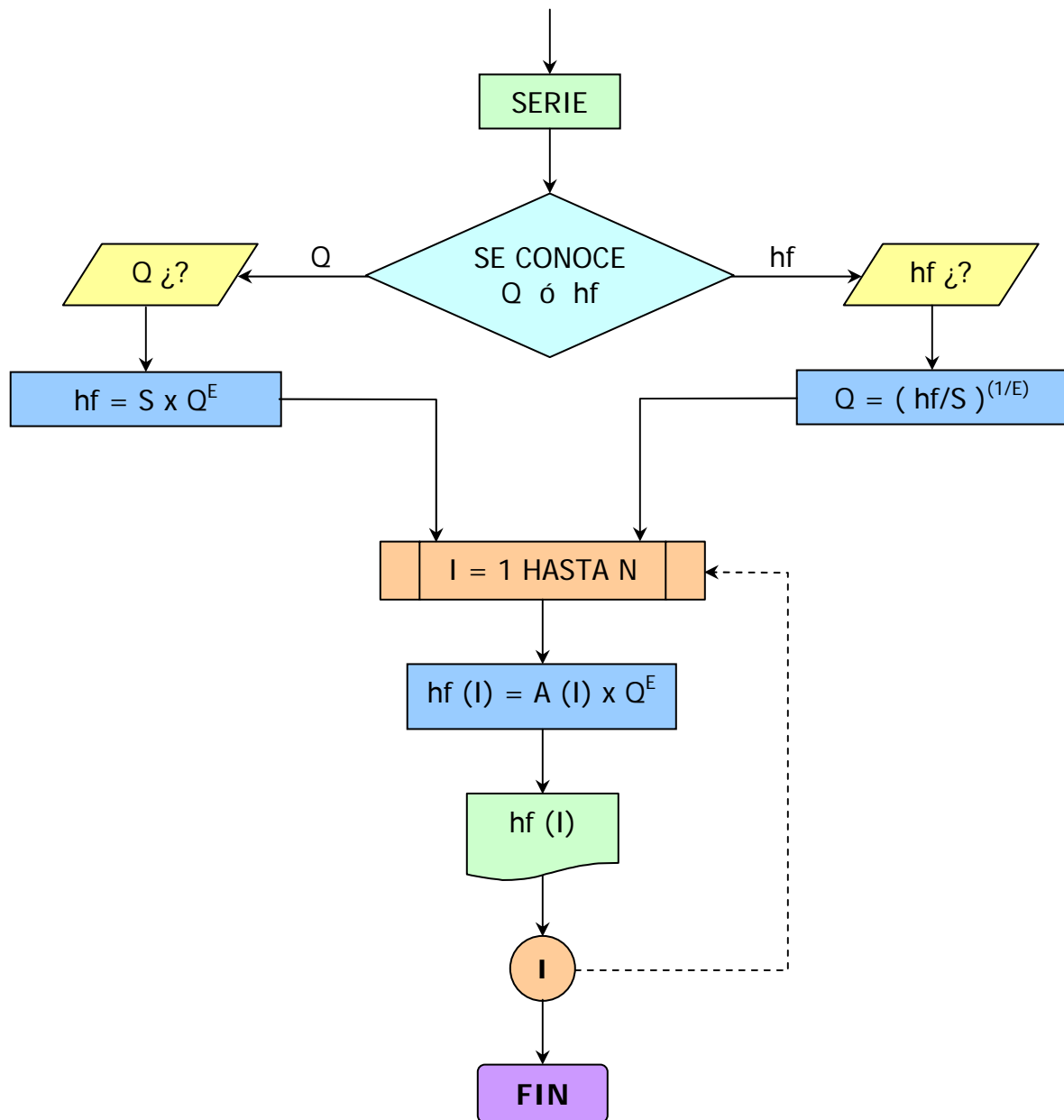
ANEXO F

DIAGRAMAS DE FLUJO SIMPLE

Con el conocimiento inicial de las variables hidráulicas y geométricas de los sistemas de tuberías en serie y paralelo, se pueden elaborar los siguientes diagramas de flujo, los mismos que pueden ser fácilmente programables, tal como se ve a continuación:







El diagrama de flujo presentado solo contempla ejemplos simples para sistemas de tuberías en serie y paralelo. Sin embargo, a partir de ellos se pueden elaborar diagramas de flujos más elaborados que permitan tratar los sistemas combinados serie-paralelo y paralelo-serie.

