

1. ANTECEDENTES

1.1 El problema

1.1.1 Introducción

Desde los años 60 se han ido desarrollando muchos programas de computadora con el objetivo de realizar una simulación numérica con propósito específico.

Existen muchos programas cuyo proceso de cálculo y resultados actúan en conjunto como una caja negra para el usuario, es decir, que sólo muestran al usuario los resultados y no muestran el procedimiento de cálculo.

Debido a esto Eduardo Daniel Farfán realizó un trabajo de investigación de en su proyecto de ingeniería civil, un programa de elementos finitos a código abierto del “proceso” para que el usuario pueda comprender el método, programar y automatizar el proceso de cálculo. En un programa de elementos finitos lo más complicado es generar la malla de elementos finitos (tablas de coordenadas de los nudos y tabla de nudos asociados a cada elemento, tabla de desplazamientos nodales conocidos, tablas de fuerzas en los nudos y tablas de fuerzas en los elementos) para lo cual se necesita analizar la parte analítica y el proceso para poder realizar el pre-proceso. El estudio de este trabajo se realizará sobre la base del programa antes mencionado.

1.1.2 Planteamiento

Todo programa de elementos finitos consta de un preproceso, proceso y un postproceso, por lo tanto de acuerdo al trabajo de investigación ya existente es necesario complementar al mismo el preproceso quedando todavía por complementar como otro trabajo de investigación futura el post proceso debido a que realizarlo tomaría más tiempo que con el que se cuenta en un semestre.

Este trabajo de investigación sólo versa en generar la malla de elementos finitos.

1.1.3 Formulación

Entre la variedad de métodos propuestos y de mayor aceptación en el estado vigente de la técnica se usará el lenguaje de programación adecuado se presentan los siguientes: Visual Basic, Debian, Visual estudio y LibreOffice.

1.1.4 Sistematización

De las 4 alternativas de lenguajes de programación propuestos se optará por el lenguaje de programación Visual Estudio debido a su gran aceptación en el medio y a su versatilidad.

El medio continuo puede ser discretizado en figuras cuya geometría sea conocida o desconocida, es decir, figuras regulares e irregulares. En este trabajo de investigación se discretizará el medio continuo en figuras cuya geometría es conocida tales como: geometrías triangulares, cuadradas, rectangulares y circulares.

1.2 Objetivos

Los objetivos del presente estudio son los siguientes:

1.2.1 General

Generar la malla de elementos finitos a partir de un programa informático (preproceso) para la discretización del medio continuo, bajo un lenguaje de programación adecuado en base a un programa que ha desarrollado sólo el proceso.

1.2.2 Específicos

- Generar las tablas de coordenadas de los nudos de acuerdo a la geometría del medio continuo.
- Generar la tabla de nudos asociados a cada elemento en función a la tabla de coordenadas de los nudos.
- Motivar, estimular y facilitar el aprendizaje del método de los elementos finitos a través de este programa (preproceso)
- Generar una herramienta didáctica para su uso en las materias teóricas de elementos finitos y afines.

- Generar una línea de investigación en análisis numérico u lenguaje de programación utilizando una metodología establecida.
- Discretizar el medio continuo de figuras cuya geometría sea conocida tales como: geometrías triangulares, cuadradas, rectangulares y circulares, en elementos finitos triangulares iguales.

1.3 Justificación

Las razones por las cuales se elabora el estudio propuesto son las siguientes:

1.3.1 Teórica

La investigación propuesta busca mediante la aplicación del lenguaje de programación Visual Estudio, enriquecer la base conceptual de programación y el criterio para el análisis de elementos estructurales mediante el método de los elementos finitos.

1.3.2 Metodológica

Para el cumplimiento de los objetivos de estudio, se acude a la complementación de un programa informático o software didáctico a código abierto realizado por Eduardo Daniel Farfán Duran el año 2012 en su proyecto de ingeniería civil “CREACION DE UN PROGRAMA DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL (A código abierto en Visual Basic con entorno a Excel)” puesto que éste permite al usuario una transparencia y flexibilidad del programa.

1.3.3 Práctica

Esta investigación propuesta ayudará a la mayor parte de los proyectistas estructurales y usuarios (estudiantes universitarios) a ser partícipes activamente del proceso de aprendizaje en el tema, observando y entendiendo cada subrutina que genere la malla de elementos finitos de una manera rápida y eficiente.

1.4 Marco de referencia

En este capítulo se desarrollará el marco teórico, conceptual, espacial y temporal del estudio:

1.4.1 Teórico

El MEF (método de los elementos finitos) permite obtener una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo) —sobre el que están definidas ciertas ecuaciones diferenciales en forma débil o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema— dividiéndolo en un número elevado de subdominios no-intersectantes entre sí denominados «elementos finitos». El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados «nodos». Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama «malla».

Los cálculos se realizan sobre una malla de puntos (llamados nodos), que sirven a su vez de base para discretización del dominio en elementos finitos. La generación de la malla se realiza usualmente con programas especiales llamados generadores de mallas, en una etapa previa a los cálculos que se denomina preproceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). La matriz de dicho sistema de ecuaciones se llama matriz de rigidez del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

Microsoft Visual Studio es un entorno de desarrollo integrado (IDE, por sus siglas en inglés) para sistemas operativos Windows. Soporta múltiples lenguajes de programación tales como C++, C#, Visual Basic .NET, F#, Java, Python, Ruby, PHP; al igual que entornos de desarrollo web como ASP.NET MVC, Django, etc., a lo cual sumarle las nuevas capacidades online bajo Windows Azure en forma del editor Monaco.

A partir de la versión 2005 Microsoft ofrece gratuitamente las *Ediciones Express*, que son versiones básicas separadas por lenguajes de programación o plataforma enfocadas; para estudiantes y programación amateur. Estas ediciones son iguales al entorno de desarrollo comercial, pero sin características avanzadas de integración. Dichas ediciones son:

- Visual Basic Express Edition
- Visual C# Express Edition
- Visual C++ Express Edition
- Visual J# Express Edition (Desapareció en Visual Studio 2008)
- Visual Web Developer Express Edition (para programar en ASP.NET)
- Visual F# (Apareció en Visual Studio 2010, es parecido al J#)*
- Windows Phone 8 SDK
- Windows Azure SDK

El lenguaje que se utilizó es el C# (pronunciado *si sharp* en inglés) es un lenguaje de programación orientado a objetos desarrollado y estandarizado por Microsoft como parte de su plataforma .NET, que después fue aprobado como un estándar por la ECMA (ECMA-334) e ISO (ISO/IEC 23270). C# es uno de los lenguajes de programación diseñados para la infraestructura de lenguaje común.

Su sintaxis básica deriva de C/C++ y utiliza el modelo de objetos de la plataforma .NET, similar al de Java, aunque incluye mejoras derivadas de otros lenguajes.

El nombre C Sharp fue inspirado por la notación musical, donde '#' (sostenido, en inglés *sharp*) indica que la nota (C es la nota do en inglés) es un semitono más alta, sugiriendo que C# es superior a C/C++. Además, el signo '#' se compone de cuatro signos '+' pegados.¹

Aunque C# forma parte de la plataforma .NET, ésta es una API, mientras que C# es un lenguaje de programación independiente diseñado para generar programas sobre dicha plataforma. Ya existe un compilador implementado que provee el marco Mono -DotGNU, el cual genera programas para distintas plataformas como Windows, Unix, Android, iOS, Windows Phone, Mac OS y GNU/Linux.

1.4.2 Conceptual

- Nodo: es un espacio real o abstracto en el que confluyen parte de las conexiones de otros espacios reales o abstractos que comparten sus mismas características y que a su vez también son nodos. Todos se interrelacionan de una manera no jerárquica y conforman lo que en términos sociológicos o matemáticos se llama malla.

- Malla: es un conjunto de nodos interconectados.
- Módulo de elasticidad: constante de proporcionalidad que define la relación entre esfuerzo y la deformación unitaria, es una medida de rigidez del elemento.
- Coeficiente de Poisson: es la relación que existe entre las deformaciones unitarias en dirección transversal y longitudinal, tiene un valor numérico que es único para un material en particular que sea homogéneo e isótropo.
- Esfuerzos: Son las resultantes que se generan en una determinada área debido a la acción de las cargas.
- Deformaciones: Es la relación que existe entre el desplazamiento y la longitud inicial del elemento estructural.
- Fuerza.- es una magnitud vectorial que mide la intensidad del intercambio de momento lineal entre dos partículas o sistemas de partículas .
- Elemento: cada una de las partes que forman un sistema constructivo.
- Cara: Cualquiera de los lados de un elemento finito triangular.
- Desplazamiento: se define como el cambio de posición de un cuerpo entre dos instantes o tiempos bien definidos.
- Código abierto: es la expresión con la que se conoce al software distribuido y desarrollado libremente , es decir, se puede leer, modificar y redistribuir el código fuente de un programa.

1.4.3 Espacial

Este estudio se la realizará en las asignaturas CIV-501 y CIV-502 de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Juan Misael Saracho en la ciudad de Tarija.

1.4.4 Temporal

Esta investigación se fundamenta en un programa que ha desarrollado solo el proceso que data del año 2012 realizado por Eduardo Daniel Farfán Duran en su proyecto de ingeniería civil “CREACIÓN DE UN PROGRAMA DE ANALISIS ESTRUCTURAL (A código abierto en Visual Basic con entorno a Excel)”.

Se estima que este programa tendrá vigencia por un periodo aproximado de 5 años.

El postproceso podrá ser realizado como un trabajo de investigación futura ya que el tiempo con el que se cuenta en el periodo de un semestre es insuficiente para realizar tanto en Preproceso como es postproceso durante el mismo semestre.

1.5 alcance de la investigación

1.5.1 Tipo de estudio

El estudio que se realizara en este trabajo es sólo analítico.

1.5.2 Hipótesis.

Para obtener en el preproceso los datos de entrada de manera rápida es necesario e indispensable disponer de una herramienta informática para la discretización del medio continuo de tal manera que se relacionen las variables comprometidas, por lo tanto, es fundamental involucrar las respuestas del mismo mediante un lenguaje de programación adecuado.

1.5.3 Aporte académico del estudiante

- Complementar el programa realizado por Eduardo Daniel Farfán Duran el año 2012 en su proyecto de ingeniería civil “CREACIÓN DE UN PROGRAMA DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL (A código abierto en Visual Basic con entorno a Excel)” generando la malla de elementos finitos de tal manera que los datos de entrada puedan ingresarse con mayor facilidad y en el menor tiempo posible.

En este trabajo solo se utiliza el elemento finito triangular.

2. ESTADO DEL ARTE

2.1 Concepto de Mecánica del Medio Continuo.

La mecánica del medio continuo o simplemente mecánica del continuo estudia el comportamiento mecánico de los sólidos y los fluidos en una escala macroscópica, ignorando

la naturaleza discontinua del material, el cual se considera uniformemente distribuido en la totalidad del cuerpo.

En la mecánica del continuo, una partícula de material se asocia a un punto del espacio ocupado por el cuerpo, al cual se le pueden atribuir cantidades de campo como la densidad, el desplazamiento y la velocidad entre otras. Dichas cantidades corresponden a funciones continuas en términos de la posición.

La mecánica es la ciencia que describe la interacción entre la fuerza y el movimiento. En consecuencia, las variables presentes en la mecánica del continuo son, por un lado, las variables relacionadas con las acciones como las fuerzas por unidad de superficie o de volumen, y por otro lado, las variables cinemáticas como el desplazamiento, la velocidad y la aceleración.

Las ecuaciones de la mecánica del continuo se pueden clasificar en dos grupos. El primer grupo corresponde a las ecuaciones aplicables a todos los materiales que describen las leyes universales de la física, como por ejemplo, la conservación de la masa y la conservación de la energía. Las expresiones del segundo grupo conocidas como ecuaciones constitutivas describen el comportamiento mecánico de los materiales en situaciones interesantes para la ingeniería o para la física.

Los problemas de la mecánica del continuo se observan dos etapas. En la primera se establece la formulación de las ecuaciones constitutivas que describan adecuadamente el comportamiento mecánico de los materiales. Mientras que en la segunda etapa se resuelve la ecuación constitutiva en conjunto con las ecuaciones generales de la mecánica del continuo, bajo las condiciones de borde apropiados.

2.2 Elemento Finito Triangular Lineal

El método del elemento finito es simplemente una técnica numérica para obtener la solución aproximada de un problema de campo, es decir aquellos problemas cuya solución implica la solución de ecuaciones diferenciales parciales con las condiciones de borde o frontera apropiadas. Convierte el manejo de ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones

algebraicas lineales, y su gran aceptación se debe principalmente a la facilidad con que estas ecuaciones pueden reunirse y resolverse por computadora.

El elemento triángulo es el elemento finito por excelencia. Es un comodín, ya que con él se puede aproximar cualquier forma estructural continua, plana o espacial, en forma de lámina (cascares) y bordes curvos, siempre que disminuya adecuadamente el tamaño de los mismos y, en consecuencia, se aumente su número en la discretización de la estructura continua; aunque, en la actualidad, existen ya estudiados tipos de elementos complejos que hacen frente a tales necesidades. ^[1]

Los criterios para garantizar la convergencia en el MEF es necesario definir dicho concepto, en el ámbito del MEF. Se dice que un análisis por el MEF es convergente si al disminuir el tamaño de los elementos, y por lo tanto aumentar el número de nudos y de elementos, la solución obtenida tiende hacia la solución exacta. Hay que indicar que en el análisis por el MEF, se introducen, además de la hipótesis de discretización, otras aproximaciones, que son fuentes de error en la solución: integración numérica, errores de redondeo por aritmética finita, etc.

Las funciones de interpolación elegidas para representar el estado de deformación de un medio continuo deben satisfacer una serie de condiciones, a fin de que la solución obtenida por el MEF, converja hacia la solución real.

Una condición necesaria para la convergencia de las funciones de aproximación es que para un tamaño finito los elementos finitos deben ser capaces de reproducir cualquier valor constante de los integrandos que pueda ocurrir en el límite del tamaño de los elementos tendiendo a cero. Así, por ejemplo, para un análisis de tensiones, la condición de convergencia implica que un elemento finito debe ser capaz de reproducir cualquier estado

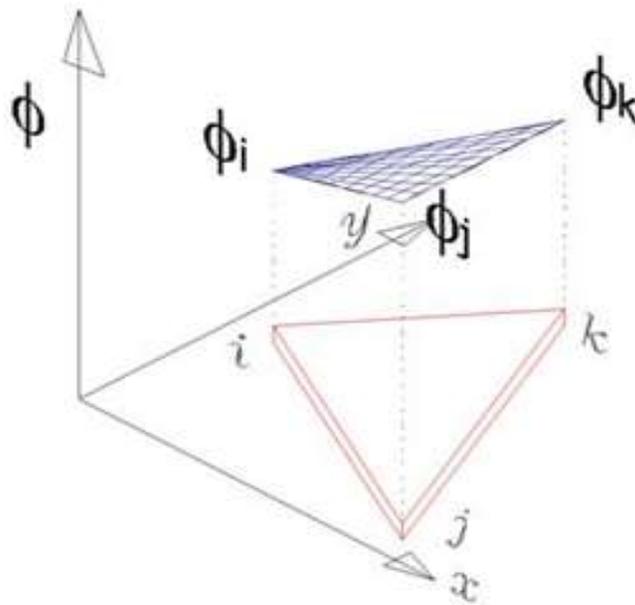
[1] El método de los elementos finitos en la ingeniería de estructuras, JOSE MARIA FORNONS. Pág. 96

de deformación constante. Ya que los integrandos, en este caso, son funciones de las derivadas primeras de los desplazamientos, la condición de convergencia implica que las funciones de aproximación deben ser capaces de reproducir cualquier variación lineal de desplazamientos sobre el elemento.

El elemento finito triangular lineal es un elemento finito bidimensional de aproximación lineal de 3 nudos, cuya función de aproximación o interpolación de todos los puntos interiores del elemento finito triangular están definidas únicamente para el elemento y son nulas en el exterior del elemento, la cual está definida para todo punto $(x; y)$ que pertenece al dominio del elemento $\Omega^{(e)}$ se puede escribir en términos de los valores nodales como:

$$\phi(x; y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$\forall E \Omega^{(e)}$$



$$\phi_i = \phi(x_i; y_i)$$

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i$$

$$\phi_j = \phi(x_j; y_j)$$

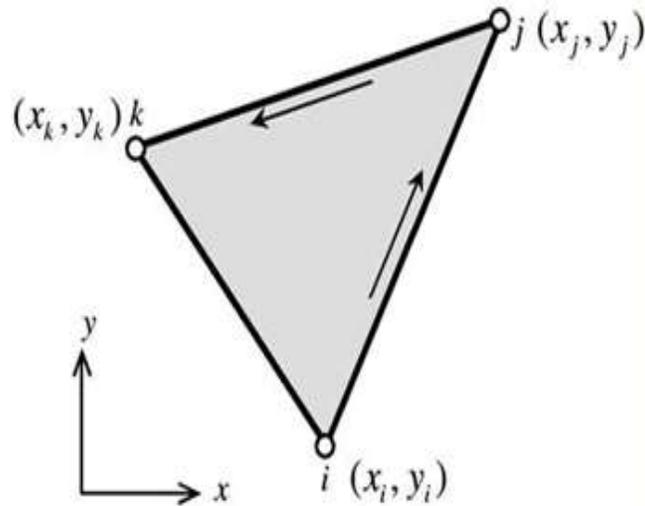
$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j$$

$$\phi_k = \phi(x_k; y_k)$$

$$\phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k$$

El cálculo vectorial es el lenguaje natural para tratar los problemas de campo, el álgebra de matrices es el lenguaje natural para la agrupación de ecuaciones algebraicas lineales, por lo tanto escribiendo en formato matricial los valores nodales se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$



Resolviendo el sistema de ecuaciones aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{\Delta} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{F_2}{\Delta} \quad y \quad \alpha_3 = \frac{F_3}{\Delta}$$

Donde las variables F_1, F_2, F_3 y Δ usando la regla de Cramer pueden escribirse como:

$$F_1 = (x_j y_k - x_k y_j) \phi_i + (x_k y_i - x_i y_k) \phi_j + (x_i y_j - x_j y_i) \phi_k$$

$$F_2 = (y_j - y_k) \phi_i + (y_k - y_i) \phi_j + (y_i - y_j) \phi_k$$

$$F_3 = (x_k - x_j) \phi_i + (x_i - x_k) \phi_j + (x_j - x_i) \phi_k$$

$$\Delta = (x_j y_k - x_k y_j) - (x_k y_i - x_i y_k) + (x_i y_j - x_j y_i)$$

El área de un triángulo en función de las coordenadas de sus vértices es posible expresarlo en un formato matricial, cuyo valor se obtiene mediante el determinante:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \{ (x_j y_k - x_k y_j) - (x_i y_k - x_k y_i) + (x_i y_j - x_j y_i) \}$$

Como consecuencia de esta ecuación el determinante Δ puede ser expresado en función del área del triángulo, multiplicando y dividiendo por 2 la ecuación resulta:

$$\Delta = 2 \left\{ \frac{1}{2} [(x_j y_k - x_k y_j) - (x_k y_i - x_i y_k) + (x_i y_j - x_j y_i)] \right\}$$

$$\Delta = 2A$$

Definiendo notación:

$$a_i = (x_j y_k - x_k y_j) \quad ; \quad b_i = (y_j - y_k) \quad ; \quad c_i = (x_k - x_j)$$

$$a_j = (x_k y_i - x_i y_k) \quad ; \quad b_j = (y_k - y_i) \quad ; \quad c_j = (x_i - x_k)$$

$$a_k = (x_i y_j - x_j y_i) \quad ; \quad b_k = (y_i - y_j) \quad ; \quad c_k = (x_j - x_i)$$

Entonces:

$$\alpha_1 = \frac{F_1}{\Delta} = \frac{a_i \phi_i + a_j \phi_j + a_k \phi_k}{2A}$$

$$\alpha_2 = \frac{F_2}{\Delta} = \frac{b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k}{2A}$$

$$\alpha_3 = \frac{F_3}{\Delta} = \frac{c_i \phi_i + c_j \phi_j + c_k \phi_k}{2A}$$

$$\phi = \phi(x; y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$\phi(x; y) = \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) \phi_i + (a_j + b_j x + c_j y) \phi_j + (a_k + b_k x + c_k y) \phi_k \}$$

Definiendo notación:

$$N_i^{(e)}(x; y) = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A}; N_j^{(e)}(x; y) = \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2A}; N_k^{(e)}(x; y) = \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2A}$$

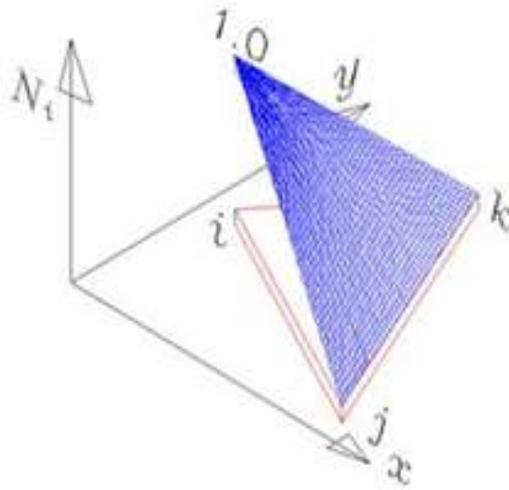
Por lo tanto puede escribirse como:

$$\phi(x; y) = N_i^{(e)} \phi_i + N_j^{(e)} \phi_j + N_k^{(e)} \phi_k$$

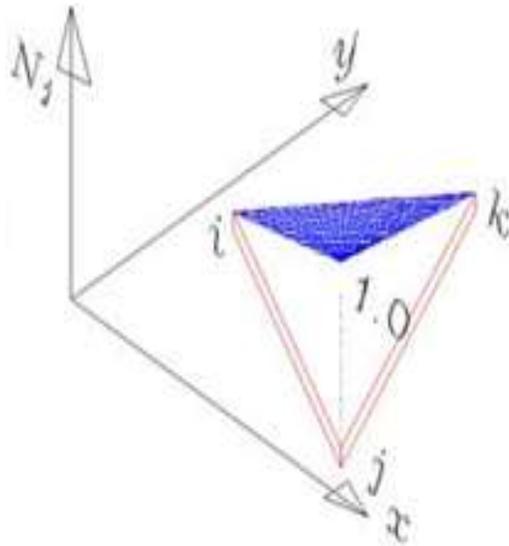
En la ecuación anterior, A es el área del elemento, en el cual se puede observar que si el elemento tiene área nula es decir dos nudos coincidentes, eso se manifiesta con $A = 0$ y no se podrían calcular las funciones de forma. Estas funciones son planos de valor 1 en uno de los tres nodos y 0 en los otros dos nodos.

Al ser las tres funciones de interpolación planos el cual se aproxima mediante una superficie poliédrica de facetas triangulares de la siguiente manera:

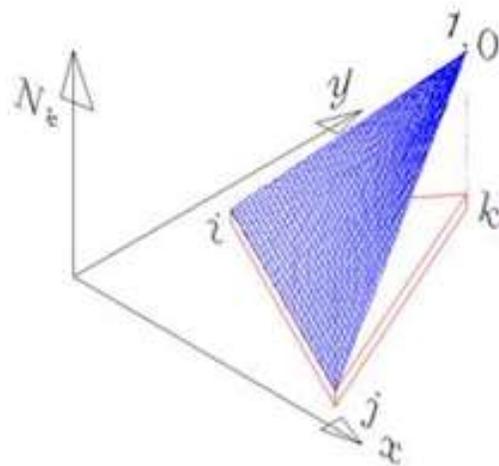
Función de interpolación para N_i :



Función de interpolación para N_j :



Función de interpolación para N_k :



Dónde:

$N_i^{(e)}$, $N_j^{(e)}$ y $N_k^{(e)}$ → Son denominados “Funciones de forma”.

Matriz de funciones de forma:

$$[N^{(e)}] = [N_i^{(e)} \quad N_j^{(e)} \quad N_k^{(e)}]$$

Vector de valores nodales:

$$\Phi^{(e)} = \begin{Bmatrix} \phi_i^{(e)} \\ \phi_j^{(e)} \\ \phi_k^{(e)} \end{Bmatrix} = \{\phi_i^{(e)} \quad \phi_j^{(e)} \quad \phi_k^{(e)}\}^T$$

Escribiendo las funciones de aproximación en formato matricial:

$$\phi = [N^{(e)}]\{\Phi^{(e)}\}$$
$$\phi = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} & N_k^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i^{(e)} \\ \phi_j^{(e)} \\ \phi_k^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Derivando parcialmente respecto de las variables x e y la función de aproximación se puede escribir como:

$$\frac{\partial \phi(x; y)}{\partial x} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} \phi_i^{(e)} + \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} \phi_j^{(e)} + \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial x} \phi_k^{(e)}$$
$$\frac{\partial \phi(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} \phi_i^{(e)} + \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} \phi_j^{(e)} + \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial y} \phi_k^{(e)}$$

En general, se indica con el símbolo ∇ al operador nabla definido como un vector operador diferencial en términos de las derivadas parciales con respecto a la posición x e y de la forma:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$$

Expresado en formato matricial:

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el operador nabla afectado por la función de aproximación resulta:

$$[\nabla]\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i^{(e)} \\ \phi_j^{(e)} \\ \phi_k^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Definiendo notación:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} ; \quad \{\Phi^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \phi_i^{(e)} \\ \phi_j^{(e)} \\ \phi_k^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$[B^e]$ → Matriz de operadores diferenciales

$\{\Phi^{(e)}\}$ → Vector de valores nodales

Por lo tanto la matriz de operadores diferenciales puede escribirse como:

$$[B^{(e)}] = [\nabla] [N^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & N_j^{(e)} & N_k^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$[\nabla] \phi = [\nabla] [N^{(e)}] \{\Phi^{(e)}\} = [B^{(e)}] \{\Phi^{(e)}\}$$

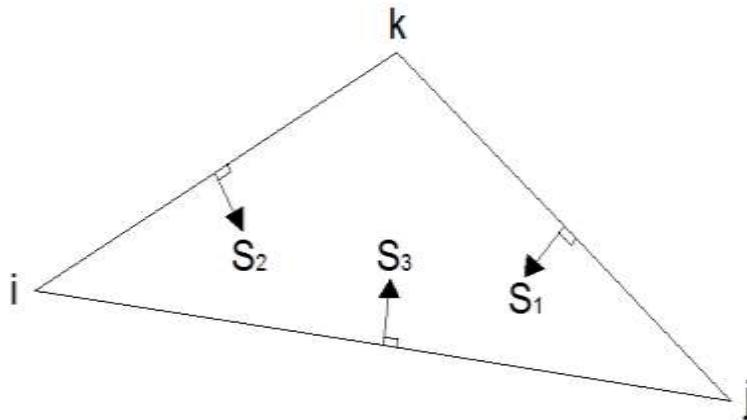
O también:

$$[\nabla]^T \phi = \{\Phi^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T$$

En conclusión la matriz de operadores diferenciales resulta:

$$[B^e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial x} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_j^{(e)}}{\partial y} & \frac{\partial N_k^{(e)}}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

Coordenadas de área.



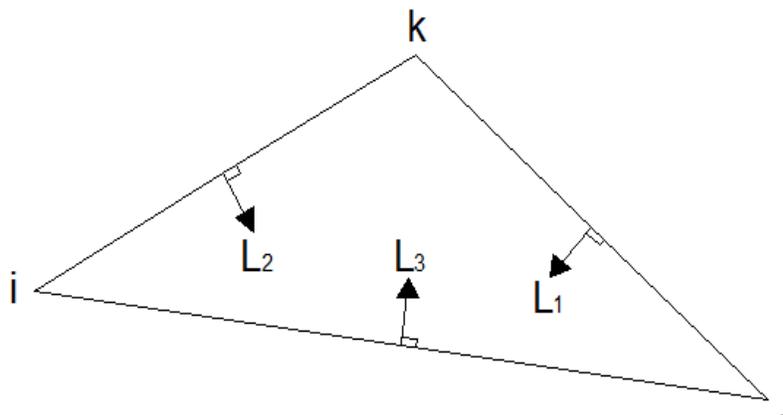
$$0 \leq S_i \leq h_i$$

Para convertir a una expresión adimensional dividimos a toda la inecuación por h_i de lo cual resulta:

$$\frac{0}{h_i} \leq \frac{S_i}{h_i} \leq \frac{h_i}{h_i}$$

$$0 \leq L_i \leq 1 \quad ; \quad L_i = \frac{S_i}{h_i}$$

$$L_1 = \frac{S_1}{h_1} \quad ; \quad L_2 = \frac{S_2}{h_2} \quad ; \quad L_3 = \frac{S_3}{h_3}$$

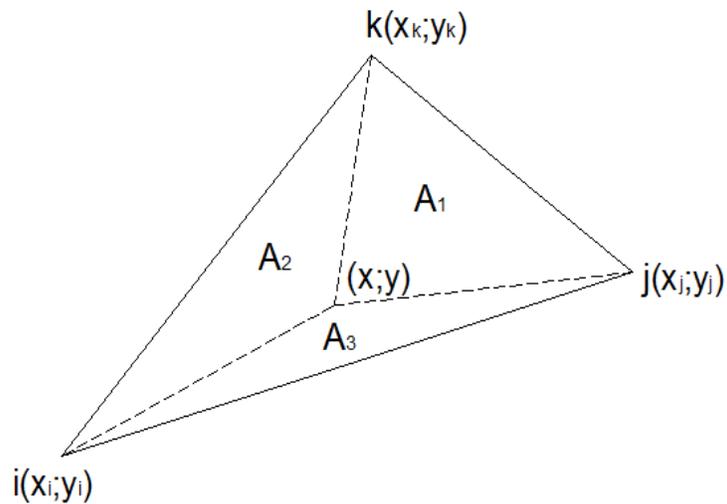
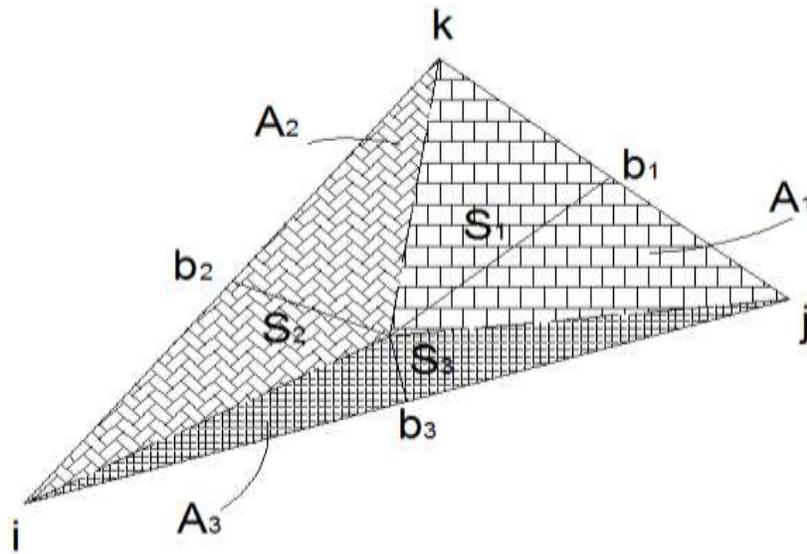


Multiplicando y dividiendo por un medio de sus lados correspondientes a cada caso, se tiene:

$$L_1 = \frac{S_1}{h_1} \begin{pmatrix} b_1 & \frac{1}{2} \\ b_1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{S_2}{h_2} \begin{pmatrix} b_2 & \frac{1}{2} \\ b_2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{A_2}{A}$$

$$L_3 = \frac{S_3}{h_3} \begin{pmatrix} b_3 & \frac{1}{2} \\ b_3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{A_3}{A}$$



$$A_1 = \frac{1}{2} \{ (x_j y_k - y_k y_i) + (y_i - y_k)x + (x_k - x_j)y \}$$

Donde:

$$a_i = (x_j y_k - x_k y_j) \quad ; \quad b_i = (y_j - y_k) \quad ; \quad c_i = (x_k - x_j)$$

Entonces:

$$A_1 = \frac{1}{2} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{(a_i + b_i x + c_i y)}{2A} = N_i^{(e)}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \{ (x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y \}$$

$$a_j = (x_k y_i - x_i y_k) \quad ; \quad b_j = (y_k - y_i) \quad ; \quad c_j = (x_i - x_k)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (a_j + b_j x + c_j y)$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{(a_j + b_j x + c_j y)}{2A} = N_j^{(e)}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \{ (x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y \}$$

$$a_k = (x_i y_j - x_j y_i) \quad ; \quad b_k = (y_i - y_j) \quad ; \quad c_k = (x_j - x_i)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} (a_k + b_k x + c_k y)$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{(a_k + b_k x + c_k y)}{2A} = N_k^{(e)}$$

Por lo tanto se concluye:

Las coordenadas de área \equiv *Funciones de Forma*

$$L_1 = N_i^{(e)}$$

$$L_2 = N_j^{(e)}$$

$$L_3 = N_k^{(e)}$$

En 1973 Eisenberg y Malvern demostraron que:

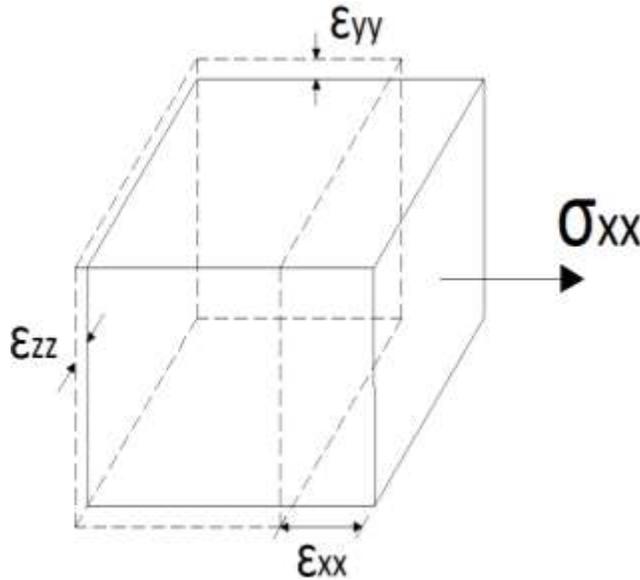
$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2A$$

$L_1^a L_2^b L_3^c$ = Coordenadas de área elevadas a potencias enteras.

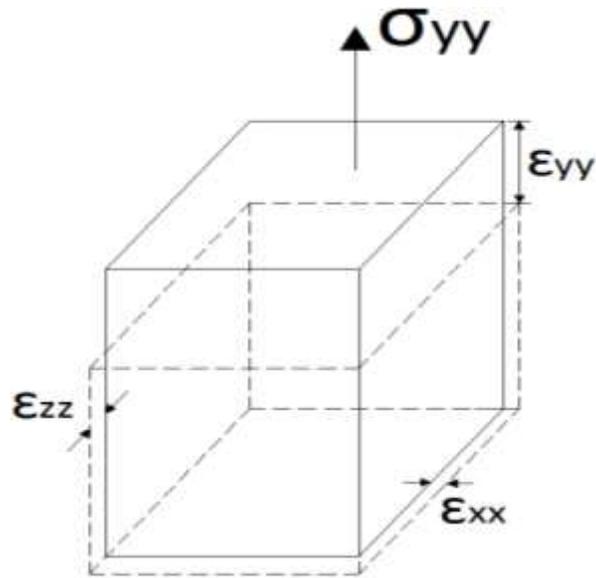
2.3 Ley generalizada de Hooke.

La relación de Poisson permite generalizar la aplicación de la ley de Hooke al caso de deformaciones por esfuerzos triaxiales. Por ejemplo, sea un paralelepípedo diferencial de lados paralelos a los ejes x-y-z sometido exclusivamente a esfuerzos normales bajo las siguientes condiciones:

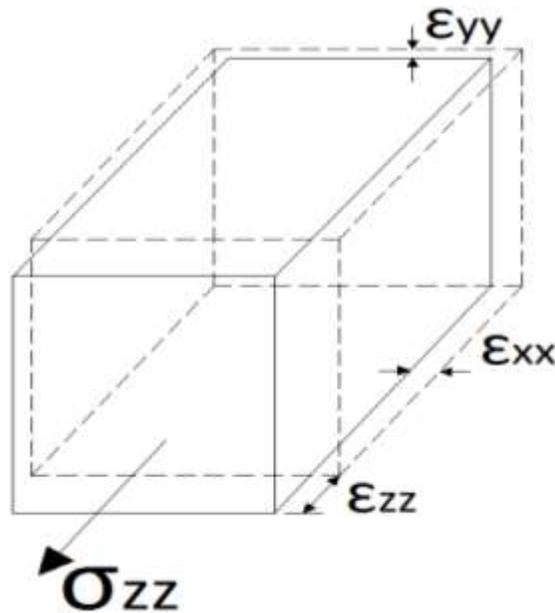
a) $\sigma_{xx} \neq 0$; $\sigma_{yy} = 0$ y $\sigma_{zz} = 0$



b) $\sigma_{xx} = 0$; $\sigma_{yy} \neq 0$ y $\sigma_{zz} = 0$



c) $\sigma_{xx} = 0$; $\sigma_{yy} = 0$ y $\sigma_{zz} \neq 0$



En materiales elásticos lineales isótropos, la deformación lateral asociada a la contracción transversal es proporcional a la deformación axial asociada al alargamiento longitudinal.

a) Sí: $\sigma_{xx} \neq 0$; $\sigma_{yy} = 0$ y $\sigma_{zz} = 0$

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon'_{xx} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

El cociente entre la deformación en la dirección lateral y la deformación en dirección axial se conoce como la relación de Poisson y se define como:

$$\frac{\varepsilon'_{yy}}{\varepsilon'_{xx}} = \frac{\varepsilon'_{zz}}{\varepsilon'_{xx}} = -\nu \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_{yy} = -\nu\varepsilon'_{xx} \quad y \quad \varepsilon'_{zz} = -\nu\varepsilon'_{xx}$$

Recordando que una deformación longitudinal positiva está relacionada con el alargamiento del sólido, mientras que un valor negativo de deformación longitudinal está asociado al acortamiento del mismo.

El signo menos en la expresión anterior indica que el alargamiento en la dirección axial está acompañado de un acortamiento lateral y viceversa.

Reemplazando $\varepsilon'_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$ en ε'_{yy} y ε'_{zz} la ecuación queda:

$$\varepsilon'_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad y \quad \varepsilon'_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

b) Sí: $\sigma_{xx} = 0$; $\sigma_{yy} \neq 0$ y $\sigma_{zz} = 0$

$$\sigma_{yy} = E\varepsilon''_{yy} \quad \rightarrow \quad \varepsilon''_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

$$\frac{\varepsilon''_{xx}}{\varepsilon''_{yy}} = \frac{\varepsilon''_{zz}}{\varepsilon''_{yy}} = -\nu \quad \rightarrow \quad \varepsilon''_{xx} = -\nu\varepsilon''_{yy} \quad y \quad \varepsilon''_{zz} = -\nu\varepsilon''_{yy}$$

Reemplazando $\varepsilon''_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}$ en ε''_{xx} y ε''_{zz} la ecuación queda:

$$\varepsilon''_{xx} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad y \quad \varepsilon''_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{yy}}{E}$$

c) Sí: $\sigma_{xx} = 0$; $\sigma_{yy} = 0$ y $\sigma_{zz} \neq 0$

$$\sigma_{zz} = E\varepsilon'''_{zz} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'''_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\frac{\varepsilon'''_{xx}}{\varepsilon'''_{zz}} = \frac{\varepsilon'''_{yy}}{\varepsilon'''_{zz}} = -\nu \quad \rightarrow \quad \varepsilon'''_{xx} = -\nu\varepsilon'''_{zz} \quad y \quad \varepsilon'''_{yy} = -\nu\varepsilon'''_{zz}$$

Considerando que los esfuerzos cortantes sólo producen deformaciones angulares, las deformaciones longitudinales unitarias obtenidas de la acción de los esfuerzos normales son

La deformada unitaria total sobre el eje x-x:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xx} + \varepsilon'''_{xx}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \}$$

La deformada unitaria sobre el eje y-y:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon'_{yy} + \varepsilon''_{yy} + \varepsilon'''_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \}$$

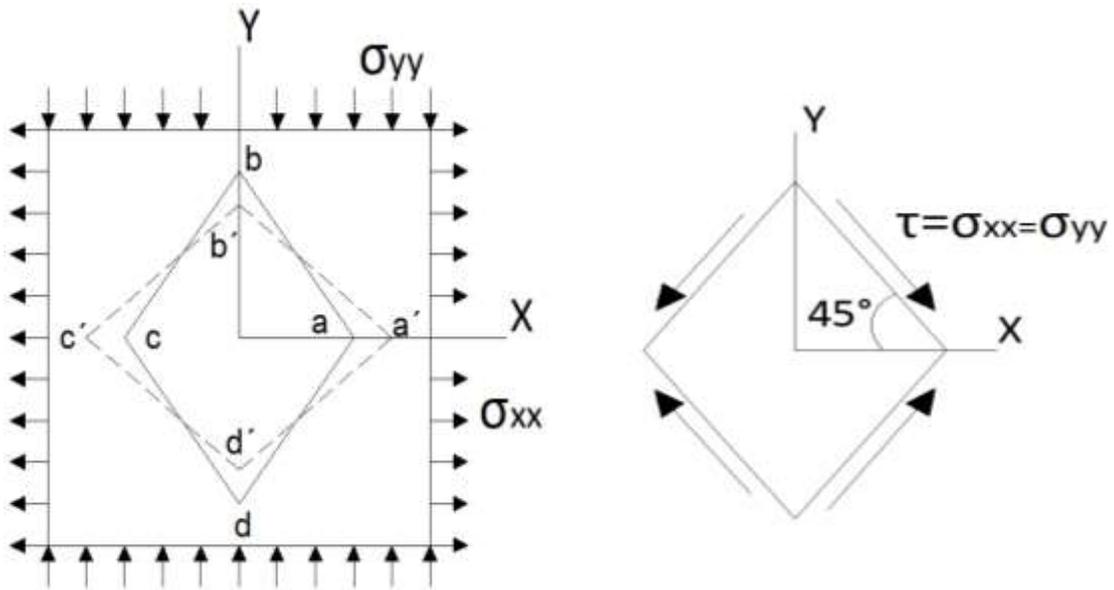
La deformada unitaria sobre el eje z-z:

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon'_{zz} + \varepsilon''_{zz} + \varepsilon'''_{zz}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \}$$

2.4 Relación entre el módulo elástico transversal y el módulo elástico longitudinal.

El estado de esfuerzos representado en la figura consiste en una tensión σ_{xx} y una compresión σ_{yy} de la misma magnitud. Para esfuerzos en secciones inclinadas cuyo ángulo con la vertical es 45° como el de la figura está sometido a esfuerzo cortante puro τ es numéricamente igual a σ_{xx} y a σ_{yy} . Este esfuerzo cortante deforma al elemento abcd según el contorno punteado $a'b'c'd'$ de la figura. El ángulo recto en a y c ha disminuido a $(90^\circ - \gamma)$, si γ es la distorsión o deformación angular. En el mismo instante, el ángulo recto en b y d ha aumentado en γ , por lo que ahora su valor es $(90^\circ + \gamma)$.