Este diagrama de flujo se presenta como parte de los objetivos específicos del trabajo de investigación para señalar que el tratamiento informático de estos sistemas es inherente a los sistemas mismos, demostrando que estos sistemas son sistemas organizados de variables.

ANEXO H

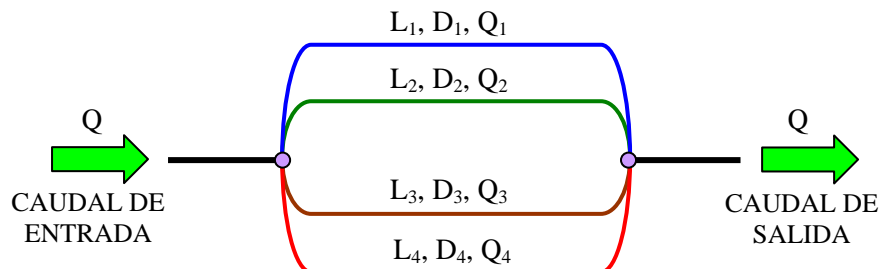
PRUEBA NUMÉRICA CON UN PROGRAMA INFORMÁTICO

Para verificar la veracidad de todo lo expuesto en este trabajo se hará la prueba con la aplicación informática “H20STSP”.

Esta aplicación fue desarrollada por la corporación educativa “XOROS” en el año 2009 en lenguaje de programación de nivel medio C/C++ orientado hacia las calculadoras de las series CASIO fx-9860G/II/SD y afines. Según la categoría del lenguaje, esta aplicación es altamente eficiente, versátil y orientada a usos profesionales.

H.1 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Sea el sistema de 4 tuberías en paralelo, según gráfico esquemático:



Esquema de Sistema de cuatro Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia.

Los datos de este sistema de 4 tuberías en paralelo están tabulados según la tabla de abajo:

Nro.	Longitud [m]	Diámetro [mm]	"n" Manning	Material
1	70	50	0.008	PVC
2	75	100	0.008	PVC
3	80	75	0.008	PVC
4	60	150	0.016	F°G°

Tabla H.1.1 Datos geométricos y físicos – sistema de 4 Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia

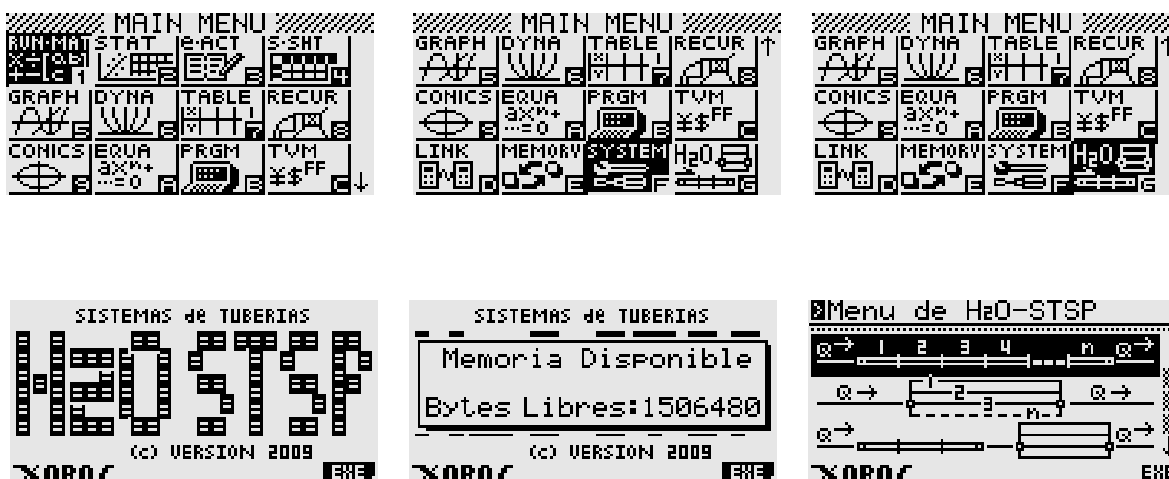
Este sistema de tuberías formaba parte de la línea de transporte de un acueducto que pasa por debajo de un puente y que fue acondicionado con un sistema by-pass. La tubería principal es la tubería de F°G° y las restantes son de PVC y que fueron implementadas como tuberías adicionales.