Consideremos la deformación del triángulo rectángulo isósceles aob. Como:

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \tau$$

Deduciendo de las deformaciones ε_{xx} y ε_{yy} en un plano x e y:

a) Sí: $\sigma_{xx} \neq 0$ y $\sigma_{yy} = 0$

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon'_{xx} \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} = \frac{\tau}{E}$$

$$\frac{\varepsilon'_{yy}}{\varepsilon'_{xx}} = -\nu \quad \rightarrow \quad \varepsilon'_{yy} = -\nu \varepsilon'_{xx} = -\nu \frac{\tau}{E}$$

b) Sí: $\sigma_{xx} = 0$ y $\sigma_{yy} \neq 0$

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon''_{yy} \quad \rightarrow \quad \varepsilon''_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} = -\frac{\tau}{E}$$

$$\frac{\varepsilon''_{xx}}{\varepsilon''_{yy}} = -\nu \quad \rightarrow \quad \varepsilon''_{xx} = -\nu \varepsilon''_{yy} = \nu \frac{\tau}{E}$$

La deformada unitaria sobre el eje x - x:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon'_{xx} + \varepsilon''_{xx}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\tau}{E} + \nu \frac{\tau}{E} = \frac{\tau(1 + \nu)}{E}$$

La deformada unitaria sobre el eje $y - y$:

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon'_{yy} + \varepsilon''_{yy}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\tau}{E} - \frac{\tau}{E} = -\frac{\tau(1 + \nu)}{E}$$

$$\text{tag} \varphi = \text{tag} \left(45 - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{ob'}{oa'}$$

Del triángulo de deformaciones se tiene que:

$$bb' + ob' = ob \quad \rightarrow \quad ob' = ob - bb'$$

$$aa' + oa = oa'$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{aa'}{oa} \quad \rightarrow \quad aa' = oa \varepsilon_{xx}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{bb'}{ob} \quad \rightarrow \quad bb' = -ob \varepsilon_{yy}$$

Reemplazando estas ecuaciones en $\text{tag} \varphi$:

$$\text{tag} \varphi = \text{tag} \left(45 - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{ob'}{oa'} = \frac{ob - bb'}{aa' + oa} = \frac{ob + ob \varepsilon_{yy}}{oa \varepsilon_{xx} + oa} = \frac{ob(1 + \varepsilon_{yy})}{oa(1 + \varepsilon_{xx})}$$

Pero $oa = ob$ y reemplazando las deformaciones unitarias ε_{xx} y ε_{yy} :

$$\text{tag} \left(45 - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{1 - \frac{\tau(1 + \nu)}{E}}{1 + \frac{\tau(1 + \nu)}{E}} = \frac{E - \tau(1 + \nu)}{E + \tau(1 + \nu)}$$

Por identidades trigonométricas:

$$\text{tag} \left(45 - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\text{tag} 45 - \text{tag} \frac{\gamma}{2}}{1 + \text{tag} 45 \text{tag} \frac{\gamma}{2}}$$

Pero la $\tan 45 = 1$ y para ángulos muy pequeños γ como son los de distorsión, la tangente coincide con el ángulo expresado en radianes, es decir $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2}$:

$$\frac{\tan 45 - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan 45 \tan \frac{\gamma}{2}} = \frac{2 - \gamma}{2 + \gamma}$$

$$2E - 2\tau - 2\tau\nu + \gamma E - \gamma\tau - \gamma\tau\nu = 2E + 2\tau + 2\tau\nu - \gamma E - \gamma\tau - \gamma\tau\nu$$

$$\frac{\tau}{\gamma} = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

El esfuerzo de corte puro es $\tau = G\gamma$ despejando el módulo de elasticidad transversal o módulo de rigidez al corte $G = \frac{\tau}{\gamma}$ la ecuación resulta:

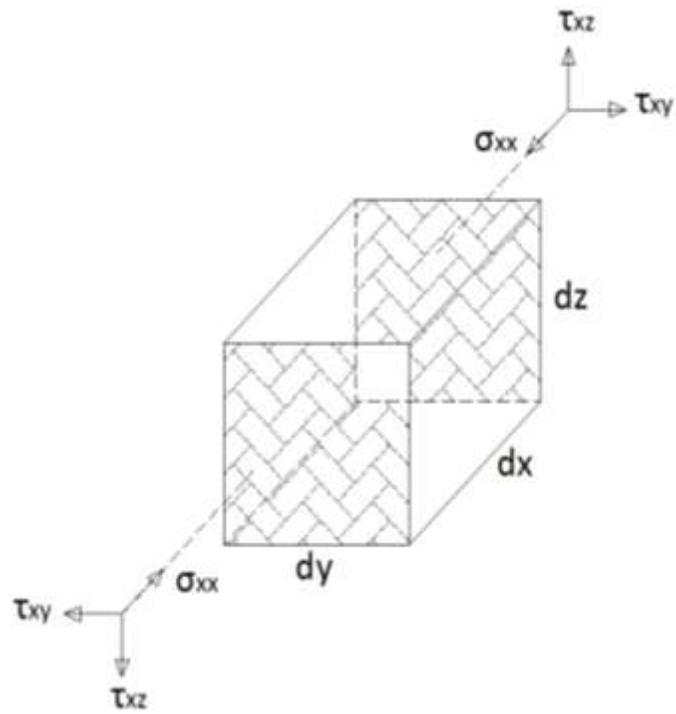
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

2.5 Matriz de tensiones $[T]$ del sólido elástico.

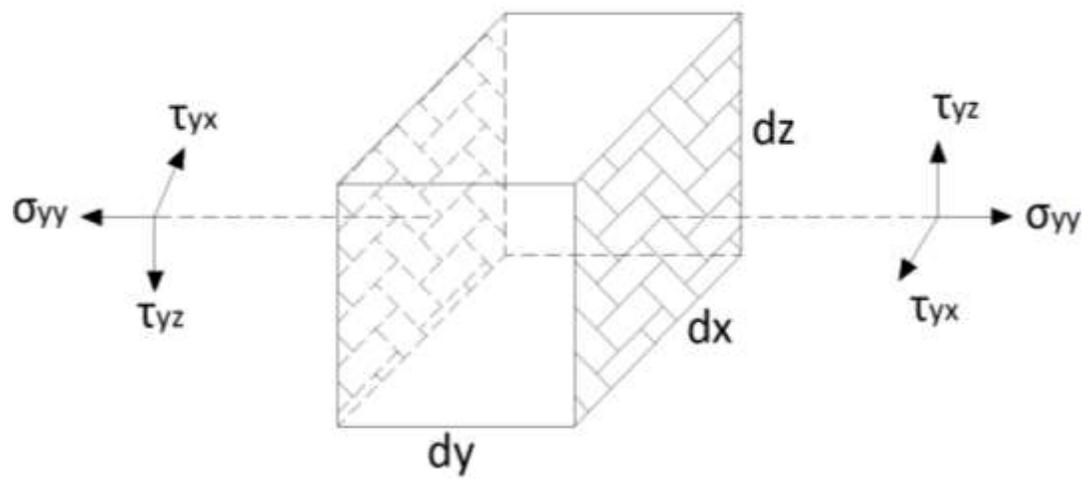
Para la obtención de la matriz de tensiones se analiza un elemento diferencial de volumen de lados dx , dy y dz , el cual está sometido a esfuerzos normales como esfuerzos cortantes en sus respectivas caras o superficies, para lo cual existen esfuerzos de igual magnitud pero opuestos en dirección de tal manera que se garantice el equilibrio interno como externo en el elemento diferencial.

Analizando los esfuerzos para cada cara en particular se tiene que:

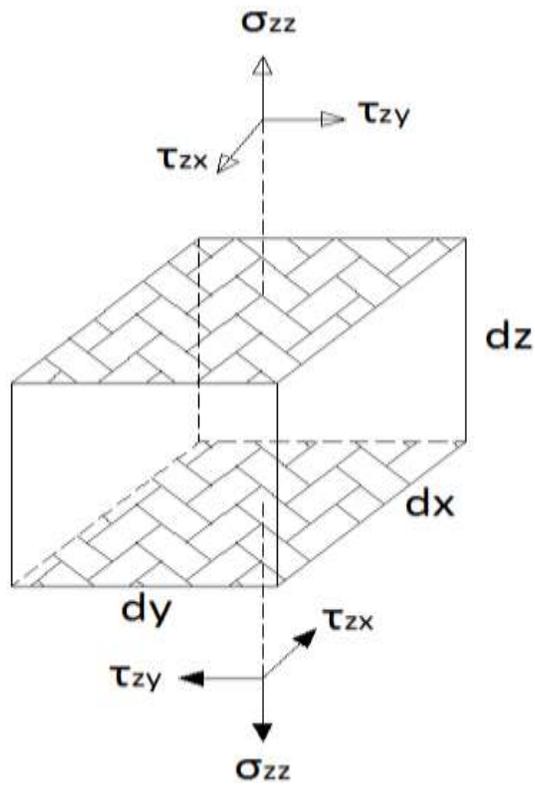
Cara o superficie “x”



Cara o superficie “y”



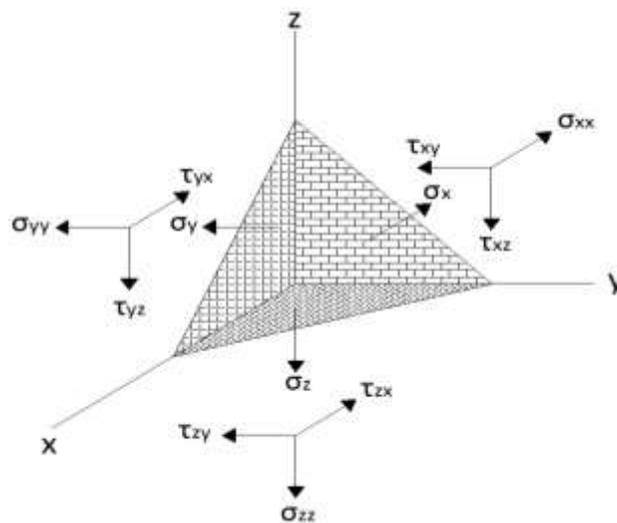
Cara o superficie “z”



Las áreas respectivas en las caras o superficies son:

$$A_z = dx \, dy \quad ; \quad A_y = dx \, dz \quad ; \quad A_x = dy \, dz$$

Haciendo un corte al diferencial de volumen se tiene:



Garantizando el equilibrio de rotación se tiene que:

$$\sum M_x = 0$$

$$\tau_{zy}(A_z)(dz) - \tau_{yz}(A_y)(dy) = 0$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$$\sum M_y = 0$$

$$\tau_{zx}(A_z)(dz) - \tau_{xz}(A_x)(dx) = 0$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\sum M_z = 0$$

$$\tau_{xy}(A_x)(dx) - \tau_{yx}(A_y)(dy) = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

El diferencial de área se expresa en forma vectorial como:

$$\overrightarrow{dA} = dA \hat{u}_n$$

Donde el vector unitario normal a la superficie sobre el cual actúa puede escribirse como:

$$\hat{u}_n = \alpha \hat{i} + \beta \hat{j} + \gamma \hat{k}$$

Donde:

$$\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \text{cosenos directores}$$

Entonces garantizando el equilibrio de traslación se tiene que:

$$\sigma_x = \sigma_{xx} \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} \alpha + \sigma_{yy} \beta + \tau_{zy} \gamma$$

$$\sigma_z = \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta + \tau_{zz} \gamma$$

Escribiendo en un formato matricial:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Donde:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de tensiones}$$

En conclusión la matriz de tensiones es aquella matriz que nos permite determinar todos los posibles valores de esfuerzos en un punto cualquiera del sólido en función al plano de corte. Es una matriz simétrica porque se cumple las leyes de la estática para cualquier punto del sólido elástico.

2.6 Descripción del movimiento y la deformación.

Conceptos básicos:

A continuación se presentan algunos conceptos básicos de la mecánica del medio continuo indispensables para describir el movimiento y la deformación:

- ❖ El **vector posición** es aquél que determina la ubicación de un punto en el espacio y en el tiempo. Como todo vector, las componentes de la posición están referidas a un sistema coordenado específico.
- ❖ El **tiempo** es el sistema de medida de la secuencia de sucesos representado mediante una cantidad escalar. En general el instante de tiempo inicial es igual a cero y se denomina tiempo de referencia $t = 0$.
- ❖ **Punto espacial** se define como una posición fija en el espacio, es decir, invariante con respecto del tiempo. En cambio, punto material o partícula es un lugar en el espacio de posición relativa cambiante con el tiempo, relacionada con el movimiento de un cuerpo.

- ❖ **Cuerpo material** es el conjunto de partículas que ocupan posiciones diferentes en el espacio durante el movimiento a lo largo del tiempo.
- ❖ El lugar geométrico de las partículas de un cuerpo material con respecto a un sistema coordenado fijo en un instante de tiempo se define como **configuración** del cuerpo en ese instante. La configuración de un cuerpo en el instante de tiempo de referencia $t = 0$ se denomina **configuración material o de referencia** Ω_0 . En cambio la **configuración actual** en t indicada como Ω_t corresponde a la configuración de un cuerpo en un instante de tiempo $t = t$.
- ❖ El **volumen material** se define como aquel volumen móvil conformado siempre por las mismas partículas, el cual es útil cuando las partículas conservan cierta proximidad durante el movimiento. En cambio, el **volumen de control** corresponde a un volumen fijo en el espacio que es atravesado por las partículas durante su movimiento y se utiliza cuando las partículas se dispersan con el movimiento.

Campo del desplazamiento y de la velocidad.

Se denomina desplazamiento de una partícula al cambio de posición de la misma entre la configuración de referencia y la configuración actual. Al igual que la posición, el desplazamiento es una cantidad vectorial, la cual está definida como la resta entre el vector posición en la configuración actual y el vector posición en la configuración de referencia.

El campo del desplazamiento de un cuerpo es una función que define el vector desplazamiento para cada partícula que lo conforma, en un instante de tiempo t . recordando que las coordenadas materiales establecen la posición en la configuración de referencia, la cual es independiente del tiempo, se puede considerar a la variación del desplazamiento con respecto al tiempo como una definición alternativa de la velocidad.

Concepto y teorías de la deformación.

En general un cuerpo en movimiento cambia en su posición, orientación, tamaño y forma. Si tal cuerpo cambia exclusivamente de posición y orientación se denomina cuerpo rígido, en cambio, si el cuerpo modifica su tamaño o su forma se denomina cuerpo deformable.

La distorsión y el alargamiento o simplemente las distorsiones son los cambios de forma y de tamaño de un cuerpo después de aplicado un desplazamiento presentado entre la configuración de referencia o no deformada y la configuración actual o deformada. Las distorsiones están medidas en unidades de longitud.

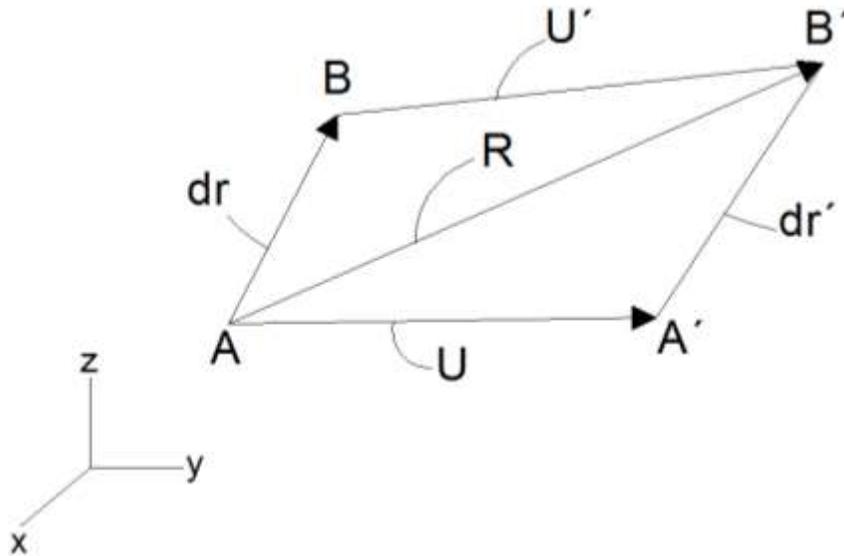
La deformación puede definirse como la medida geométrica de las distorsiones que representa el desplazamiento relativo entre partículas de un cuerpo, es decir, una medida de la cantidad de desplazamiento que difiere localmente del movimiento del cuerpo rígido. La deformación es una cantidad adimensional la cual se expresa habitualmente en porcentaje o fracciones decimales.

De acuerdo con la magnitud de la deformación, el análisis mecánico de sólidos se puede clasificar según las siguientes teorías:

- ❖ En la **teoría de deformación infinitesimal o teoría de las pequeñas deformaciones** se considera que los desplazamientos, las rotaciones y las deformaciones de las partículas de un cuerpo son pequeñas. En este caso, la configuración actual es muy parecida a la configuración de referencia. Las deformaciones de los materiales más comunes en la construcción de obras civiles tales como el concreto y el acero se pueden considerar infinitesimales bajo condiciones de carga habituales.
- ❖ La **teoría de deformación finita o teoría de grandes deformaciones** establece que los desplazamientos, las rotaciones y las deformaciones son arbitrariamente grandes. En tal caso, la configuración actual de un cuerpo es sustancialmente diferente con respecto a su configuración de referencia. Algunos materiales descritos mediante la teoría de deformación finita son las gomas, los elastómeros y los tejidos biológicos suaves.
- ❖ La **teoría de grandes desplazamientos o teoría de grandes rotaciones** considera que los desplazamientos y las rotaciones pueden ser grandes mientras las deformaciones son pequeñas.

2.7 Matriz de deformaciones $[\varepsilon]$ del sólido elástico

Sean A y B dos partículas ubicadas inicialmente antes de la acción de las cargas en un entorno diferencial dentro de un cuerpo material, para la cual el vector definido por la línea \overline{AB} es \overline{dr} , y sea A' y B' las nuevas posiciones de dichas partículas luego de la acción de las cargas para la cual el vector definido por la línea $\overline{A'B'}$ es $\overline{dr'}$.



Escribiendo el vector \overline{dr} , resulta:

$$\overline{dr} = d_x \hat{i} + d_y \hat{j} + d_z \hat{k}$$

Escribiendo el vector de desplazamiento \overline{U} en forma vectorial:

$$\overline{U} = u(x; y; z) \hat{i} + v(x; y; z) \hat{j} + w(x; y; z) \hat{k}$$

El diferencial \overline{dU} puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \overline{dU} = & \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \hat{j} \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \hat{k} \end{aligned}$$

El cambio vectorial puede escribirse como:

$$\vec{U}' = \vec{U} + d\vec{U}$$

Escribiendo en un formato matricial el cambio vectorial se tiene que:

$$\{\vec{U}'\} = \{\vec{U}\} + [A]\{\vec{dr}\}$$

$$\begin{Bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

Escribiendo la matriz $[A]$ de otra forma valiéndose de artificios se tiene que:

$$[A] = \frac{[A] + [A]^T}{2} + \frac{[A] - [A]^T}{2}$$

Donde:

$$[\varepsilon] = \frac{[A] + [A]^T}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Matriz simétrica}$$

$$[H] = \frac{[A] - [A]^T}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Matriz antisimétrica}$$

Entonces el vector $\{\vec{U}'\}$ queda definido como:

$$\{\vec{U}'\} = \{\vec{U}\} + [A]\{\vec{dr}\}$$

$$\{\vec{U}'\} = \{\vec{U}\} + ([\varepsilon] + [H])\{\vec{dr}\}$$

La resultante vectorial puede escribirse como:

$$\{\vec{R}\} = \{\vec{U}'\} + \{\vec{dr}\}$$

O también:

$$\{\vec{R}\} = \{\vec{U}\} + \{\vec{dr}\}$$

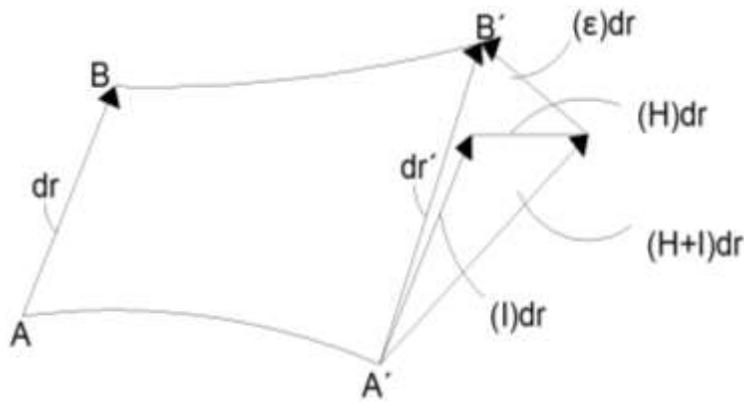
Igualando estas dos últimas expresiones se tiene:

$$\{\vec{U}'\} + \{\vec{dr}'\} = \{\vec{U}\} + \{\vec{dr}\}$$

Reemplazando $\{\vec{U}'\}$ en esta última expresión:

$$(\{\vec{U}\} + ([\varepsilon] + [H])\{\vec{dr}\}) + \{\vec{dr}'\} = \{\vec{U}\} + \{\vec{dr}\}$$

$$\{\vec{dr}'\} = [\varepsilon]\{\vec{dr}\} + [I]\{\vec{dr}\} + [H]\{\vec{dr}\}$$



Como:

$[I]\{\vec{dr}\} \rightarrow$ es un vector en la posición inicial de las partículas sin deformarse, por lo tanto no afecta en la distorsión que experimentan las partículas.

$[H]\{\vec{dr}\} \rightarrow$ es una matriz ortogonal que sólo cambia la dirección del vector \vec{dr} y no así su magnitud, en consecuencia no afecta la distorsión que experimentan las partículas.

Por lo tanto según las dos hipótesis anteriores haciendo las respectivas simplificaciones resulta que la deformación es igual a:

$$\{\vec{dr}'\} = [\varepsilon]\{\vec{dr}\}$$

Escribiendo la matriz $[\varepsilon]$ como:

$$[\varepsilon] = \frac{[A] + [A]^T}{2}$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Como:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Entonces:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de deformaciones}$$

En conclusión la matriz de deformaciones es aquella matriz que relaciona el desplazamiento presentado entre la configuración de referencia no deformada y la configuración actual o deformada. Es una matriz simétrica porque al ser compatible con los esfuerzos deben reflejar igual simetría.

2.8 Modelo constitutivo de un material elástico lineal

Modelos constitutivos:

El comportamiento mecánico real de los materiales es bastante complejo, sin embargo es posible establecer la relación entre el esfuerzo y la deformación durante el proceso de carga mediante modelos matemáticos denominados modelos constitutivos. La aplicación de dichos

modelos depende del orden de magnitud de la deformación y de las características mecánicas del material, entre otras.

Los modelos constitutivos describen el comportamiento de un material bajo diferentes acciones, principalmente mecánicas. La respuesta mecánica de los materiales está expresada en términos del esfuerzo, la deformación y las variables internas. Estas últimas describen el efecto de la historia de carga sobre las propiedades actuales.

En general los modelos constitutivos están formados por la ecuación constitutiva, el criterio de fluencia o de fractura, las leyes de evolución y las condiciones de carga y descarga.

La ecuación constitutiva es la expresión que define al esfuerzo (o el incremento del esfuerzo) en función de la deformación (o del incremento de la deformación), en un instante de tiempo y para todo punto material.

El criterio de fluencia o de fractura establece la condición límite para el cual el estado de esfuerzos o deformaciones de una partícula describe un comportamiento elástico. Para los materiales dúctiles tal condición se denomina criterio de fluencia y para materiales frágiles se llama criterio de fractura.

Las leyes de evolución son expresiones que definen la historia en el tiempo de las variables internas del modelo constitutivo. Como su nombre lo indica, las condiciones de carga y descarga establecen cuando un punto material se encuentra en régimen de carga o descarga.

A pesar de la diversidad en la representación del comportamiento mecánico de un material, a continuación se indican algunas características indispensables de todo modelo constitutivo:

- ❖ **Homogeneidad dimensional.** La dimensión de cada uno de los términos de la relación constitutiva debe ser la misma.
- ❖ **Sistema coordenado indiferente.** Aunque se pueda expresar con respecto a un sistema coordenado específico, las relaciones constitutivas son independientes del sistema coordenado escogido.

- ❖ **Objetividad material.** Las relaciones constitutivas no cambian con respecto a la traslación y rotación del marco de referencia. Por ejemplo, el movimiento del sólido rígido no afecta su estado de esfuerzos.

Los tipos de formulación matemática utilizados para obtener las relaciones constitutivas son los siguientes:

- ❖ El **formato algebraico** relaciona los esfuerzos y deformaciones mediante la relación constitutiva de un modelo elástico lineal que está dada de la forma $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon}$ donde \mathbf{C} la matriz constitutiva elástica y depende de las constantes elásticas del material y $\boldsymbol{\varepsilon}$ el vector de deformaciones.
- ❖ El **formato integral** es una representación funcional donde las componentes de la matriz de esfuerzos son el resultado de las derivadas parciales de un potencial $W(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij})$ con respecto a las componentes de deformación, es decir $\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}$
- ❖ El **formato diferencial** establece una relación constitutiva tangente de la forma $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{tan} : d\boldsymbol{\varepsilon}$, definida a partir de elementos diferenciales de esfuerzo $d\boldsymbol{\sigma}$ y de deformación $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Este formato permite almacenar las variables internas las cuales memorizan los cambios inelásticos de las propiedades materiales.

Material elástico:

Elasticidad es la propiedad física de un sólido de regresar a su configuración de referencia después de retiradas las acciones impuestas sobre él, en otras palabras, no hay deformación en el sólido después de la descarga.

Un material se denomina elástico si cumple con tal propiedad y además el tensor de esfuerzos es una función única del tensor de deformaciones. En cambio un material se define como inelástico si después de la descarga existe una deformación permanente.

Material elástico lineal:

Para un material elástico lineal se establece que el campo tensorial de esfuerzos es una función lineal del campo de deformaciones. Asimismo, considera que los gradientes de desplazamiento son pequeños con respecto a la unidad.

Para muchos problemas de ingeniería el modelo elástico lineal ofrece resultados satisfactorios, tal es el caso de estructuras bajo cargas de servicio con materiales como el concreto y el acero.

2.9 Matriz constitutiva $[D]$ del sólido elástico

Escribiendo en formato matricial la matriz $[D]$ que relaciona los esfuerzos con las deformaciones:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &\rightarrow \text{Vector de esfuerzos} \\ [D] &\rightarrow \text{Matriz constitutiva} \\ \{\varepsilon\} &\rightarrow \text{Vector de deformaciones} \end{aligned}$$

De la ley generalizada de Hooke:

$$\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz} = E\varepsilon_{xx}$$

$$-\nu\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz} = E\varepsilon_{yy}$$

$$-\nu\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} + \sigma_{zz} = E\varepsilon_{zz}$$

Escribiendo en un formato matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E\varepsilon_{xx} \\ E\varepsilon_{yy} \\ E\varepsilon_{zz} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema aplicando la regla de Cramer:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_1}{\Delta} \quad ; \quad \sigma_{yy} = \frac{F_2}{\Delta} \quad y \quad \sigma_{zz} = \frac{F_3}{\Delta}$$

Donde:

$$F_1 = (1 + \nu)(1 - \nu)E\varepsilon_{xx} + (1 + \nu)\nu E\varepsilon_{yy} + (1 + \nu)\nu E\varepsilon_{zz}$$

$$F_2 = (1 + \nu)\nu E\varepsilon_{xx} + (1 + \nu)(1 - \nu)E\varepsilon_{yy} + (1 + \nu)\nu E\varepsilon_{zz}$$

$$F_3 = (1 + \nu)\nu E\varepsilon_{xx} + (1 + \nu)\nu E\varepsilon_{yy} + (1 + \nu)(1 - \nu)E\varepsilon_{zz}$$

$$\Delta = (1 + \nu)(1 - 2\nu)(1 + \nu)$$

Entonces:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \{(1 - \nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}\}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \{\nu\varepsilon_{xx} + (1 - \nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}\}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \{\nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + (1 - \nu)\varepsilon_{zz}\}$$

Por otro lado, la deformación angular es proporcional al esfuerzo cortante o tangencial en dicho plano de la forma:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Despejando las componentes de esfuerzo cortante se tiene que:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{(1 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)}\gamma_{xy} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{2} \gamma_{xy} \right\}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{(1 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)}\gamma_{xz} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{2} \gamma_{xz} \right\}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \frac{(1 - 2\nu)}{(1 - 2\nu)}\gamma_{yz} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \left\{ \frac{(1 - 2\nu)}{2} \gamma_{yz} \right\}$$

Escribiendo las ecuaciones resultantes de los esfuerzos:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \{(1 - \nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{zz}\}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ \nu \varepsilon_{xx} + (1-\nu) \varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{zz} \}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ \nu \varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy} + (1-\nu) \varepsilon_{zz} \}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{2} \gamma_{xy} \right\}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{2} \gamma_{xz} \right\}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{2} \gamma_{yz} \right\}$$

Escribiendo en un formato matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz constitutiva $[D]$ es igual a la siguiente expresión:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

La matriz constitutiva de un material lineal isótropo está definida por las constantes elásticas y las componentes de esfuerzo y de deformación las cuales también se pueden expresar en función a las constantes de Lamé que son las siguientes:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Escribiendo los esfuerzos en función a las constantes de Lamé resulta:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}$$

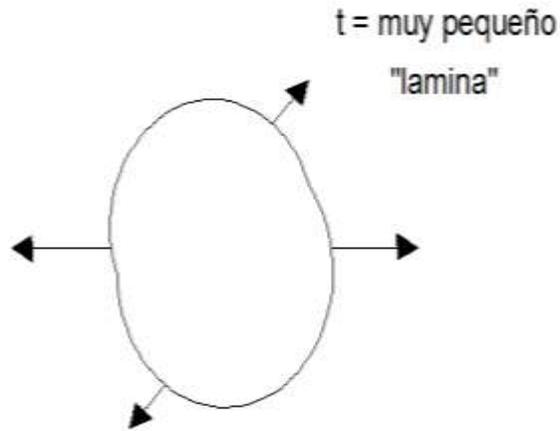
Escribiendo en notación de Voigt:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

En conclusión la matriz constitutiva, es aquella matriz que relaciona los esfuerzos con las deformaciones, para un material elástico lineal e isótropo solo depende de dos constantes que son: el coeficiente de Poisson y el Módulo de elasticidad longitudinal o Módulo de Young. Es simétrica debido a que las matrices de esfuerzos y deformaciones reflejan igual simetría.

2.10 Condición Plana de Esfuerzos

El estado plano o condición plana de esfuerzos es una simplificación del estado tridimensional, en el cual las componentes de esfuerzo contenidas en un plano coordenado específico pueden ser diferentes de cero, mientras que las componentes de esfuerzo que no están contenidas en un plano específico o en planos paralelos son nulas.



Por lo tanto, si el sólido describe una condición plana de esfuerzos en el plano xy los esfuerzos y deformaciones resultantes son las siguientes:

$$\sigma_{xx} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xx} \neq 0$$

$$\sigma_{yy} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy} \neq 0$$

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{zz} \neq 0$$

$$\tau_{xy} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_{xy} \neq 0$$

$$\tau_{xz} = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_{xz} = 0$$

$$\tau_{yz} = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_{yz} = 0$$

Se observa que a pesar que las componentes de esfuerzo fuera del plano xy son nulas, la componente de deformación longitudinal ε_{zz} en la dirección z es diferente de cero y depende de las otras dos componentes de deformación longitudinal.

Entonces las ecuaciones de las deformaciones longitudinales resultan:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} \}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} \}$$

Escribiendo en un formato matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E\varepsilon_{xx} \\ E\varepsilon_{yy} \end{Bmatrix}$$

Resolviendo el sistema aplicando la regla de Cramer:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_1}{\Delta}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F_2}{\Delta}$$

Donde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -\nu \\ -\nu & 1 \end{vmatrix} = 1 - \nu^2$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} E\varepsilon_{xx} & -\nu \\ E\varepsilon_{yy} & 1 \end{vmatrix} = E\varepsilon_{xx} + \nu E\varepsilon_{yy}$$

$$F_2 = \begin{vmatrix} 1 & E\varepsilon_{xx} \\ -\nu & E\varepsilon_{yy} \end{vmatrix} = E\varepsilon_{yy} + \nu E\varepsilon_{xx}$$

Entonces:

$$\sigma_{xx} = \frac{F_1}{\Delta} = \frac{E\varepsilon_{xx} + \nu E\varepsilon_{yy}}{1 - \nu^2} = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{F_2}{\Delta} = \frac{E\varepsilon_{yy} + \nu E\varepsilon_{xx}}{1 - \nu^2} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{yy} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} \left(\frac{1 - \nu}{1 - \nu} \right) = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{1 - \nu}{2} \gamma_{xy} \right)$$

Escribiendo en un formato matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

La deformada en la dirección z es:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Pero:

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \{ \nu\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy} + (1 - \nu)\varepsilon_{zz} \} = 0$$

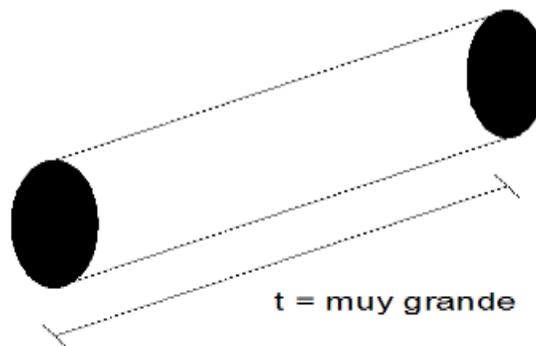
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{\nu - 1}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

Luego:

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{\nu}{\nu - 1}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

2.11 Condición Plana de Deformaciones

El estado plano o condición plana de deformaciones es una simplificación del estado tridimensional, en el cual las componentes de deformación contenidas en un plano coordenado específico pueden ser diferentes de cero y en aquél en el cual las componentes de deformación que no están contenidas en un plano específico (o en planos paralelos) son nulas.



Por lo tanto, si el sólido describe una condición plana de deformaciones en el plano xy las deformaciones y esfuerzos resultantes son los siguientes:

$$\varepsilon_{xx} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{xx} \neq 0$$

$$\varepsilon_{yy} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{yy} \neq 0$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{zz} \neq 0$$

$$\gamma_{xy} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{xy} \neq 0$$

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{yz} = 0$$

Se observa que a pesar que las componentes de deformación fuera del plano xy son nulas, la componente de esfuerzo normal en la dirección z es diferente de cero y depende de las otras dos componentes de esfuerzo normal.

Entonces los esfuerzos resultantes son:

$$\sigma_{xx} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{xx} + \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{\nu\varepsilon_{xx} + (1-\nu)\varepsilon_{yy}\}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{(1-2\nu)}{(1-2\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{2} \gamma_{xy} \right\}$$

Escribiendo en un formato matricial:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

El esfuerzo en la dirección z es:

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\}$$

Pero:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\} = 0$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

Luego:

$$\sigma_{zz} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

2.12 Formato matricial del elemento finito

El vector de desplazamientos dentro del elemento finito triangular puede expresarse como:

$$\{U^{(e)}\} = [N^{(e)}]\{a^{(e)}\}$$

Donde:

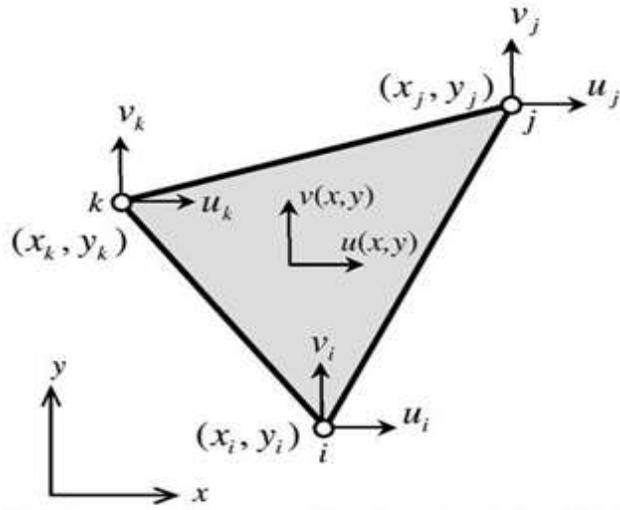
$\{U^{(e)}\}$ → *Vector de desplazamientos*

$[N^{(e)}]$ → *Matriz de funciones de forma*

$\{a^{(e)}\}$ → *Vector de desplazamientos nodales*

Por lo tanto:

$$\{U^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{Bmatrix}$$



La matriz de funciones de forma en un formato matricial puede expresarse como:

$$[N^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

El vector de desplazamientos nodales en un formato matricial puede escribirse como:

$$\{a^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Entonces:

$$\{U^{(e)}\} = [N^{(e)}]\{a^{(e)}\}$$

$$\begin{Bmatrix} u^{(e)} \\ v^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} & 0 & N_2^{(e)} & 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ u_3^{(e)} \\ v_3^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Expresando las matrices y vectores para el elemento finito triangular:

$$[N_i^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & N_i^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$[B_i^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

$$\{a_i^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{Bmatrix}$$

$$[N^{(e)}] = \begin{bmatrix} [N_1^{(e)}] & [N_2^{(e)}] & [N_3^{(e)}] \end{bmatrix}$$

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} [B_1^{(e)}] & [B_2^{(e)}] & [B_3^{(e)}] \end{bmatrix}$$

$$\{a^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \\ a_3^{(e)} \end{Bmatrix}$$

El vector de deformaciones también puede escribirse como:

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{a^{(e)}\}$$

Donde la matriz de rigidez puede escribirse como:

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV$$

La fuerza en el elemento finito triangular queda expresado como:

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma} [N^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} dS + \int_V [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV$$

Donde:

$$\{f_s^{(e)}\} = \int_{\Gamma} [N^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} dS \quad \rightarrow \quad \text{Vector de fuerzas de superficie}$$

$$\{f_b^{(e)}\} = \int_V [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV \quad \rightarrow \quad \text{Vector de fuerzas de cuerpo}$$

Entonces:

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Gamma} [N^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} dS + \int_V [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV = \{f_s^{(e)}\} + \{f_b^{(e)}\}$$

2.13 Condiciones de carga

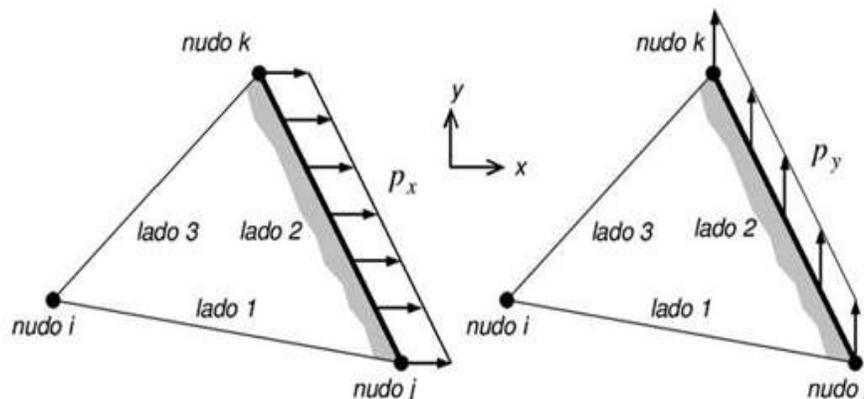
Las condiciones de carga que intervienen en el elemento finito triangular lineal en una condición plana de esfuerzos y deformaciones son las fuerzas de superficie y las fuerzas de cuerpo o de volumen, las cuales dependen del tipo de problema, la geometría y la función de aproximación del elemento.

Fuerzas de superficie:

Las fuerzas de superficie son acciones distribuidas en una superficie específica en el contorno del sólido o dentro de él, que actúan por contacto directo con otro cuerpo.

El vector de fuerzas de superficie puede escribirse como:

$$\{f_s^{(e)}\} = \int_{\Gamma} [N^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} dS$$



Donde:

$$[N^{(e)}]^T = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\{P^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} P_x^{(e)} \\ P_y^{(e)} \end{Bmatrix}$$

El diferencial de superficie puede expresarse como:

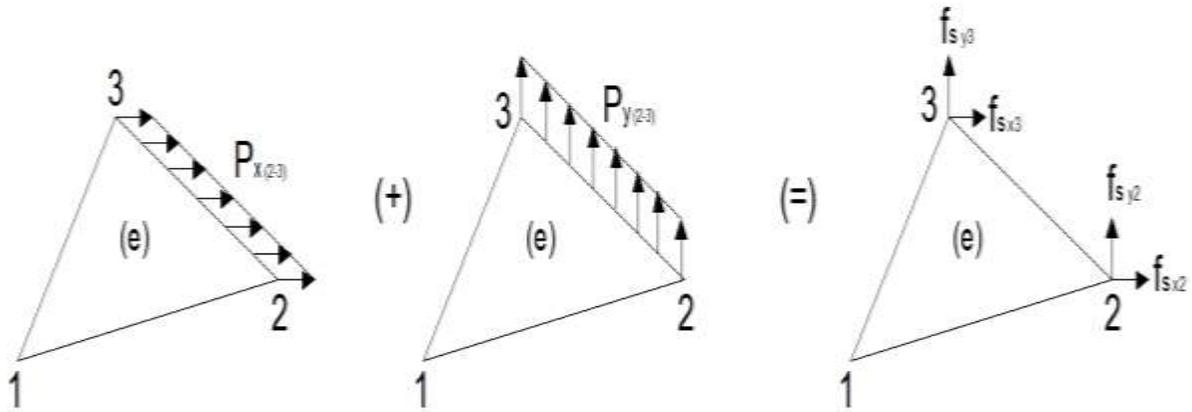
$$dS = t dL$$

Entonces el vector de fuerzas de superficie en las tres caras puede escribirse de la siguiente forma:

$$\{f_s^{(e)}\} = \int_{\Gamma} [N^{(e)}]^T \{P_{1-2}^{(e)}\} dS + \int_{\Gamma} [N^{(e)}]^T \{P_{2-3}^{(e)}\} dS + \int_{\Gamma} [N^{(e)}]^T \{P_{1-3}^{(e)}\} dS$$

$$\{f_s^{(e)}\} = \int_{L_{1-2}^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x_{1-2}}^{(e)} \\ P_{y_{1-2}}^{(e)} \end{Bmatrix} t dL + \int_{L_{2-3}^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x_{2-3}}^{(e)} \\ P_{y_{2-3}}^{(e)} \end{Bmatrix} t dL$$

$$+ \int_{L_{1-3}^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{x_{1-3}}^{(e)} \\ P_{y_{1-3}}^{(e)} \end{Bmatrix} t dL$$



Se va trabajar con presión uniforme es decir:

$$P_{x_{2-3}}^{(e)} \text{ y } P_{y_{2-3}}^{(e)} = \text{ctte}$$

Por lo que:

$$f_{sx2} = f_{sx3} = \frac{P_{x_{2-3}}^{(e)} L_{2-3}^{(e)}}{2}$$

$$f_{sy2} = f_{sy3} = \frac{P_{y_{2-3}}^{(e)} L_{2-3}^{(e)}}{2}$$

Cualquier elemento finito triangular nunca va a tener una distribución de esfuerzos en las 3 caras, asumiendo como máximo en 2 caras, para demostrar las anteriores 2 ecuaciones se tiene que:

$$\int_{A^{(e)}} L_1^a L_2^b L_3^c dA = \int_{A^{(e)}} N_1^a N_2^b N_3^c = \frac{a! b! c!}{(a + b + c + 2)!} 2A$$

Como las coordenadas de área son iguales a las funciones de forma se tiene que:

$$N_i = l_i = \text{coordenadas de área}$$

Entonces:

$$\int_{L_{ij}^{(e)}} L_i^a L_j^b dL = \int_{L_{ij}^{(e)}} N_i^a N_j^b dL = \frac{a! b!}{(a + b + 1)!} L_{ij}^{(e)}$$

$$\int_{L_{ij}^{(e)}} N_i^{(e)} dL = \int_{L_{ij}^{(e)}} N_j^{(e)} dL = \frac{1! 0!}{(1+0+1)} L_{ij}^{(e)} = \frac{1}{2} L_{ij}^{(e)}$$

Reemplazando esta última expresión en $\{f_s^{(e)}\}$ e integrando se tiene:

$$\{f_s^{(e)}\} = \frac{1}{2} L_{1-2}^{(e)} t \begin{Bmatrix} P_{x_{1-2}}^{(e)} \\ P_{y_{1-2}}^{(e)} \\ P_{x_{1-2}}^{(e)} \\ P_{y_{1-2}}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} L_{2-3}^{(e)} t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{x_{2-3}}^{(e)} \\ P_{y_{2-3}}^{(e)} \\ P_{x_{2-3}}^{(e)} \\ P_{y_{2-3}}^{(e)} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} L_{1-3}^{(e)} t \begin{Bmatrix} P_{x_{1-3}}^{(e)} \\ P_{y_{1-3}}^{(e)} \\ 0 \\ 0 \\ P_{x_{1-3}}^{(e)} \\ P_{y_{1-3}}^{(e)} \end{Bmatrix}$$

Fuerzas de cuerpo o de volumen:

Las fuerzas de cuerpo son acciones distribuidas en el volumen del sólido las cuales actúan a distancia como por ejemplo las fuerzas gravitacionales, inerciales o magnéticas.