El problema a resolver es el de calcular el caudal total del sistema para una pérdida de carga de 5.75[m], que es el desnivel ficticio existente entre los extremos del puente.

H.2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA USANDO LA APLICACIÓN INFORMÁTICA

La secuencia de pasos a seguir se mostraran en gráficos del tipo “*.bmp”

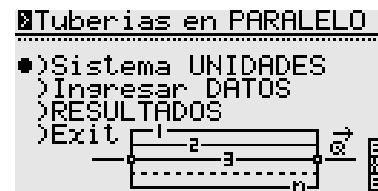
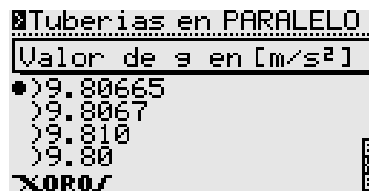
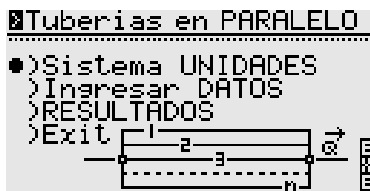
H.2.1 INGRESO A LA APLICACIÓN



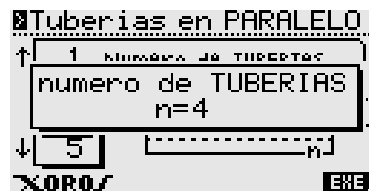
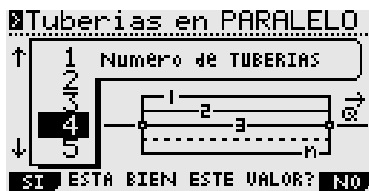
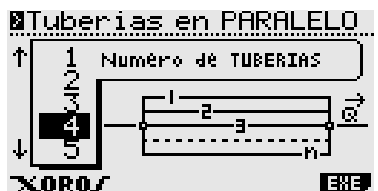
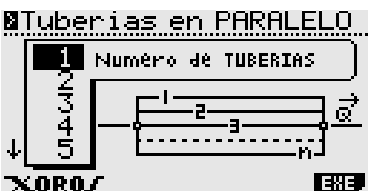
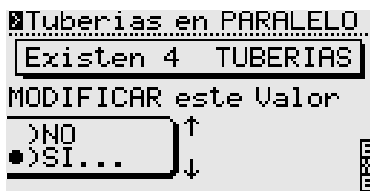
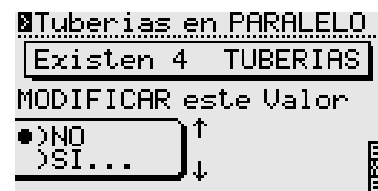
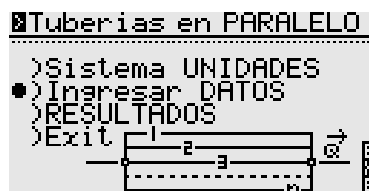
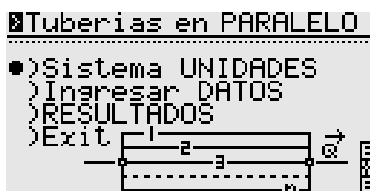
H.2.2 INGRESO AL SISTEMA DE TUBERÍAS EN PARALELO