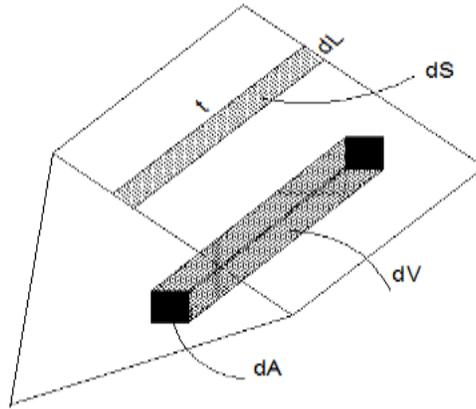
El vector de fuerzas de cuerpo puede escribirse como:

$$\{f_b^{(e)}\} = \int_V [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV$$

Donde:

$$[N^{(e)}]^T = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$\{b^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \end{Bmatrix}$$



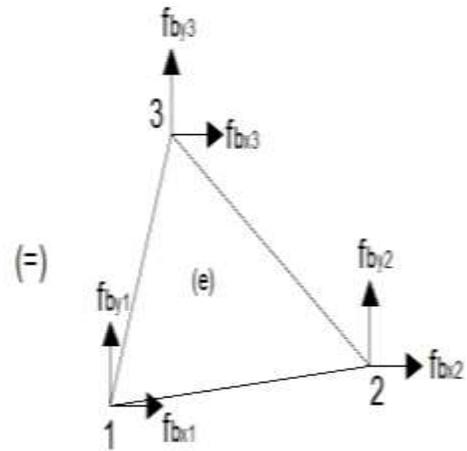
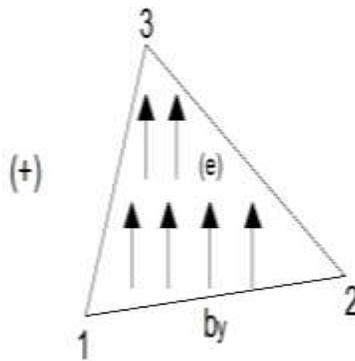
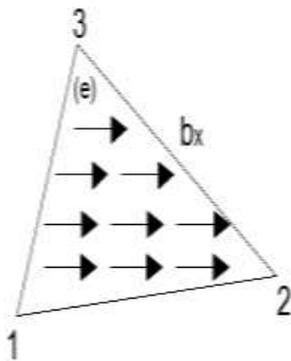
El diferencial de volumen puede expresarse como:

$$dV = t dA$$

Entonces el vector de fuerzas de cuerpo en el elemento finito, puede escribirse como:

$$\{f_b^{(e)}\} = \int_V [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV$$

$$\{f_b^{(e)}\} = \int_{A^{(e)}} \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & 0 \\ 0 & N_1^{(e)} \\ N_2^{(e)} & 0 \\ 0 & N_2^{(e)} \\ N_3^{(e)} & 0 \\ 0 & N_3^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \end{Bmatrix} t dA$$



Utilizando submatrices:

$$\{f_b^{(e)}\} = \begin{pmatrix} \{f_{b_1}^{(e)}\} \\ \{f_{b_2}^{(e)}\} \\ \{f_{b_3}^{(e)}\} \end{pmatrix}$$

$$\{f_{b_i}^{(e)}\} = \int_{A^{(e)}} [N_i^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} t dA \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

Sustituyendo las funciones de forma:

$$N_{i(x,y)}^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_i + b_i x + c_i y)$$

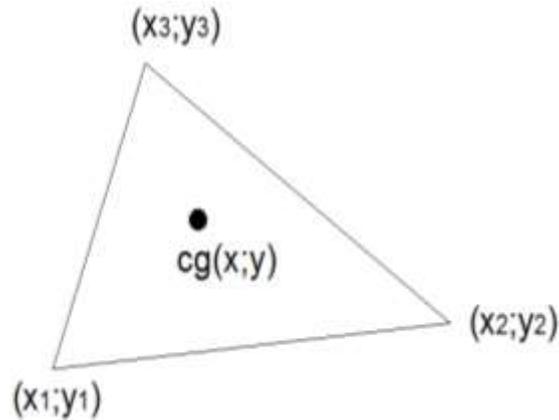
Integrando la siguiente expresión se tiene que:

$$\int_{A^{(e)}} N_i^{(e)} dA = \int_{A^{(e)}} (N_i^{(e)})^1 (N_j^{(e)})^0 (N_k^{(e)})^0 dA = \frac{1! 0! 0!}{(1 + 0 + 0 + 2)!} 2A^{(e)} = \frac{1}{3} A^{(e)}$$

Entonces el vector de fuerzas de cuerpo resulta:

$$\{f_b^{(e)}\} = \frac{1}{3} A^{(e)} t \begin{pmatrix} b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \\ b_x^{(e)} \\ b_y^{(e)} \end{pmatrix}$$

Esta expresión demuestra que las fuerzas de cuerpo se obtienen multiplicando el peso específico por el espesor t y el área del elemento finito triangular y se lo divide entre 3, lo cual significa que se reparte a cada nodo equitativamente, sin importar la forma del triángulo, en consecuencia se reparte en magnitudes iguales a los 3 nodos, lo cual es un caso interesante ya que demostraría que ningún vértice de un triángulo es privilegiado ya que:



$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

2.14 Matriz de Rigidez del Elemento Finito Triangular Lineal

Del planteamiento de los trabajos virtuales aplicable a la mecánica del medio continuo y el análisis estructural, el cual establece que un cuerpo está en equilibrio si y sólo si, el trabajo virtual realizado por todas las acciones internas y externas es nulo, se define como la matriz de rigidez del elemento como:

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV = \int_{A^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] t dA$$

Como $[B^{(e)}]^T$ y $[D^{(e)}]$ son matrices constantes dentro del elemento finito la ecuación anterior queda como.

$$[K^{(e)}] = [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] t \int_{A^{(e)}} dA$$

$$[K^{(e)}] = [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] t A^{(e)}$$

Donde:

	Condición Plana de Esfuerzos	Condición Plana de Deformaciones
$D_{11}^{(e)}$ $D_{22}^{(e)}$	$\frac{E^{(e)}}{1 - (\nu^{(e)})^2}$	$\frac{E^{(e)}(1 - \nu^{(e)})}{(1 + \nu^{(e)})(1 - 2\nu^{(e)})}$
$D_{12}^{(e)}$	$\frac{E^{(e)}\nu^{(e)}}{1 - (\nu^{(e)})^2}$	$\frac{E^{(e)}\nu^{(e)}}{(1 + \nu^{(e)})(1 - 2\nu^{(e)})}$
$D_{33}^{(e)}$	$\frac{E^{(e)}}{2(1 + \nu^{(e)})}$	$\frac{E^{(e)}}{2(1 + \nu^{(e)})}$

Escribiendo la matriz de operadores diferenciales en un formato matricial:

$$[B^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Escribiendo la matriz de constantes elásticas en un formato matricial:

$$[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{12}^{(e)} & D_{22}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

Escribiendo la matriz transpuesta de la matriz de operadores diferenciales se tiene:

$$[B^{(e)}]^T = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$[K^{(e)}] = [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] t A^{(e)}$$

Escribiendo el producto matricial entre matrices se tiene que:

$$[B^{(e)}]^T [D^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ 0 & c_1 & b_1 \\ b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & c_2 & b_2 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ 0 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11}^{(e)} & D_{12}^{(e)} & 0 \\ D_{12}^{(e)} & D_{22}^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$[B^{(e)}]^T [D^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 D_{11}^{(e)} & b_1 D_{12}^{(e)} & c_1 D_{33}^{(e)} \\ c_1 D_{12}^{(e)} & c_1 D_{22}^{(e)} & b_1 D_{33}^{(e)} \\ b_2 D_{11}^{(e)} & b_2 D_{12}^{(e)} & c_2 D_{33}^{(e)} \\ c_2 D_{12}^{(e)} & c_2 D_{22}^{(e)} & b_2 D_{33}^{(e)} \\ b_3 D_{11}^{(e)} & b_3 D_{12}^{(e)} & c_3 D_{33}^{(e)} \\ c_3 D_{12}^{(e)} & c_3 D_{22}^{(e)} & b_3 D_{33}^{(e)} \end{bmatrix}$$

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 D_{11}^{(e)} & b_1 D_{12}^{(e)} & c_1 D_{33}^{(e)} \\ c_1 D_{12}^{(e)} & c_1 D_{22}^{(e)} & b_1 D_{33}^{(e)} \\ b_2 D_{11}^{(e)} & b_2 D_{12}^{(e)} & c_2 D_{33}^{(e)} \\ c_2 D_{12}^{(e)} & c_2 D_{22}^{(e)} & b_2 D_{33}^{(e)} \\ b_3 D_{11}^{(e)} & b_3 D_{12}^{(e)} & c_3 D_{33}^{(e)} \\ c_3 D_{12}^{(e)} & c_3 D_{22}^{(e)} & b_3 D_{33}^{(e)} \end{bmatrix} \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} t A^{(e)}$$

En conclusión la matriz de rigidez $[K^{(e)}]$ operando el producto matricial entre la matriz de operadores diferenciales con la matriz constitutiva se tiene que:

$$[K^{(e)}] = [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] t A^{(e)} = \frac{1}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$K_{11} = b_1^2 D_{11}^{(e)} + c_1^2 D_{12}^{(e)} \quad K_{12} = b_1 c_1 D_{12}^{(e)} + b_1 c_1 D_{33}^{(e)} \quad K_{13} = b_1 b_2 D_{11}^{(e)} + c_1 c_2 D_{33}^{(e)}$$

$$K_{14} = b_1 c_2 D_{12}^{(e)} + b_1 c_2 D_{33}^{(e)} \quad K_{15} = b_1 b_3 D_{11}^{(e)} + c_1 c_3 D_{33}^{(e)} \quad K_{16} = b_1 c_3 D_{12}^{(e)} + b_3 c_1 D_{33}^{(e)}$$

$$K_{21} = b_1 c_1 D_{12}^{(e)} + b_1 c_1 D_{33}^{(e)} \quad K_{22} = c_1^2 D_{22}^{(e)} + b_1^2 D_{33}^{(e)} \quad K_{23} = b_2 c_1 D_{12}^{(e)} + b_1 c_2 D_{33}^{(e)}$$

$$\begin{aligned}
K_{24} &= c_1 c_2 D_{22}^{(e)} + b_1 b_2 D_{33}^{(e)} & K_{25} &= b_3 c_1 D_{12}^{(e)} + b_1 c_3 D_{33}^{(e)} & K_{26} &= c_1 c_3 D_{22}^{(e)} + b_1 b_3 D_{33}^{(e)} \\
K_{31} &= b_1 b_2 D_{11}^{(e)} + c_1 c_2 D_{33}^{(e)} & K_{32} &= b_2 c_1 D_{12}^{(e)} + b_1 c_2 D_{33}^{(e)} & K_{33} &= b_2^2 D_{11}^{(e)} + c_2^2 D_{33}^{(e)} \\
K_{34} &= b_2 c_2 D_{12}^{(e)} + b_2 c_2 D_{33}^{(e)} & K_{35} &= b_2 b_3 D_{11}^{(e)} + c_2 c_3 D_{33}^{(e)} & K_{36} &= b_2 c_3 D_{12}^{(e)} + b_3 c_2 D_{33}^{(e)} \\
K_{41} &= b_1 c_2 D_{12}^{(e)} + b_2 c_1 D_{33}^{(e)} & K_{42} &= c_1 c_2 D_{22}^{(e)} + b_1 b_2 D_{33}^{(e)} & K_{43} &= b_2 c_2 D_{12}^{(e)} + b_2 c_2 D_{33}^{(e)} \\
K_{44} &= c_2^2 D_{22}^{(e)} + b_2^2 D_{33}^{(e)} & K_{45} &= b_3 c_2 D_{12}^{(e)} + b_2 c_3 D_{33}^{(e)} & K_{46} &= c_2 c_3 D_{22}^{(e)} + b_2 b_3 D_{33}^{(e)} \\
K_{51} &= b_1 b_3 D_{11}^{(e)} + c_1 c_3 D_{33}^{(e)} & K_{52} &= b_3 c_1 D_{12}^{(e)} + b_1 c_3 D_{33}^{(e)} & K_{53} &= b_2 b_3 D_{11}^{(e)} + c_2 c_3 D_{33}^{(e)} \\
K_{54} &= b_3 c_2 D_{12}^{(e)} + b_2 c_3 D_{33}^{(e)} & K_{55} &= b_3^2 D_{11}^{(e)} + c_3^2 D_{33}^{(e)} & K_{56} &= b_3 c_3 D_{12}^{(e)} + b_3 c_3 D_{33}^{(e)} \\
K_{61} &= b_1 c_3 D_{12}^{(e)} + b_3 c_1 D_{33}^{(e)} & K_{62} &= c_1 c_3 D_{22}^{(e)} + b_1 b_3 D_{33}^{(e)} & K_{63} &= b_2 c_3 D_{12}^{(e)} + b_3 c_2 D_{33}^{(e)} \\
K_{64} &= c_2 c_3 D_{22}^{(e)} + b_2 b_3 D_{33}^{(e)} & K_{65} &= b_3 c_3 D_{12}^{(e)} + b_3 c_3 D_{33}^{(e)} & K_{66} &= c_3^2 D_{22}^{(e)} + b_3^2 D_{33}^{(e)}
\end{aligned}$$

En conclusión la matriz de rigidez, es aquella que relaciona los elementos de la matriz de operadores diferenciales junto con los elementos de la matriz constitutiva, es una matriz simétrica, debido a que su demostración ha sido por métodos energéticos lo cual significa que el trabajo virtual externo es igual al trabajo virtual interno.

Recordar que:

$$N_1^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_1 + b_1 x + c_1 y)$$

$$N_2^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_2 + b_2 x + c_2 y)$$

$$N_3^{(e)} = \frac{1}{2A^{(e)}} (a_3 + b_3 x + c_3 y)$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad b_1 = y_2 - y_3 \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

$$U_{(x;y)}^{(e)} = N_1^{(e)}U_1^{(e)} + N_2^{(e)}U_2^{(e)} + N_3^{(e)}U_3^{(e)}$$

$$V_{(x;y)}^{(e)} = N_1^{(e)}V_1^{(e)} + N_2^{(e)}V_2^{(e)} + N_3^{(e)}V_3^{(e)}$$

2.15 Planteamiento General del Problema Elástico

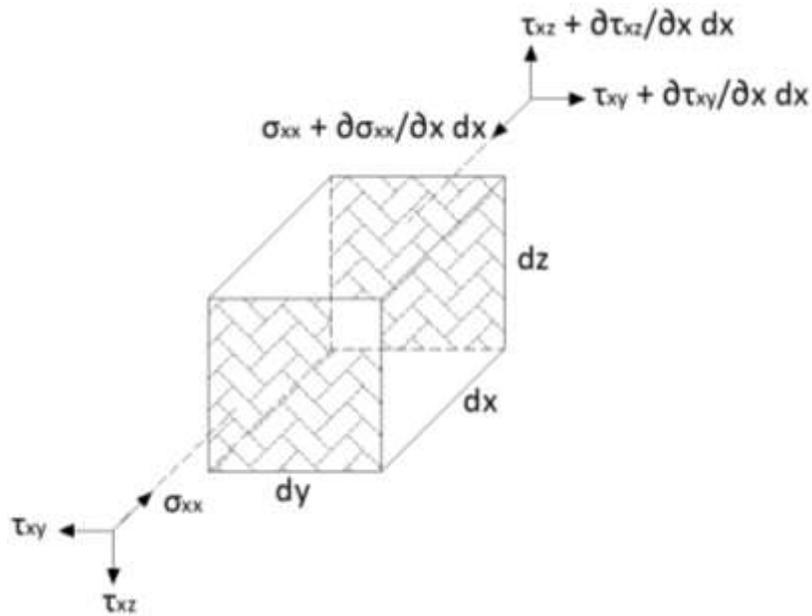
El problema elástico lineal consiste en obtener, para todo instante de tiempo, el desplazamiento, la deformación infinitesimal y el esfuerzo de cada una de las partículas que conforma un sólido de material elástico lineal isótropo, el cual está sometido a diferentes fuerzas externas.

Ecuaciones de equilibrio interno o ecuación de Cauchy.

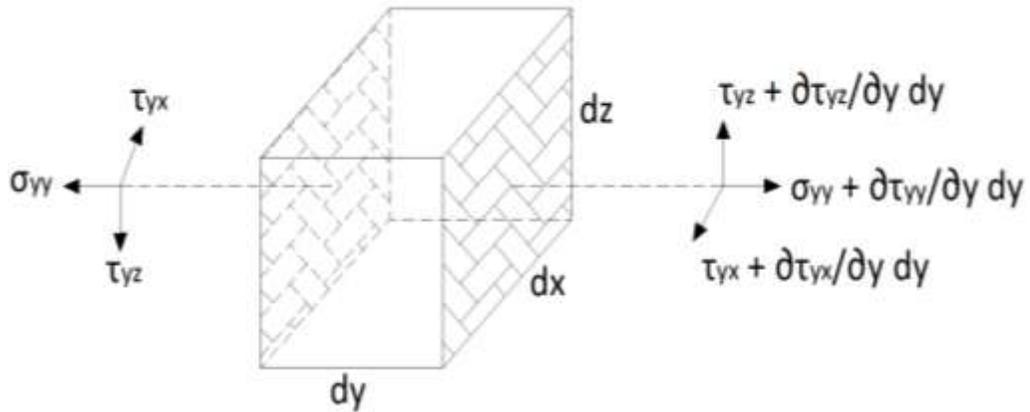
Se considera un cuerpo en equilibrio si la fuerza y el momento resultante alrededor de un punto específico son iguales a cero. Asimismo, una parte cualquiera del cuerpo de volumen y de superficie de contorno también estará en equilibrio, si todo el sólido cumple con tal condición.

Analizando los esfuerzos en las caras correspondientes en un diferencial de volumen se tiene que:

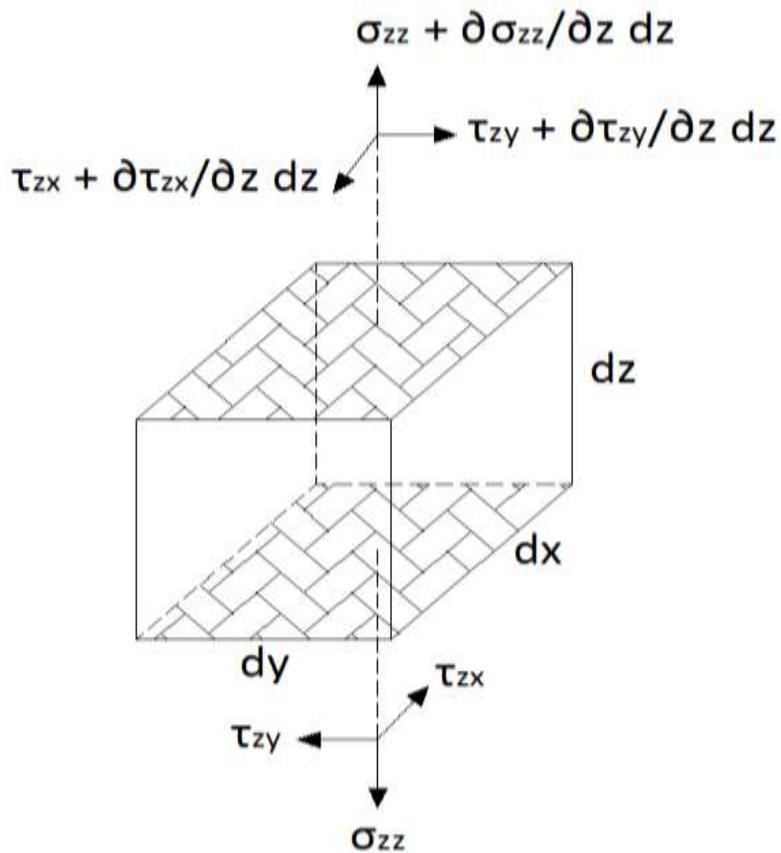
Superficie o cara “x”



Superficie o cara “y”



Superficie o cara “z”



Las fuerzas que actúan sobre una parte del cuerpo corresponden a la suma de las fuerzas como el peso propio, expresando en forma vectorial:

$$\vec{dF} = dF_x \hat{i} + dF_y \hat{j} + dF_z \hat{k}$$

$$\overline{d\vec{F}} = \rho_x dV \hat{i} + \rho_y dV \hat{j} + \rho_z dV \hat{k}$$

La primera condición de equilibrio estático indica que la fuerza resultante es igual a cero y se puede expresar mediante las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x = 0$$

$$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy A_y - \tau_{yx} + \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz A_z - \tau_{zx} + \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx A_x - \sigma_{xx} + \rho_x dV = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy(dx dz) + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz(dy dx) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx(dy dz) + \rho_x(dx dy dz) = 0$$

$$\rho_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\partial_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy A_y - \sigma_{yy} + \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz A_z - \tau_{zy} + \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx A_x - \tau_{xy} + \rho_y dV = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy(dx dz) + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz(dy dx) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx(dy dz) + \rho_y(dx dy dz) = 0$$

$$\rho_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy A_y - \tau_{yz} + \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz A_z - \sigma_{zz} + \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx A_x - \tau_{xz} + \rho_z dV = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy(dx dz) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz(dy dx) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx(dy dz) + \rho_z(dx dy dz) = 0$$

$$\rho_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Por lo tanto las tres ecuaciones de equilibrio interno o ecuación de Cauchy son las siguientes:

$$\rho_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\rho_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\rho_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Componentes de la matriz de deformación.

La matriz de componentes de deformaciones, cuyas componentes están en función de los gradientes del desplazamiento:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto las componentes de deformación infinitesimal y de desplazamiento corresponden a un sistema de seis ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Siendo u, v, w tres funciones continuas y derivables para todo punto material en el dominio del medio continuo.

Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones infinitesimales.

Como se indicó anteriormente, el campo de las deformaciones infinitesimales es función del gradiente del campo del desplazamiento, siendo este último un grupo de funciones continuas, al igual que sus derivadas, que depende de la posición del punto material y tiempo.

La relación obtenida entre las componentes de deformación infinitesimal y de desplazamiento corresponde a un sistema de seis ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \gamma_{xz} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Siendo u, v, w tres funciones continuas y derivables para todo punto material en el dominio del medio continuo.

Si las funciones de desplazamiento u, v, w en términos de la posición (x, y, z) son conocidas, las seis componentes de deformación se obtienen evaluando las derivadas de u, v, w con respecto a x, y, z . En cambio, cuando se desean calcular las tres componentes de desplazamiento, siendo conocidas las seis componentes de deformación, se conforma un sistema de seis ecuaciones con tres incógnitas, para el cual podría o no existir una solución, es decir, un valor de las funciones de desplazamiento obtenido de un grupo de componentes de deformación escogidas de forma arbitraria.

Si se deriva dos veces la componente ε_{xx} con respecto a "y", al igual que se deriva dos veces la componente ε_{yy} con respecto a "x" se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Derivando la componente de deformación γ_{xy} con respecto a "x" y a "y" se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Sustituyendo $\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$ en la expresión anterior se obtiene la primera ecuación de compatibilidad de deformaciones infinitesimales de la forma:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

De la misma manera se obtienen otras dos ecuaciones de compatibilidad relacionadas con las componentes de deformación γ_{xz} y γ_{yz} indicadas a continuación:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

Ahora, derivando la componente ε_{xx} con respecto a "y" y a "z" se tiene que:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Y la segunda derivada de las componentes de deformación angular γ_{yz} , γ_{xz} y γ_{xy} con respecto a "x", "y" y "z" respectivamente son las siguientes:

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

De la suma de las tres ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z}$$

Por lo tanto se concluye que:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z}$$

De la misma manera se obtienen otras dos ecuaciones de compatibilidad relacionadas con las componentes de deformación ε_{yy} y ε_{zz} indicadas a continuación:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2}$$

En resumen las seis ecuaciones de compatibilidad de deformaciones infinitesimales son las siguientes:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = -\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2}$$

Por lo tanto se puede concluir en lo siguiente:

Número de incógnitas:

- 6 componentes de la matriz $[T]$
- 6 componentes de la matriz $[\varepsilon]$
- 3 componentes del vector desplazamiento ($\vec{U} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$)

Número de ecuaciones:

- 3 ecuaciones de equilibrio interno.
- 6 ecuaciones de las componentes de la matriz de deformación.
- 6 ecuaciones de compatibilidad de deformaciones infinitesimales.

Por lo tanto para resolver el problema elástico de la forma general, es necesario resolver un sistema de 15 ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con 15 incógnitas.

2.16 Formulación del problema elástico en desplazamientos

Ecuaciones de Navier: El problema elástico lineal se puede plantear en función del campo de los desplazamientos, de acuerdo a las ecuaciones de gobierno y de las condiciones de borde apropiadas, por lo tanto escribiendo las ecuaciones de Lamé:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2G)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\lambda + 2G\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\lambda + 2G\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{zz} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\lambda + 2G\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Pero:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Por otra parte:

$$\vec{U} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Entonces:

$$\sigma_{xx} = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\lambda + 2G\varepsilon_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)\lambda + 2G \frac{\partial u}{\partial x} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{U})\lambda + 2G \frac{\partial u}{\partial x}$$

De las ecuaciones de equilibrio interno:

$$\rho_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\rho_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\rho_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{k}$$

$$\nabla^2 \cdot u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Entonces:

$$\rho_x + \lambda \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + G \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + G(\nabla^2 \cdot u) = 0$$

$$\rho_x + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + G(\nabla^2 \cdot u) = 0$$

De la misma manera se obtienen las otras dos ecuaciones relacionando las ecuaciones de equilibrio con las deformaciones infinitesimales indicadas a continuación:

$$\rho_y + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + G(\nabla^2 \cdot u) = 0$$

$$\rho_z + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + G(\nabla^2 \cdot u) = 0$$

Si multiplicamos estas tres ecuaciones por los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ respectivamente y sumamos miembro a miembro, tenemos:

$$\begin{aligned} &\rho_x \hat{i} + \rho_y \hat{j} + \rho_z \hat{k} + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{i} + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{j} + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{k} \\ &+ G(\nabla^2 \cdot u) \hat{i} + G(\nabla^2 \cdot u) \hat{j} + G(\nabla^2 \cdot u) \hat{k} = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\vec{\rho} = \rho_x \hat{i} + \rho_y \hat{j} + \rho_z \hat{k}$$

$$\vec{0} = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$\nabla \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{k}$$

$$\nabla^2 [\vec{U}] = \nabla^2 (u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k})$$

Finalmente:

$$(\rho_x \hat{i} + \rho_y \hat{j} + \rho_z \hat{k}) + (\lambda + G) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) \hat{k} \right\}$$

$$+ G \{ (\nabla^2 \cdot u) \hat{i} + (\nabla^2 \cdot u) \hat{j} + (\nabla^2 \cdot u) \hat{k} \} = 0$$

$$\vec{\rho} + (\lambda + G)\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + G\nabla^2(\vec{U}) = \vec{0}$$

Ecuación fundamental de la elasticidad

La ecuación fundamental de la elasticidad es la única a la que debe satisfacer el vector desplazamiento, en todos los puntos del sólido elástico.

2.17 Formulación del problema elástico en tensiones

Otra forma de resolver el problema elástico lineal estático consiste en plantear un grupo de ecuaciones diferenciales parciales en función del estado de esfuerzos.

Ecuaciones de Michell: Estas ecuaciones resultan del procedimiento de sustituir la ecuación constitutiva en la ecuación de compatibilidad de deformación infinitesimal para luego reemplazar en la ecuación de equilibrio, lo cual resulta:

$$\nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = - \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{\rho} - 2 \frac{\partial \delta x}{\partial x}$$

$$\nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = - \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{\rho} - 2 \frac{\partial \delta y}{\partial y}$$

$$\nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = - \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{\rho} - 2 \frac{\partial \delta z}{\partial z}$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = - \left[\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right]$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = - \left[\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x} \right]$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = - \left[\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right]$$

Si ρ es constante estas ecuaciones se llaman **Ecuaciones de Beltrami** las cuales se pueden escribir como:

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_{yy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

$$(1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

$$(1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xz} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

$$(1 + \nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = 0$$

2.18 Método de los elementos finitos aplicado a la teoría de la elasticidad partiendo de la teoría de los trabajos virtuales

El principio de los trabajos virtuales es el primer principio variacional aplicable a la mecánica del medio continuo y el análisis estructural.

En cuerpos deformables, el trabajo virtual hecho por las fuerzas reales se puede dividir en dos partes: el trabajo virtual hecho por las fuerzas internas δW_i denominado trabajo virtual interno y el trabajo virtual realizado por las fuerzas externas δW_e llamado trabajo virtual externo.

El trabajo virtual externo, es decir, aquél realizado por las fuerzas reales externas mientras se presenta un desplazamiento virtual δU es igual a:

$$\delta W_e = \int_{\Gamma} \{\delta U\}^T \{P\} dS + \int_V \{\delta U\}^T \{b\} dV + \sum \{\delta U_{(x_n)}\}^T \{f_{(x_n)}\}$$

El trabajo virtual interno por unidad de volumen es igual al trabajo realizado por el esfuerzo asociado a desplazamientos virtuales por unidad de volumen, es decir $[[\nabla]\{\delta U\}]^T \{\sigma\}$. Por lo tanto el trabajo virtual interno almacenado en el cuerpo está definido como:

$$\delta W_i = \int_V [[\nabla]\{\delta U\}]^T \{\sigma\} dV$$

El principio de los trabajos virtuales establece que un cuerpo está en equilibrio si y sólo si, el trabajo virtual realizado por todas las acciones internas y externas es nulo, es decir:

$$\delta W = -\delta W_e + \delta W_i = 0$$

Por lo tanto se concluye que:

$$\delta W_i = \delta W_e$$

$$\int_V [[\nabla]\{\delta U\}]^T \{\sigma\} dV = \int_{\Gamma} \{\delta U\}^T \{P\} dS + \int_V \{\delta U\}^T \{b\} dV + \sum \{\delta U_{(x_n)}\}^T \{f_{(x_n)}\}$$

Dónde:

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{bmatrix}$$

$$\{\delta U\} = \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vector de desplazamientos virtuales}$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vector de esfuerzos}$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vector de fuerzas de superficie}$$

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vector de fuerzas de cuerpo}$$

$$\{f_{(x_n)}\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Vector de fuerzas puntuales (escalares)}$$

El vector de deformaciones puede escribirse como:

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{U\}$$

$$[\nabla]\{\delta U_{(e)}\} = [B^{(e)}]\{\delta a^{(e)}\}$$

Elevando a ambos miembros por la transpuesta a esta última expresión, se tiene que:

$$([\nabla]\{\delta U_{(e)}\})^T = ([B^{(e)}]\{\delta a^{(e)}\})^T$$

$$([\nabla]\{\delta U_{(e)}\})^T = \{\delta a^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T$$

Expresando el vector de esfuerzos en función a la matriz constitutiva y al vector de deformación:

$$\{\sigma^{(e)}\} = [D^{(e)}]\{\varepsilon^{(e)}\}$$

$$\{\sigma^{(e)}\} = [D^{(e)}]([B^{(e)}]\{a^{(e)}\})$$

La suma de los trabajos virtuales de las cargas puntuales es igual a un formato matricial para toda la estructura igual a:

$$\sum \{\delta U_{(x_n)}\}^T \{f_{(x_n)}\} = \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\}$$

$$\{\delta a\}^T \{f^{(n)}\} \rightarrow \text{en el tamaño de toda la estructura}$$

$$\{\delta U^{(e)}\} = [N^{(e)}]\{\delta a^{(e)}\}$$

Elevando a ambos miembros por la transpuesta a esta última expresión, se tiene que:

$$(\{\delta U^{(e)}\})^T = ([N^{(e)}]\{\delta a^{(e)}\})^T$$

$$(\{\delta U^{(e)}\})^T = \{\delta a^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T$$

$$\sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} ([\nabla]\{\delta U^{(e)}\})^T \{\sigma^{(e)}\} dV = \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma^{(e)}} \{\delta U^{(e)}\}^T \{P^{(e)}\} dS + \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \{\delta U^{(e)}\}^T \{b^{(e)}\} dV$$

$$+ \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\}$$

$$\sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \{\delta a^{(e)}\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{a^{(e)}\} dV = \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma^{(e)}} \{\delta a^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} dS$$

$$+ \sum_{e=1}^n \int_{V^{(e)}} \{\delta a^{(e)}\}^T [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV + \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\}$$

Como $\delta a^{(e)}$ son valores virtuales que no dependen de dV y el vector de desplazamiento $a^{(e)}$ son valores fijos salen fuera del signo de la integral, entonces:

$$\sum_{e=1}^n \left[\{\delta a^{(e)}\}^T \{a^{(e)}\} \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \right] = \sum_{e=1}^n \left[\{\delta a^{(e)}\}^T \int_{\Gamma^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} dS \right]$$

$$+ \sum_{e=1}^n \left[\{\delta a^{(e)}\}^T \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV \right] + \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\}$$

Recordar que:

$$[K^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV$$

Entonces:

$$\sum_{e=1}^n \left[\{\delta a^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{a^{(e)}\} \right] = \sum_{e=1}^n \left[\{\delta a^{(e)}\}^T \int_{\Gamma^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} dS \right]$$

$$+ \sum_{e=1}^n \left[\{\delta a^{(e)}\}^T \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV \right] + \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\}$$

Como:

$$\{f_s^{(e)}\} = \int_{r^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{P^{(e)}\} dS$$

$$\{f_b^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T \{b^{(e)}\} dV$$

Por lo tanto resulta:

$$\sum_{e=1}^n [\{\delta a^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{a^{(e)}\}] = \sum_{e=1}^n [\{\delta a^{(e)}\}^T \{f_s^{(e)}\}] + \sum_{e=1}^n [\{\delta a^{(e)}\}^T \{f_b^{(e)}\}] + \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\}$$

$$\sum_{e=1}^n [\{\delta a^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{a^{(e)}\}] = \sum_{e=1}^n [\{\delta a^{(e)}\}^T (\{f_s^{(e)}\} + \{f_b^{(e)}\})] + \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\}$$

Como la suma de las fuerzas de superficie y de volumen puede expresarse como la fuerza total en el elemento, resulta:

$$\{f^{(e)}\} = \{f_s^{(e)}\} + \{f_b^{(e)}\}$$

Luego:

$$\sum_{e=1}^n [\{\delta a^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{a^{(e)}\}] = \sum_{e=1}^n \{\delta a^{(e)}\}^T \{f^{(e)}\} + \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\}$$

$$\sum_{e=1}^n [\{\delta a^{(e)}\}^T [K^{(e)}] \{a^{(e)}\}] - \sum_{e=1}^n \{\delta a^{(e)}\}^T \{f^{(e)}\} + \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\} = \{0\}$$

Recordar que:

$$\sum_{e=1}^n \{\delta a^{(e)}\}^T = \{\delta a\}^T$$

$$\sum_{e=1}^n [K^{(e)}] = [K]$$

$$\sum_{e=1}^n \{a^{(e)}\} = \{a\}$$

Como la suma representa el ensamblaje de toda la estructura, la ecuación queda:

$$\{\delta a\}^T [K] \{a\} - \{\delta a\}^T \{f^{(e)}\} + \{\delta a\}^T \{f^{(n)}\} = \{0\}$$

$$\{\delta a\}^T [K] \{a\} - \{\delta a\}^T (\{f^{(e)}\} + \{f^{(n)}\}) = \{0\}$$

Como:

$$\{f\} = \sum_{e=1}^n \{f^{(e)}\} + \{f^{(n)}\} \quad \rightarrow \quad \text{Fuerza resultante en toda la estructura}$$

Resulta:

$$\{\delta a\}^T [K] \{a\} - \{\delta a\}^T \{f\} = \{0\}$$

$$\{\delta a\}^T ([K] \{a\} - \{f\}) = \{0\}$$

Como $\{\delta a\}^T$ son desplazamientos virtuales independientes no pueden ser cero es decir $\{\delta a\}^T \neq 0$ por lo tanto la segunda condición es:

$$[K] \{a\} - \{f\} = \{0\}$$

$$[K] \{a\} = \{f\}$$

Se puede concluir que existe una relación entre la matriz de rigidez $[K]$, el vector de desplazamientos $\{a\}$ y el vector de fuerzas $\{f\}$, en la cual son conocidos la matriz de rigidez y el vector de fuerzas lo que permite encontrar el vector de desplazamientos.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA

3.1 Características técnicas del programa

Las principales características técnicas del programa de elementos finitos a código abierto son las siguientes:

- ❖ **Funcionalidad:** El programa tiene más de 100 instrucciones escritas en lenguaje Visual Basic y Visual Estudio, que permiten resolver problemas mediante el método de los elementos finitos.
- ❖ **Estabilidad:** Las subrutinas del programa cuentan con controles y trampas de errores que garantizan la estabilidad del programa durante su ejecución. Sin embargo, la posibilidad de modificar las subrutinas de los programas a código abierto como éste, reducen su robustez.
- ❖ **Usabilidad:** La aplicación Microsoft Excel proporciona una interfaz de entrada y salida de datos ágil y amigable para el usuario.
- ❖ **Eficiencia:** Debido a sus fines didácticos, el programa guarda en la memoria RAM algunas matrices características de las etapas intermedias del procedimiento, sin embargo los usuarios avanzados podrán evitar que dichas matrices sean guardadas. El tiempo de ejecución depende del número de grados de libertad que tenga el problema y de la cantidad de resultados intermedios que se desean observar.
- ❖ **Extendibilidad:** Al ser un programa a código abierto es fácil adicionar nuevas subrutinas que permitan la solución de otros problemas mediante el método de los elementos finitos.
- ❖ **Portabilidad:** Tanto el programa como los datos de un problema se exportan de manera directa a un libro de Microsoft Excel, esto facilita su portabilidad a computadores que cuenten con un sistema operativo Microsoft Windows y con el programa Microsoft Excel, lo cual es común en el medio.

3.2 Estructura y manejo del programa

El programa de elementos finitos a código abierto es una herramienta computacional de análisis de problemas físicos por medio del método de los elementos finitos, cuyas rutinas son visibles, modificables y ejecutables.

3.2.1 Estructura del pre -proceso: hojas de cálculo

El programa puede leer el valor de las celdas de las hojas de cálculo que contengan la información básica del problema que se desea resolver. Asimismo, las matrices resultantes pueden escribirse en las celdas especificadas por el usuario. A continuación se indica la distribución de las hojas de cálculo como preproceso del programa.

Las hojas de entrada de datos constituyen el pre procesador del programa de elementos finitos. En cada una de ellas se almacena parte de la información del problema, como las coordenadas de los nudos, las conectividades de los elementos, las fuerzas aplicadas entre otras. A continuación se describe el contenido:

- ❖ **TB_GEN:** Contiene los parámetros generales como el título, el número de nodos, número de elementos, número de grados de libertad por nudo, número de nudos por elemento y número de dimensiones del problema. Y como propiedades mecánicas el módulo de Young, relación de Poisson, espesor, y el tipo de problema.
- ❖ **TB_XYZ:** Contiene las coordenadas de la malla de elementos finitos, ordenados de forma secuencial. A partir de esta tabla se construye la matriz especial de coordenadas de los nudos.
- ❖ **TB_ELE:** Contiene los nudos asociados a cada elemento de la malla, ordenados de forma secuencial en sentido anti horario. A partir de esta tabla se construye la matriz especial de elementos.
- ❖ **TB_RES:** Establece las condiciones de borde naturales, asignando el tipo de desplazamiento y el valor de desplazamiento conocido es decir indicando los grados de libertad conocidos por cada nudo. A partir de esta tabla se construye la matriz especial de condiciones de borde.
- ❖ **TB_FUN:** Contiene las componentes de las fuerzas puntuales aplicadas a cada uno de los nudos para los problemas de elasticidad. A partir de esta tabla se construye la matriz especial de fuerzas organizadas por nudos.

- ❖ **TB_FUE:** Contiene las componentes de las fuerzas distribuidas por unidad de superficie y por unidad de volumen aplicadas sobre los elementos para los problemas de elasticidad, en el caso de las fuerzas por unidad de superficie es necesario indicar la cara en donde actúa dicha fuerza de acuerdo a los nudos asociados a cada elemento. A partir de esta tabla se construye la matriz especial de fuerzas distribuidas.

La hoja de salida de datos se utiliza para presentar los resultados del problema a través de las matrices escogidas. Para este programa la hoja **TB_OUT** se utiliza para presentar los datos de salida, sin embargo el usuario puede escribir los resultados en las celdas de cualquier hoja de cálculo.

Capacidad del programa:

El programa requiere para su funcionamiento un sistema operativo Microsoft Windows XP o Microsoft Windows Vista, como también Microsoft Office Excel versión 2000, 2003, 2007 o 2010 previamente instalado.

La capacidad del programa está determinada por el máximo de la matriz de rigidez del sistema. En general las matrices son arreglos de dos tamaño índices enteros tipo integer, cuyo tamaño máximo es de 32767. Sin embargo la velocidad de cálculo se reduce fuertemente cuando se declaran matrices de gran tamaño debido al espacio ocupado en la memoria RAM o en la memoria virtual del disco duro, por ejemplo, una matriz de doble precisión de 32767 por 32767 tiene un tamaño de almacenamiento de 8.5 GB aproximadamente.

3.3 Matrices o tablas de la topología de la malla de elementos finitos.

La malla de elementos finitos está constituida por un grupo de elementos conectados entre sí por nudos. En el programa, cada nudo tiene un código identificador o simplemente identificador que corresponde a un número entero entre 1 y el total de nudos de la malla. Asimismo, cada elemento se define con un identificador entero entre 1 y el total de elementos finitos.