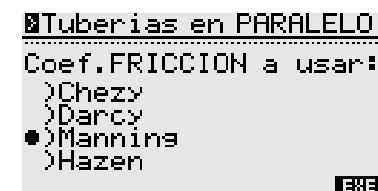
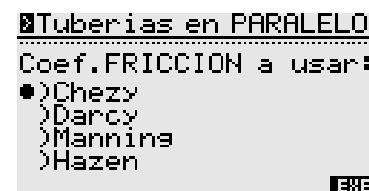
H.2.2.1 INGRESO DE LA CONSTANTE “g” DEL SISTEMA DE TUBERÍAS



H.2.2.2 INGRESO DEL NÚMERO DE TUBERÍAS DEL SISTEMA



H.2.2.3 INGRESO DEL FACTOR DE FRICCIÓN DEL SISTEMA (MANNING)



H.2.2.4 INGRESO DE LOS DATOS GEOMÉTRICOS Y DE FRICCIÓN DE LAS TUBERÍAS

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1			
2			
3			
4			

ρ =

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1			
2			
3			
4			

ρ = 70

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1			
2			
3			
4			

ρ = 75

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000		
2	75.000		
3			
4			

ρ = 80

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000		
2	75.000		
3	80.000		
4			

ρ = 60.00000

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000		
2	75.000		
3	80.000		
4	60.000		

ρ = 60.00000

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000		
2	75.000		
3	80.000		
4	60.000		

ρ =

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000		
2	75.000		
3	80.000		
4	60.000		

ρ = 50

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000	50.000	
2	75.000		
3	80.000		
4	60.000		

ρ = 100

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000	50.000	
2	75.000	100.00	
3	80.000		
4	60.000		

ρ = 75

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000	50.000	
2	75.000	100.00	
3	80.000	75.000	
4	60.000		

ρ = 150

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
1	70.000	50.000	
2	75.000	100.00	
3	80.000	75.000	
4	60.000	150.00	

ρ = 150.00000

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
Factor de Fricción	1	70.000	50.000
	2	75.000	100.00
ρ (m²) de Manning	3	80.000	75.000
	4	60.000	150.00

ρ = 0.008

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
Factor de Fricción	1	70.000	50.000
	2	75.000	100.00
ρ (m²) de Manning	3	80.000	75.000
	4	60.000	150.00

ρ = 0.008

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO

	L (m)	D (mm)	ρ (m²)
Factor de Fricción	1	70.000	50.000
	2	75.000	100.00
ρ (m²) de Manning	3	80.000	75.000
	4	60.000	150.00

ρ = 0.008

F TERMINAR INIT FIX DEL EJE

```

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO
Factor de Friccion 1 70.000 50.000 0.0080
                2 75.000 100.00 0.0080
%2 de Manning 3 80.000 75.000 0.0080
                4 60.000 150.00
:0.016

```

```

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO
Factor de Friccion 1 70.000 50.000 0.0080
                2 75.000 100.00 0.0080
%2 de Manning 3 80.000 75.000 0.0080
                4 60.000 150.00 0.0160
:0.01600

```

```

▶DATOS TUBERIAS:PARALELO
Factor de Friccion 1 70.000 50.000 0.0080
                2 75.000 100.00 0.0080
%2 de Manning 3 80.000 75.000 0.0080
                4 60.000 150.00 0.0160
:0.00800

```

H.2.2.5 INGRESO DE LOS DATOS GENERALES DEL SISTEMA

```

▶Tuberias en PARALELO
Ingresar Valor
CONOCIDO [Q] o [hf]
•)Q en [m3/seg]
)hf en [m]

```

```

▶Tuberias en PARALELO
Ingresar Valor
CONOCIDO [Q] o [hf]
)Q en [m3/seg]
•)hf en [m]

```

```

▶Tuberias en PARALELO
Ingresar Nuevo Valor
hf en [m]
hf=5.75
hf=5.7500000

```

```

▶Tuberias en PARALELO
Ingresar Nuevo Valor
hf en [m]
hf=5.75
SI ESTA BIEN ESTE VALOR? NO

```

```

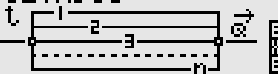
▶Tuberias en PARALELO
Ingresar Nuevo Valor
hf en [m]
hf=5.7500000
XORO/

```

```

▶Tuberias en PARALELO
•)Sistema UNIDADES
)Ingresar DATOS
)RESULTADOS
)Exit

```




H.2.3 RESULTADOS DEL SISTEMA

```

▶Tuberias en PARALELO
)Sistema UNIDADES
)Ingresar DATOS
•)RESULTADOS
)Exit

```



```

▶Tuberias en PARALELO
VALORES TOTALES DEL SISTEMA
Q en [m3/seg]
Q=0.075785149
hf en [m]
hf=5.7500000
XORO/

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
L [m] D [mm] %2 Coefic.
1 70.000 50.000 0.0080 Manning
2 75.000 100.00 0.0080 Manning
3 80.000 75.000 0.0080 Manning
4 60.000 150.00 0.0160 Manning
:70.00000
F/ TERMINAR F/

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
L [m] D [mm] %2 Coefic.
2 75.000 100.00 0.0080 Manning
3 80.000 75.000 0.0080 Manning
4 60.000 150.00 0.0160 Manning
S:
:0.00800
F/ TERMINAR F/

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
Coefic. [S] [S-L] [L2-S]
1 Manning 5722.3 400564 0.0016
2 Manning 141.93 10645 0.0097
3 Manning 658.29 52664 0.0044
4 Manning 65.311 3918.7 0.0160
:141.93196
F/ TERMINAR F/

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
Coefic. [S] [S-L] [L2-S]
2 Manning 141.93 10645 0.0097
3 Manning 658.29 52664 0.0044
4 Manning 65.311 3918.7 0.0160
S:
: 1001.2
F/ TERMINAR F/

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
1  0.0016  0.0500  0.0038  5.7500
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
:0.30668
F1 TERMINAR  F10

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
Σ= 1001.2  1.0000  0.0758  5.7500
:1.00000
F1 TERMINAR  F10

```

H.2.3.1 CAUDALES INDIVIDUALES DEL SISTEMA

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
1  0.0016  0.0500  0.0038  5.7500
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
:0.003788769
F1 TERMINAR  F10

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
1  0.0016  0.0500  0.0038  5.7500
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
:0.023241448
F1 TERMINAR  F10

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
1  0.0016  0.0500  0.0038  5.7500
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
:0.010449100
F1 TERMINAR  F10

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
1  0.0016  0.0500  0.0038  5.7500
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
:0.038305831
F1 TERMINAR  F10

```

H.2.3.2 CAUDAL TOTAL DEL SISTEMA

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
Σ= 1001.2  1.0000  0.0758  5.7500
:0.075785149
F1 TERMINAR  F10

```

H.2.3.3 PÉRDIDA DE CARGA INDIVIDUAL Y TOTAL DEL SISTEMA

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
1  0.0016  0.0500  0.0038  5.7500
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
:5.750000000
F1 TERMINAR  F10

```

```

▶SISTEMA TUBERIAS:PARALELO
  QBLI^Q  RG  Q[m³/s]  h(m)
2  0.0097  0.3067  0.0232  5.7500
3  0.0044  0.1379  0.0104  5.7500
4  0.0160  0.5055  0.0383  5.7500
Σ= 1001.2  1.0000  0.0758  5.7500
:5.750000000
F1 TERMINAR  F10

```

Para este sistema los valores totales son:

$$Q \text{ [m}^3\text{/s]} = 0.075785149$$

$$hf \text{ [m]} = 5.75$$

Los caudales individuales y total, así como las pérdidas de cargas individuales y total, según la “*Aplicación Informática*”, se observan en la tabla de abajo:

Nro.	Longitud [m]	Diámetro [mm]	"n" Manning	Material	Caudal [m ³ /s]	hf [m]
1	70	50	0.008	PVC	0.003788769	5.750
2	75	100	0.008	PVC	0.023241448	5.750
3	80	75	0.008	PVC	0.010449100	5.750
4	60	150	0.016	F°G°	0.038305831	5.750
TOTAL =					0.075785149	5.750

Tabla H.2.3.3.1 Datos geométricos, físicos, caudales individuales y total, Pérdidas de carga individuales y total – sistema de 4 Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia.

H.3 PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO SEGÚN LA TEORÍA PROPUESTA

H.3.1 FÓRMULAS A EMPLEAR

Se utilizarán las siguientes fórmulas:

$$hf = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \times Q^2 \dots\dots \text{Fórmula de Manning para tuberías}$$

H.3.1.1 FORMA ESTÁNDAR DE LA FÓRMULA DE MANNING

$$hf = B \times L \times (Q)^n \tag{1.3a}$$

Donde: $B = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}}; \quad n = 2$

H.3.1.2 FORMA ESTÁNDAR RESUMIDA DE LA FÓRMULA DE MANNING

$$hf = B \times L \times (Q)^n \quad (1.3a)$$

$$hf = R \times (Q)^n \quad (1.3b)$$

$$\text{Donde: } R = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L; \quad n = 2$$

H.3.1.3 FACTOR “R_T” PARA UN SISTEMA DE 4 TUBERÍAS EN PARALELO

$$R_T = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1} \right)^{(1/n)} + \left(\frac{1}{B_2 L_2} \right)^{(1/n)} + \left(\frac{1}{B_3 L_3} \right)^{(1/n)} + \left(\frac{1}{B_4 L_4} \right)^{(1/n)} \right]}$$

H.3.1.4 PÉRDIDA DE CARGA TOTAL EN SISTEMAS DE TUBERÍAS EN PARALELO

$$hf_P = \frac{Q^n}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{B_i L_i} \right]^{1/n} \right\}^n}$$

$$\frac{hf_P}{Q^n} = \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{B_i L_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.103)$$

$$\frac{hf_P}{Q^n} = \frac{1}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad \rightarrow \quad hf_P = \frac{Q^n}{\left\{ \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{R_i} \right]^{1/n} \right\}^n} \quad (2.104)$$

De la ecuación:

$$hf_p = (R_T)^n \times Q^n \quad (3.3)$$

Se puede obtener, ya sea la pérdida de carga o el caudal, cuando uno de ellos sea desconocido. Esto es posible debido a que la ecuación (3.3) esta escrita en forma explicita.

Si el caudal es conocido entonces la expresión a utilizar es la ecuación (3.3), y si la pérdida de carga es la variable desconocida, entonces se utilizara la expresión:

$$Q = \frac{(hf_p)^{1/n}}{R_T}$$

H.3.1.5 CAUDALES INDIVIDUALES POR TUBERÍA

$$Q_1 = R_T \times \left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{1/n} \times Q ; Q_1 = \frac{Q}{B_1 L_1} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_3 L_3}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_4 L_4}\right)^{1/n}\right]}$$

$$Q_2 = R_T \times \left(\frac{1}{B_2 L_2}\right)^{1/n} \times Q ; Q_2 = \frac{Q}{B_2 L_2} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_3 L_3}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_4 L_4}\right)^{1/n}\right]}$$

$$Q_3 = R_T \times \left(\frac{1}{B_3 L_3}\right)^{1/n} \times Q ; Q_3 = \frac{Q}{B_3 L_3} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_3 L_3}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_4 L_4}\right)^{1/n}\right]}$$

$$Q_4 = R_T \times \left(\frac{1}{B_4 L_4}\right)^{1/n} \times Q ; Q_4 = \frac{Q}{B_4 L_4} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{B_1 L_1}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_2 L_2}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_3 L_3}\right)^{1/n} + \left(\frac{1}{B_4 L_4}\right)^{1/n}\right]}$$

H.3.2 MEMORIA DE CÁLCULO

Se mostrara el cálculo del factor “ B_2 ” y de la renuencia individual “ R_2 ” para la tubería 2:

$$B = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \rightarrow B_2 = \frac{101.5936673 \times 0.000064}{9.869604401 \times 0.000004642} = 141.9319598$$

$$R = \frac{4^{(10/3)} \cdot \eta^2}{\pi^2 \cdot D^{(16/3)}} \times L \rightarrow R_2 = \frac{101.5936673 \times 0.000064}{9.869604401 \times 0.000004642} \times 75 = 10644.89699$$

En base a las fórmulas presentadas, se elaboró la tabla de abajo:

Nro.	Longitud [m]	Diámetro [mm]	"n" Manning	"B"	"Ri" Renuencia
1	70	50	0.008	5722.33804	400563.66304
2	75	100	0.008	141.931960	10644.89699
3	80	75	0.008	658.294351	52663.54807
4	60	150	0.016	65.311072	3918.66429
TOTAL =					31.64097200

Tabla H.3.2.1 Datos geométricos, físicos, factor “B” individuales, Renuencias individuales y Renuencia total – sistema de 4 Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia.

H.3.3 RESULTADOS DE CÁLCULO SEGÚN LA TEORÍA PROPUESTA

Estos valores se observan en la tabla de abajo:

Nro.	Longitud [m]	Diámetro [mm]	"n" Manning	Factor de Caudal	Caudal [m³/s]	hf [m]
1	70	50	0.008	0.04999356	0.00378876918	5.750
2	75	100	0.008	0.30667550	0.02324144846	5.750
3	80	75	0.008	0.13787793	0.01044909950	5.750
4	60	150	0.016	0.50545301	0.03830583137	5.750
TOTAL =				1.000	0.07578514850	5.750

Tabla H.3.3.1 Datos geométricos, físicos, factor de caudal individuales, Caudales individuales y Total, Perdidas de carga individuales y Total – sistema de 4 Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia.

H.4 RESULTADOS COMPARATIVOS

Estos resultados se observan al apreciar el error en los caudales individuales y total, según la tabla:

Nro.	Caudal [m ³ /s] APLICACIÓN (1)	Caudal [m ³ /s] TEORIA PROPUESTA (2)	$\Delta Q = \text{ABS}((1) - (2))$ [mL]
1	0.0037887690	0.00378876917534	0.000175342118429
2	0.0232414480	0.02324144846116	0.000461155915538
3	0.0104491000	0.01044909950032	0.000499680982355
4	0.0383058310	0.03830583136810	0.000368095588732
$\Sigma =$	0.0757851490	0.07578514850491	0.000495087359997

Tabla H.4.1 Datos Comparativos, Caudales individuales y Total, Diferencial de Caudal, sistema de 4 Tuberías en Paralelo, Elaboración Propia.

Sin embargo, la precisión numérica de los resultados en el caudal total del sistema puede apreciarse al comparar los originados por la aplicación informática con los resultados de la teoría propuesta en unidades comparables; en este caso se tomaron: [m³/s], [L] y [mL], tal como se observa en la tabla H.4.2.:

$Q[\text{m}^3/\text{s}] =$	0.0757851485049126	Valor obtenido por la teoría propuesta
$Q[\text{m}^3/\text{s}] =$	0.07578514900000	VALOR propuesto por la Aplicación Informática
[m ³ /s] =	0.00000000049509	Error absoluto entre ambos valores
[L] =	0.00000049508735	Error absoluto entre ambos valores en litros
[mL] =	0.00049508734612	Error absoluto entre ambos valores en mililitros

Tabla H.4.2 Resumen de Datos Comparativos, Elaboración Propia

H.5 CONCLUSIONES

Con el presente ejemplo numérico se ha demostrado que la teoría propuesta es altamente eficiente, cumpliéndose las hipótesis presentadas en el capítulo III.