Como parte de la programación del método son esenciales las matrices o tablas que describan la geometría y las condiciones de borde de la malla de elementos finitos. A continuación se indican dichas matrices:

- ❖ **Matriz o tabla de coordenadas de los nudos XYZ ():** Matriz real que contiene en cada fila la coordenada de un nudo de la malla con respecto al origen de un sistema coordenado cartesiano general. En la primera columna se ubica el valor de la coordenada x , en la segunda la coordenada y . El número de filas de esta matriz es igual al total de nudos de la malla y el número de columnas corresponde a la dimensión del problema.
- ❖ **Matriz de elementos o tabla de conectividades ELE ():** Matriz entera que contiene los códigos identificadores de los nudos asociados a cada elemento finito. Una fila de la matriz presenta la información de un elemento finito y cada columna contiene el identificador de un nudo, por lo tanto el número de filas es igual a la cantidad de elementos de la malla y el número de columnas corresponde con la cantidad de nudos que tenga un elemento finito. El orden establecido para identificar los nudos de un elemento finito corresponderá con el orden de las columnas de la matriz de elementos. La primera columna de la matriz de elementos contendrá el código que identifica al nudo i , la segunda al nudo j y la tercera al nudo k .
- ❖ **Matriz o tabla indicadora de condiciones de borde MRE ():** Matriz indicadora de los valores nodales o grados de libertad conocidos que establecen las condiciones de borde. Si un coeficiente de esta matriz es igual a uno (001), está indicando que el grado de libertad que representa es conocido. En cambio, si el coeficiente es igual a cero (000), establece que el grado de libertad es desconocido.
- ❖ **Matriz o tabla de grados de libertad por nudo MGL ():** Matriz entera que contiene el identificador de los valores nodales o grados de libertad de cada uno de los nudos de la malla. Cada fila contiene la información de un nudo y cada columna presenta el identificador de un grado de libertad o valor nodal, por lo tanto, el número de filas de la matriz es igual a la cantidad de nudos de la malla y el número de columnas corresponde a la cantidad de valores nodales o grados de libertad que tenga un nudo.
- ❖ **Matriz de incidencias o tabla de grados de libertad por elemento INC ():** Matriz entera que contiene los identificadores de los grados de libertad o valores nodales asociados a cada elemento finito de la malla. Se presenta en cada fila la información

de un elemento finito y en cada columna el identificador de un grado de libertad. A partir de la matriz de elementos y de la matriz de grados de libertad por nudo, la instrucción **NGLELE** del programa puede generar la matriz de incidencias.

Matrices o tablas de fuerzas y desplazamientos aplicados.

En problemas de elasticidad, las fuerzas y desplazamientos impuestos a la estructura se organizan en matrices o tablas especiales de acuerdo con la numeración de los nudos, de los elementos o de los grados de libertad. A continuación se indican las matrices:

- ❖ **Matriz o tabla de fuerzas organizadas por nudo:** Tabla que contiene en cada fila la magnitud de las componentes de fuerzas aplicadas sobre un nudo específico, por tanto, su tamaño será el número de nudos por el número de grados de libertad por nudo. Un coeficiente igual a cero indica que la componente de la fuerza nodal es cero o que es desconocida (fuerza reactiva en un apoyo), dicha diferencia estará definida por la matriz indicadora de condiciones de borde. Esta forma de organizar las fuerzas en los nudos permite introducir la información cómodamente y presentar de manera agradable los resultados.
- ❖ **Vector o tabla de fuerzas organizadas por grados de libertad:** Vector que contiene la magnitud de las fuerzas nodales organizadas de acuerdo con la numeración previamente asignada a los grados de libertad. Esta forma de organizar las fuerzas nodales es indispensable en el proceso de cálculo, dado que el sistema de ecuaciones del problema está planteado en términos de los valores nodales o grados de libertad.
- ❖ **Matriz o tabla de desplazamientos organizados por nudo:** Tabla que contiene en cada fila la magnitud de las componentes de desplazamiento en un nudo específico. Esta matriz tiene las mismas características de la tabla de fuerzas organizadas por nudo.
- ❖ **Vector o tabla de desplazamientos organizados por grados de libertad:** Vector que contiene la magnitud de los desplazamientos nodales organizados de acuerdo con la numeración previamente asignada a los grados de libertad. Este vector se obtiene

al plantear el equilibrio del sólido con sus condiciones de borde. Tiene las mismas características de la tabla de fuerzas organizadas por grados de libertad.

- ❖ **Matriz o tabla de fuerzas distribuidas:** Tabla que contiene en cada fila la magnitud de las componentes de fuerza de volumen o de superficie aplicadas sobre un elemento finito. Las fuerzas de superficie son acciones distribuidas por unidad de área actuantes en una cara del elemento y las fuerzas de volumen son acciones distribuidas en el volumen del elemento. La primera columna contiene el número identificador del elemento, la segunda y la tercera contienen las componentes en las direcciones x y y respectivamente, de la fuerza por unidad de volumen o fuerza másica. La cuarta y quinta columna indican la magnitud de la presión en dirección x y y aplicada sobre la cara del elemento identificado en la sexta columna. Las caras o lados de un elemento finito se numera de forma secuencial a partir del nudo inicial y en sentido anti horario. Los datos contenidos en esta tabla proporcionan los argumentos necesarios para calcular el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una fuerza másica mediante las instrucciones **FTRIEC** y **FRECEC**, o para obtener el vector de fuerzas equivalentes a la acción de una presión aplicada sobre un lado del elemento mediante las instrucciones **FTRIES** y **FRECES**.

Variables Relevantes de Visual Studio aplicadas al programa:

```
int cant_pasos = 5; //Cantidad de divisiones horizontales
int cant_pasos_f = 5; //Cantidad de divisiones verticales
Nodo[,] nodos = null; //Matriz de Nodos
Triangulo[,] triangulos = null; //Matriz de Triangulos

decimal anchoT = txtLado.Value; //Ancho de la figura
decimal altoT = txtAltura.Value; //Alto de la figura
```

Cálculos Relevantes de Visual Studio aplicadas en el programa:

```

int cont = 1; //Contador de nodos
float paso = (float)width / cant_pasos; //Incremento distancia horizontal del nodo
float paso_f = (float)height / cant_pasos_f; //Incremento distancia vertical del nodo
nodos = new Nodo[cant_pasos_f + 1, cant_pasos + 1]; //Nueva Matriz de nodos

for (int i = 0; i <= cant_pasos_f; i++) //Iteracion de filas de la matriz
    for (int j = 0; j <= cant_pasos; j++) //Iteracion de columnas de la matriz
    {
        Nodo n = new Nodo();
        n.Numero = cont++;
        n.Punto = new Pointf(j * paso + margen, i * paso_f + (pbGrafico.Height - margen - height)); // Calculo de coordenadas del nodo
        nodos[i, j] = n;
    }

triangulos = new Triangulo[2 * cant_pasos_f, cant_pasos]; //Nueva Matriz de Triangulos
int fil = 0;
for (int i = 0; i < cant_pasos_f; i++, fil += 2) //Iteracion de filas
    for (int j = 0; j < cant_pasos; j++) //Iteracion de columnas
    {
        Triangulo t1 = new Triangulo(); //Triangulo 1
        t1.N1 = nodos[i + 1, j];
        t1.N2 = nodos[i + 1, j + 1];
        t1.N3 = nodos[i, j];

        Triangulo t2 = new Triangulo(); //Triangulo 2
        t2.N1 = nodos[i + 1, j + 1];
        t2.N2 = nodos[i, j + 1];
        t2.N3 = nodos[i, j];

        if (!t1.VerificarPertenencia() && !t2.VerificarPertenencia())
        {
            //Si no pertenecen los dos triangulos,| invertir la diagonal
            t1.N2 = nodos[i, j + 1];

            t2.N1 = nodos[i + 1, j];
            t2.N2 = nodos[i + 1, j + 1];
            t2.N3 = nodos[i, j + 1];
        }

        triangulos[fil, j] = t1;
        triangulos[fil + 1, j] = t2;
    }
}

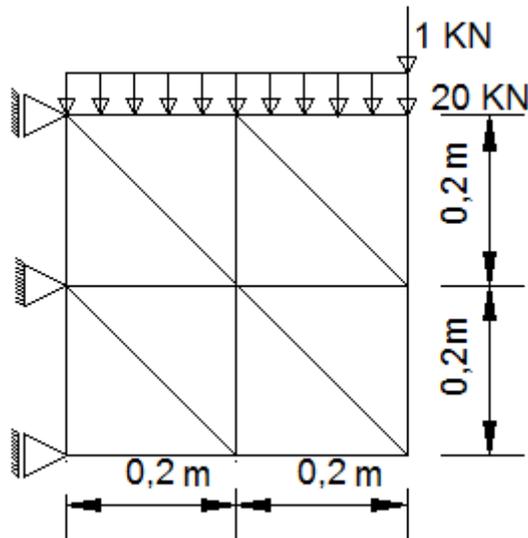
```

4. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

A continuación se va a desarrollar 2 ejercicios de aplicación usando el programa desarrollado, en el primer ejercicio se realizará el cálculo en forma manual mostrando paso a paso el procedimiento normalmente usado para el cálculo con elementos finitos tipo triángulo,

posteriormente se realizará el mismo ejercicio utilizando el programa, para lo cual se muestra en forma desplegada y ordenada el modo de ingreso de los datos, en el cual se obtuvieron los mismos resultados que en el ejercicio manual, por lo tanto se pudo dar validez al programa.

4.1 Ejercicio N° 1:



Soporta una carga uniformemente distribuida de $1 \frac{KN}{m}$ y una carga de superficie de $20 \frac{KN}{m^2}$ además de su peso propio con un espesor $t = 1 m$. La viga es de Hormigón con peso específico $\gamma = 24 \frac{KN}{m^3}$, módulo de elasticidad longitudinal $E = 20 \times 10^6 \frac{KN}{m^2}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. La viga se va a dividir en 8 elementos finitos triangulares. Donde las incógnitas del problema son encontrar el vector de deformaciones y el vector de esfuerzos en los nudos o vértices del elemento finito.

Forma manual:

PASO N°1: Se tiene que calcular el número de grados de libertad total, números de grados de libertad conocidos y el número de grados de libertad desconocidos, el grado de libertad por nudo es igual a 2.

$GLN \rightarrow \text{Grados de libertad por nudo}$

$GLT \rightarrow$ Grados de libertad total

$GLC \rightarrow$ Grados de libertad conocidos

$GLD \rightarrow$ Grados de libertad desconocidos

$n \rightarrow$ Número de nudos

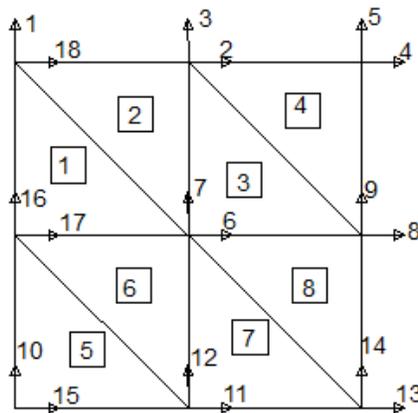
Por lo tanto:

$$GLT = n * GLN = 9 * 2 = 18$$

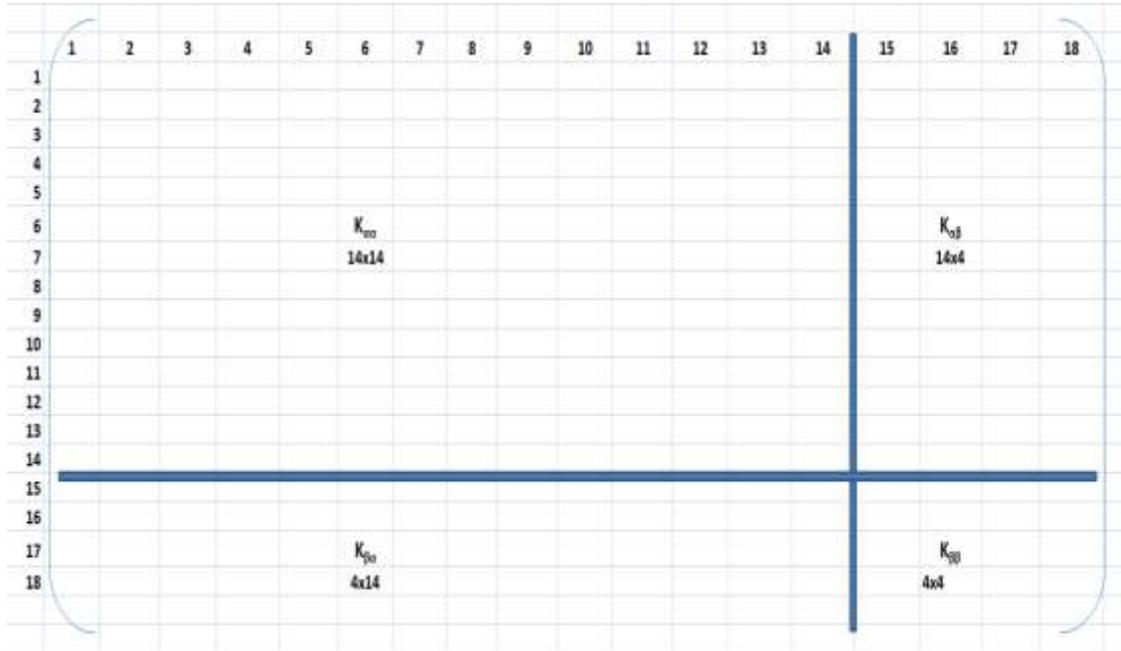
$$GLC = 4$$

$$GLD = GLT - GLC = 18 - 4 = 14$$

PASO N°2: Enumerar los diferentes nudos y elementos de forma ordenada, luego se comienza a numerar los grados de libertad desconocidos de forma ascendente (1,2,3,4,...,14) para luego los grados de libertad conocidos de forma descendente (18,17,16 y 15). La grafica que muestra dicha operación es la siguiente:



PASO N°3: Crear la matriz de toda la estructura, el número de filas y columnas es igual al grado de libertad total, es decir el número de nudos por el número de grados de libertad por nudo, es una matriz cuadrada y simétrica, en el cual se puede identificar 4 submatrices, pero que sólo nos interesa la submatriz de grados de libertad desconocidos es decir $K_{\alpha\alpha}$.



Paso N°4: Se calcula la matriz de rigidez de cada elemento y la magnitud resultante del vector de fuerzas nodales, tales como las fuerzas de superficie, fuerzas de volumen y fuerzas puntuales si actúan simultáneamente.

Elemento 1: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^1 = -\frac{\gamma * A^1 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,16KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0.16
0
-0.16
0
-0.16

La matriz de rigidez para el elemento 1 es:

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

	17	16	6	7	18	1
17	16000000	8000000	-12000000	-4000000	-4000000	4000000
16	8000000	16000000	-4000000	-4000000	-4000000	-12000000
6	-12000000	-4000000	12000000	0	0	4000000
7	-4000000	-4000000	0	4000000	4000000	0
18	4000000	4000000	0	4000000	4000000	0
1	-4000000	-12000000	4000000	0	0	12000000

Se numeran los grados de libertad correspondientes a cada elemento, comenzando en un vértice cualquiera del elemento pero en sentido antihorario. Se eliminan las filas y columnas las cuales contengan los grados de libertad conocidos, de tal forma que sólo se trabaje con la matriz de grados de libertad desconocidos.

Elemento 2: Existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical las cuales se reparten equitativamente a cada nodo y fuerzas de superficie actuando en la cara 2-18 en dirección vertical, por lo tanto se suman las fuerzas en la misma dirección que coinciden en un mismo nudo de la siguiente forma:

$$f_s^2 = -\frac{P_{2-18}^2 * L_{2-18}^2 * t}{2} = \frac{20 * 0,2 * 1}{2} = -2KN$$

$$f_b^2 = -\frac{\gamma * A^2 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,016KN$$

El vector de fuerzas es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -0.16 \\ 0 \\ -2.16 \\ 0 \\ -2.16 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez para el elemento 2 es:

	6	7	2	3	18	1
6	4000000	0	-4000000	-4000000	0	4000000
7	0	12000000	-4000000	-12000000	4000000	0
2	-4000000	-4000000	16000000	8000000	-12000000	-4000000
3	-4000000	-12000000	8000000	16000000	-4000000	-4000000
18	0	4000000	-12000000	-4000000	12000000	0
1	4000000	0	-4000000	-4000000	0	4000000

Elemento 3: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^3 = -\frac{\gamma * A^3 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,016KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0.16
0
-0.16
0
-0.16

La matriz de rigidez para el elemento 3 es:

	6	7	8	9	2	3
6	16000000	8000000	-12000000	-4000000	-4000000	-4000000
7	8000000	16000000	-4000000	-4000000	-4000000	-12000000
8	-12000000	-4000000	12000000	0	0	4000000
9	-4000000	-4000000	0	4000000	4000000	0
2	-4000000	-4000000	0	4000000	4000000	0
3	-4000000	-12000000	4000000	0	0	12000000

Elemento 4: Existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, fuerzas de superficie actuando en la cara 4-2 en dirección vertical y una fuerza vertical aplicada en el nudo 3, por lo tanto se suman las fuerzas en la misma dirección que coinciden en un mismo nudo de la siguiente forma:

$$f_3 = -1KN$$

$$f_s^4 = -\frac{P_{4-2}^4 * L_{4-2}^4 * t}{2} = \frac{20 * 0,1 * 1}{2} = -2KN$$

$$f_b^4 = -\frac{\gamma * A^4 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,16KN$$

El vector de fuerzas es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -0.16 \\ 0 \\ -3.16 \\ 0 \\ -2.16 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez del elemento 4 es:

	8	9	4	5	2	3
8	4000000	0	-4000000	-4000000	0	4000000
9	0	12000000	-4000000	-12000000	4000000	0
4	-4000000	-4000000	16000000	8000000	-12000000	-4000000
5	-4000000	-12000000	8000000	16000000	-4000000	-4000000
2	0	4000000	-12000000	-4000000	12000000	0
3	4000000	0	-4000000	-4000000	0	4000000

Elemento 5: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^5 = -\frac{\gamma * A^5 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,16KN$$

El vector de fuerzas es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -0.16 \\ 0 \\ -0.16 \\ 0 \\ -0.16 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez del elemento 5 es:

	15	10	11	12	17	16
15	16000000	8000000	-12000000	-4000000	-4000000	-4000000
10	8000000	16000000	-4000000	-4000000	-4000000	-12000000
11	-12000000	-4000000	12000000	0	0	4000000
12	-4000000	-4000000	0	4000000	4000000	0
17	-4000000	-4000000	0	4000000	4000000	0
16	-4000000	-12000000	4000000	0	0	12000000

Elemento 6: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^6 = -\frac{\gamma * A^6 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,16KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0.16
0
-0.16
0
-0.16

La matriz de rigidez del elemento 6 es:

	11	12	6	7	17	16
11	4000000	0	-4000000	-4000000	0	4000000
12	0	12000000	-4000000	-12000000	4000000	0
6	-4000000	-4000000	16000000	8000000	-12000000	-4000000
7	-4000000	-12000000	8000000	16000000	-4000000	-4000000
17	0	4000000	-12000000	-4000000	12000000	0
16	-4000000	0	-4000000	-4000000	0	4000000

Elemento 7: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^7 = -\frac{\gamma * A^7 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,16KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0.16
0
-0.16
0
-0.16

La matriz de rigidez del elemento 7 es:

	11	12	13	14	6	7
11	16000000	8000000	-12000000	-4000000	-4000000	-4000000
12	8000000	16000000	-4000000	-4000000	-4000000	-12000000
13	-12000000	-4000000	12000000	0	0	4000000
14	-4000000	-4000000	0	4000000	4000000	0
6	-4000000	-4000000	0	4000000	4000000	0
7	-4000000	-12000000	4000000	0	0	12000000

Elemento 8: Solo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^8 = -\frac{\gamma * A^8 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,16KN$$

El vector de fuerzas es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -0.16 \\ 0 \\ -0.16 \\ 0 \\ -0.16 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez del elemento 8 es:

	13	14	8	9	6	7
13	4000000	0	-4000000	-4000000	0	4000000
14	0	12000000	-4000000	-12000000	4000000	0
8	-4000000	-4000000	16000000	8000000	-12000000	-4000000
9	-4000000	-12000000	8000000	16000000	-4000000	-4000000
6	0	4000000	-12000000	-4000000	12000000	0
7	4000000	0	-4000000	-4000000	0	4000000

PASO N°5: Se tiene que calcular el ensamblaje del vector de fuerzas, es decir se debe sumar las fuerzas resultantes de los elementos que concurren en un nudo y en la misma dirección, es decir:

$$\{f_{\alpha}\} = \sum_{e=1}^{e=8} \{f^{(e)}\}$$

Por lo tanto el vector de fuerzas ensamblado se calcula de la siguiente forma:

	e=1	e=2	e=3	e=4	e=5	e=6	e=7	e=8	=	
1	-0.16	-2.16							=	-2.32
2		0	0	0					=	0
3		-2.16	-0.16	-2.16					=	-4.48
4				0					=	0
5				-3.16					=	-3.16
6	0	0	0			0	0		=	0
7	-0.16	-0.16	-0.16			-0.16	-0.16	-0.16	=	-0.96
8			0	0			0	0	=	0
9			-0.16	-0.16			-0.16		=	-0.48
10					-0.16				=	-0.16
11					0	0	0	0	=	0
12					-0.16	-0.16	-0.16		=	-0.48
13								0	=	0
14							-0.16	0.16	=	-0.32

PASO N°6: Se tiene que ensamblar la matriz de rigidez global $[K_{\alpha\alpha}]$, es decir se tiene que sumar las componentes de una matriz que concurran en una misma fila y columna según el grado de libertad desconocido:

$$[K_{\alpha\alpha}] = \sum_{e=1}^{e=8} [K^{(e)}]$$

La matriz de rigidez ensamblada es:

	1	2	3	4	5	6	7
1	16000000	-4000000	-4000000	0	0	8000000	0
2	-4000000	32000000	8000000	-12000000	-4000000	-8000000	-8000000
3	-4000000	8000000	32000000	-4000000	-4000000	-8000000	-24000000
4	0	-12000000	-4000000	16000000	8000000	0	0
5	0	-4000000	-4000000	8000000	16000000	0	0
6	8000000	-8000000	-8000000	0	0	64000000	16000000
7	0	-8000000	-24000000	0	0	16000000	64000000
8	0	0	8000000	-4000000	-4000000	-24000000	-8000000
9	0	8000000	0	-4000000	-12000000	-8000000	-8000000
10	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	-8000000	-8000000
12	0	0	0	0	0	-8000000	-24000000
13	0	0	0	0	0	0	8000000
14	0	0	0	0	0	8000000	0

8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0
0	8000000	0	0	0	0	0
8000000	0	0	0	0	0	0
-4000000	-4000000	0	0	0	0	0
-4000000	-12000000	0	0	0	0	0
-24000000	-8000000	0	-8000000	-8000000	0	8000000
-8000000	-8000000	0	-8000000	-24000000	8000000	0
32000000	8000000	0	0	0	-4000000	-4000000
8000000	32000000	0	0	0	-4000000	-12000000
0	0	16000000	-4000000	-4000000	0	0
0	0	-4000000	32000000	8000000	-12000000	-4000000
0	0	-4000000	8000000	32000000	-4000000	-4000000
-4000000	-4000000	0	-12000000	-4000000	16000000	0
-4000000	-12000000	0	-4000000	-4000000	0	16000000

PASO N°7: Se tiene que calcular los desplazamientos nodales $\{a_\alpha\}$, es decir cómo se tiene la matriz de rigidez ensamblada y el vector de fuerzas ensambladas es posible encontrar los desplazamientos nodales según los grados de libertad desconocidos por la ecuación:

$$[K_{\alpha\alpha}]\{a_\alpha\} = \{f_\alpha\} \quad \rightarrow \quad \{a_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1}\{f_\alpha\}$$

La matriz ensamblada de rigidez inversa es:

	1	2	3	4	5	6	7
1	7.68017E-08	3.83376E-09	2.3727E-08	2.82496E-09	1.20478E-08	-1.4823E-08	1.828E-08
2	3.83376E-09	7.12456E-08	-3.226E-08	6.7797E-08	-6.6371E-08	1.18263E-08	-1.745E-08
3	2.37273E-08	-3.2258E-08	1.182E-07	-2.9076E-08	1.2149E-07	-4.4843E-09	8.296E-08
4	2.82496E-09	6.7797E-08	-2.908E-08	1.51961E-07	-1.1656E-07	1.37106E-08	-1.84E-08
5	1.20478E-08	-6.6371E-08	1.2149E-07	-1.1656E-07	3.14881E-07	3.46346E-09	1.04E-07
6	-1.4823E-08	1.18263E-08	-4.484E-09	1.37106E-08	3.46346E-09	3.33168E-08	-3.803E-09
7	1.82796E-08	-1.7451E-08	8.2964E-08	-1.84E-08	1.03998E-07	-3.8027E-09	8.837E-08
8	-1.289E-08	1.98889E-08	-1.306E-08	2.61293E-08	1.05297E-09	2.91952E-08	-1.16E-09
9	1.30566E-08	-6.2923E-08	1.1831E-07	-7.5729E-08	2.40075E-07	1.57924E-09	1.049E-07
10	2.27016E-09	-6.7741E-09	2.5471E-08	-7.5965E-09	4.26625E-08	4.8081E-09	2.598E-08
11	-2.9355E-09	-1.0035E-08	2.7277E-08	-1.1846E-08	6.45271E-08	1.44919E-08	2.596E-08
12	1.20161E-08	-1.7061E-08	7.4607E-08	-1.854E-08	1.06123E-07	4.74047E-09	7.796E-08
13	-8.2957E-09	-1.3825E-08	2.394E-08	-1.672E-08	8.32089E-08	2.1649E-08	2.072E-08
14	1.62517E-08	-5.4907E-08	1.1318E-07	-6.4716E-08	2.2125E-07	-3.3671E-09	1.063E-07

8	9	10	11	12	13	14
-1.289E-08	1.3057E-08	2.27016E-09	-2.9355E-09	1.2016E-08	-8.2957E-09	1.62517E-08
1.98889E-08	-6.292E-08	-6.7741E-09	-1.0035E-08	-1.706E-08	-1.3825E-08	-5.4907E-08
-1.3057E-08	1.1831E-07	2.54709E-08	2.72772E-08	7.4607E-08	2.39401E-08	1.1318E-07
2.61293E-08	-7.573E-08	-7.5965E-09	-1.1846E-08	-1.854E-08	-1.672E-08	-6.4716E-08
1.05297E-09	2.4007E-07	4.26625E-08	6.45271E-08	1.0612E-07	8.32089E-08	2.2125E-07
2.91952E-08	1.5792E-09	4.8081E-09	1.44919E-08	4.7405E-09	2.1649E-08	-3.3671E-09
-1.1599E-09	1.0495E-07	2.59797E-08	2.5956E-08	7.7963E-08	2.07195E-08	1.06301E-07
6.52011E-08	-5.187E-09	6.30554E-09	1.81591E-08	7.063E-09	3.09685E-08	4.1176E-09
-5.1875E-09	2.5288E-07	4.34849E-08	6.63382E-08	1.076E-07	8.6104E-08	2.31059E-07
6.30554E-09	4.3485E-08	7.69606E-08	2.4634E-08	3.3209E-08	2.62354E-08	4.62466E-08
1.81591E-08	6.6338E-08	2.4634E-08	7.29956E-08	2.554E-08	6.92781E-08	7.16814E-08
7.06304E-09	1.076E-07	3.32086E-08	2.55403E-08	1.0729E-07	3.56635E-08	1.13305E-07
3.09685E-08	8.6104E-08	2.62354E-08	6.92781E-08	3.5664E-08	1.42283E-07	8.77311E-08
4.1176E-09	2.3106E-07	4.62466E-08	7.16814E-08	1.1331E-07	8.77311E-08	2.84754E-07

El vector de fuerzas ensamblada es:

	1
1	-2.32
2	0
3	-4.48
4	0
5	-3.16
6	0
7	-0.96
8	0
9	-0.48
10	-0.16
11	0
12	-0.48
13	0
14	-0.32

Multiplicando matricialmente la matriz de rigidez inversa y el vector de fuerzas, es posible obtener el vector de desplazamientos nodales que es igual a:

1	-3.57696E-07
2	4.19154E-07
3	-1.18102E-06
4	5.76889E-07
5	-1.91089E-06
6	4.44596E-08
7	-9.53527E-07
8	8.29589E-08
9	-1.67362E-06
10	-3.43056E-07
11	-4.15196E-07
12	-9.17028E-07
13	-4.61557E-07
14	-1.60976E-06

PASO N°8: Con los desplazamientos nodales conocidos y con la matriz de operadores diferenciales cuyos componentes están en función a las coordenadas del elemento finito, es posible calcular las deformaciones en cada elemento, por la siguiente ecuación:

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{a^{(e)}\}$$

Elemento 1: La matriz de operadores diferenciales para una condición plana de esfuerzos y deformaciones es de tamaño constante de 3x6, el vector de desplazamientos para el elemento 1 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 1 son: 17, 16, 6, 7, 18 y 1, su tamaño es un vector de 6x1, por lo tanto el tamaño del vector de deformaciones es de 3x1.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 1 es:

$$[B^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

-5	0	5	0	0	0
0	-5	0	0	0	5
-5	-5	0	5	5	0

El vector de desplazamientos para elemento 1 según sus grados de libertad es:

17	0
16	0
6	4.44596E-08
7	-9.53527E-07
18	0
1	-3.57696E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 1 es:

$$\begin{Bmatrix} 2.22298E-07 \\ -1.78848E-06 \\ -4.76763E-06 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2: El vector de desplazamientos para el elemento 2 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 2 son: 6, 7, 2, 3, 18 y 1.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 2 es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

El vector de desplazamientos para elemento 2 según sus grados de libertad es:

$$\begin{Bmatrix} 6 & 4.44596E-08 \\ 7 & -9.53527E-07 \\ 2 & 4.19154E-07 \\ 3 & -1.18102E-06 \\ 18 & 0 \\ 1 & -3.57696E-07 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 2 es:

$$\begin{Bmatrix} 2.09577E-06 \\ -1.13747E-06 \\ -2.24315E-06 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3: El vector de desplazamientos para el elemento 3 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 3 son: 6, 7, 8, 9, 2 y 3.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 3 es:

-5	0	5	0	0	0
0	-5	0	0	0	5
-5	-5	0	5	5	0

El vector de desplazamientos para elemento 3 según sus grados de libertad es:

6	4.44596E-08
7	-9.53527E-07
8	8.29589E-08
9	-1.67362E-06
2	4.19154E-07
3	-1.18102E-06

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 3 es:

1.92497E-07
-1.13747E-06
-1.72701E-06

Elemento 4: El vector de desplazamientos para el elemento 4 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 4 son: 8, 9, 4, 5, 2 y 3.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 4 es:

0	0	5	0	-5	0
0	-5	0	5	0	0
-5	0	5	5	0	-5

El vector de desplazamientos para elemento 4 según sus grados de libertad es:

8	8.29589E-08
9	-1.67362E-06
4	5.76889E-07
5	-1.91089E-06
2	4.19154E-07
3	-1.18102E-06

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 4 es:

7.88673E-07
-1.18633E-06
-1.17969E-06

Elemento 5: El vector de desplazamientos para el elemento 5 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 5 son: 15, 10, 11, 12, 17 y 16.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 5 es:

-5	0	5	0	0	0
0	-5	0	0	0	5
-5	-5	0	5	5	0

El vector de desplazamientos para elemento 5 según sus grados de libertad es:

15	0
10	-3.43056E-07
11	-4.15196E-07
12	-9.17028E-07
17	0
16	0

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 5 es:

$$\begin{Bmatrix} -2.07598E-06 \\ 1.71528E-06 \\ -2.86986E-06 \end{Bmatrix}$$

Elemento 6: El vector de desplazamientos para el elemento 6 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 6 son: 11, 12, 6, 7, 17 y 16.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 6 es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

El vector de desplazamientos para elemento 6 según sus grados de libertad es:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{11} & -4.15196E-07 \\ \mathbf{12} & -9.17028E-07 \\ \mathbf{6} & 4.44596E-08 \\ \mathbf{7} & -9.53527E-07 \\ \mathbf{17} & 0 \\ \mathbf{16} & 0 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 6 es:

$$\begin{Bmatrix} 2.22298E-07 \\ -1.82493E-07 \\ -2.46936E-06 \end{Bmatrix}$$

Elemento 7: El vector de desplazamientos para el elemento 7 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 7 son: 11, 12, 8, 9, 6 y 7.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 7 es:

-5	0	5	0	0	0
0	-5	0	0	0	5
-5	-5	0	5	5	0

El vector de desplazamientos para elemento 7 según sus grados de libertad es:

11	-4.15196E-07
12	-9.17028E-07
13	-4.61557E-07
14	-1.60976E-06
6	4.44596E-08
7	-9.53527E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 7 es:

-2.31804E-07
-1.82493E-07
-1.1654E-06

Elemento 8: El vector de desplazamientos para el elemento 8 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 8 son: 11, 12, 8, 9, 6 y 7.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 8 es:

0	0	5	0	-5	0
0	-5	0	5	0	0
-5	0	5	5	0	-5

El vector de desplazamientos para elemento 8 según sus grados de libertad es:

13	-4.61557E-07
14	-1.60976E-06
8	8.29589E-08
9	-1.67362E-06
6	4.44596E-08
7	-9.53527E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 8 es:

1.92497E-07
-3.19298E-07
-8.77904E-07

PASO N°9: Conociendo las deformaciones en todos los elementos como también la matriz constitutiva cuyas componentes están en función al coeficiente de Poisson y al Módulo de Elasticidad el tamaño de la matriz para una condición plana de esfuerzos y deformaciones es de 3x3, es posible conocer el vector de esfuerzos de tamaño 3x1 en los elementos por la siguiente ecuación:

$$\{\sigma^{(e)}\} = [D^{(e)}]\{\varepsilon^{(e)}\}$$

La matriz constitutiva es constante en todos los elementos porque se está trabajando con un material homogéneo, por lo tanto es:

24000000	8000000	0
8000000	24000000	0
0	0	8000000

Elemento 1: El vector de esfuerzos para el elemento 1 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 1 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} -8.9727045 \\ -41.14518 \\ -38.141075 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2: El vector de esfuerzos para el elemento 2 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 2 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} 41.1987664 \\ -10.533073 \\ -17.94518 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3: El vector de esfuerzos para el elemento 3 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 3 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} -4.479829 \\ -25.759271 \\ -13.816062 \end{Bmatrix}$$

Elemento 4: El vector de esfuerzos para el elemento 4 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 4 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} 9.43752435 \\ -22.162476 \\ -9.4375243 \end{Bmatrix}$$

Elemento 5: El vector de esfuerzos para el elemento 5 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 5 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{bmatrix} -36.101269 \\ 24.5588897 \\ -22.95889 \end{bmatrix}$$

Elemento 6: El vector de esfuerzos para el elemento 6 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 6 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{bmatrix} 3.87520696 \\ -2.601446 \\ -19.754855 \end{bmatrix}$$

Elemento 7: El vector de esfuerzos para el elemento 7 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 7 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{bmatrix} -7.023228 \\ -6.2342577 \\ -9.3231861 \end{bmatrix}$$

Elemento 8: El vector de esfuerzos para el elemento 8 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 8 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} 2.06553268 \\ -6.1231861 \\ -7.023228 \end{Bmatrix}$$

PASO N°10: Calcular los valores nodales tanto para esfuerzos como para deformaciones, el procedimiento de cálculo consiste en hacer una ponderación de aquellos elementos que tengan un nudo en común con sus respectivas áreas, es decir:

$$\psi_{nodo} = \frac{1}{A_T} * \sum_{e=1}^{e=n} A^{(e)} \psi^{(e)}$$

Deformación en dirección xx:

Nudo 1: El nudo 1 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 1 y 2, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\epsilon_{xx1} = \frac{(2.22 \times 10^{-7}) + (20.95 \times 10^{-7})}{2} = 11.59 \times 10^{-7}$$

Nudo 2: El nudo 2 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 2, 3 y 4, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\epsilon_{xx2} = \frac{20.95 \times 10^{-7} + 1.92 \times 10^{-7} + 7.88 \times 10^{-7}}{3} = 10.256 \times 10^{-7}$$

Nudo 3: El nudo 3 tiene como elementos comunes sólo al elemento finito 4, por lo tanto la deformación de este elemento aporta al nudo, es decir:

$$\epsilon_{xx3} = 7.88 \times 10^{-7}$$

Nudo 4: El nudo 4 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 1, 5 y 6, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx4} = \frac{2.22x10^{-7} + (-20.76x10^{-7}) + 2.22x10^{-7}}{3} = -5.438x10^{-8}$$

Nudo 5: El nudo 5 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 1, 2, 3, 6,7 y 8, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx5} &= \frac{2.22x10^{-7} + 20.95x10^{-7} + 1.92x10^{-7} + 2.22x10^{-7} + (-2.31x10^{-7}) + 1.92x10^{-7}}{6} \\ &= 4.48x10^{-7} \end{aligned}$$

Nudo 6: El nudo 6 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 3, 4 y 8, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx6} = \frac{1.92x10^{-7} + 7.88x10^{-7} + 1.92x10^{-7}}{3} = 3.91x10^{-7}$$

Nudo 7: El nudo 7 tiene como elementos comunes sólo al elemento finito 5, por lo tanto la deformación de este elemento aporta al nudo, es decir:

$$\varepsilon_{xx7} = -20.76x10^{-7}$$

Nudo 8: El nudo 8 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 5, 6 y 7, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx8} = \frac{-20.75x10^{-7} + 2.22x10^{-7} + (-2.31x10^{-7})}{3} = -6.95x10^{-7}$$

Nudo 9: El nudo 9 tiene como elementos comunes sólo al elemento finito 7 y 8, por lo tanto la deformación de este elemento aporta al nudo, es decir:

$$\varepsilon_{xx9} = \frac{1.92x10^{-7} + (-2.31x10^{-7})}{2} = -1.97x10^{-8}$$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

	1	115.90	} x 10 ⁻⁸
	2	102.56	
	3	78.87	
	4	-54.38	
$\epsilon_{xx} =$	5	44.89	
	6	39.12	
	7	-207.60	
	8	-69.52	
	9	-1.97	

Deformación en dirección yy:

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con las deformaciones en dirección yy:

Nudo 1: → $\epsilon_{yy 1} = -1,46x10^{-6}$

Nudo 2: → $\epsilon_{yy 2} = -1,15x10^{-6}$

Nudo 3: → $\epsilon_{yy 3} = -1,18x10^{-6}$

Nudo 4: → $\epsilon_{yy 4} = -8.52x10^{-8}$

Nudo 5: → $\epsilon_{yy 5} = -7.913x10^{-7}$

Nudo 6: → $\epsilon_{yy 6} = -8.81x10^{-7}$

Nudo 7: → $\epsilon_{yy 7} = 17.15x10^{-7}$

Nudo 8: → $\epsilon_{yy 8} = 4.501x10^{-7}$

Nudo 9: → $\epsilon_{yy 9} = -2.509x10^{-7}$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

	1	-146.30	
	2	-115.38	
	3	-118.63	
	4	-8.52	
$\varepsilon_{yy} =$	5	-79.13	$\times 10^{-8}$
	6	-88.10	
	7	171.53	
	8	45.01	
	9	-25.09	

Deformación en dirección xy :

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con las deformaciones en dirección xy :

Nudo 1: $\rightarrow \varepsilon_{xy 1} = -3,50 \times 10^{-6}$

Nudo 2: $\rightarrow \varepsilon_{xy 2} = -1,71 \times 10^{-6}$

Nudo 3: $\rightarrow \varepsilon_{xy 3} = -1,17 \times 10^{-6}$

Nudo 4: $\rightarrow \varepsilon_{xy 4} = -3.369 \times 10^{-6}$

Nudo 5: $\rightarrow \varepsilon_{xy 5} = -2.20 \times 10^{-6}$

Nudo 6: $\rightarrow \varepsilon_{xy 6} = -1.26 \times 10^{-6}$

Nudo 7: $\rightarrow \varepsilon_{xy 7} = -2.87 \times 10^{-6}$

Nudo 8: $\rightarrow \varepsilon_{xy 8} = -2.16 \times 10^{-6}$

Nudo 9: $\rightarrow \varepsilon_{xy 9} = -1.02 \times 10^{-6}$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

	1	-350.54	
	2	-171.66	
	3	-117.97	
	4	-336.90	
$V_{xy} =$	5	-220.84	$\times 10^{-8}$
	6	-126.15	
	7	-286.99	
	8	-216.82	
	9	-102.17	

Esfuerzos en dirección xx :

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con los esfuerzos en dirección xx :

Nudo 1: $\rightarrow \sigma_{xx 1} = 16.113$

Nudo 2: $\rightarrow \sigma_{xx 2} = 15.385$

Nudo 3: $\rightarrow \sigma_{xx 3} = 9.438$

Nudo 4 $\rightarrow \sigma_{xx 4} = -13.733$

Nudo 5: $\rightarrow \sigma_{xx 5} = 4.44$

Nudo 6: $\rightarrow \sigma_{xx 6} = 2.34$

Nudo 7: $\rightarrow \sigma_{xx 7} = -36.101$

Nudo 8: $\rightarrow \sigma_{xx 8} = -13.083$

Nudo 9: $\rightarrow \sigma_{xx 9} = -2.479$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

	1	
1	16.113	}
2	15.385	
3	9.438	
4	-13.733	
$\sigma_{xx} =$	4.444	
6	2.34	
7	-36.101	
8	-13.083	
9	-2.479	

Esfuerzos en dirección yy:

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con los esfuerzos en dirección yy:

Nudo 1: $\rightarrow \sigma_{yy 1} = -25.839$

Nudo 2: $\rightarrow \sigma_{yy 2} = -19.485$

Nudo 3: $\rightarrow \sigma_{yy 3} = -22.162$

Nudo 4 $\rightarrow \sigma_{yy 4} = -6.396$

Nudo 5: $\rightarrow \sigma_{yy 5} = -15.399$

Nudo 6: $\rightarrow \sigma_{yy 6} = -18.015$

Nudo 7: $\rightarrow \sigma_{yy 7} = 24.559$

Nudo 8: $\rightarrow \sigma_{yy 8} = 5.2411$

Nudo 9: $\rightarrow \sigma_{yy 9} = -6.179$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

	1
1	-25.839
2	-19.485
3	-22.162
4	-6.396
$\sigma_{yy} =$ 5	-15.399
6	-18.015
7	24.559
8	5.2411
9	-6.179

Esfuerzos en dirección xy :

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con los esfuerzos en dirección xy :

Nudo 1: $\rightarrow \sigma_{xy 1} = -28.043$

Nudo 2: $\rightarrow \sigma_{xy 2} = -13.733$

Nudo 3: $\rightarrow \sigma_{xy 3} = -9.438$

Nudo 4: $\rightarrow \sigma_{xy 4} = -26.952$

Nudo 5: $\rightarrow \sigma_{xy 5} = -17.667$

Nudo 6: $\rightarrow \sigma_{xy 6} = -10.092$

Nudo 7: $\rightarrow \sigma_{xy 7} = -22.959$

Nudo 8: $\rightarrow \sigma_{xy 8} = -17.346$

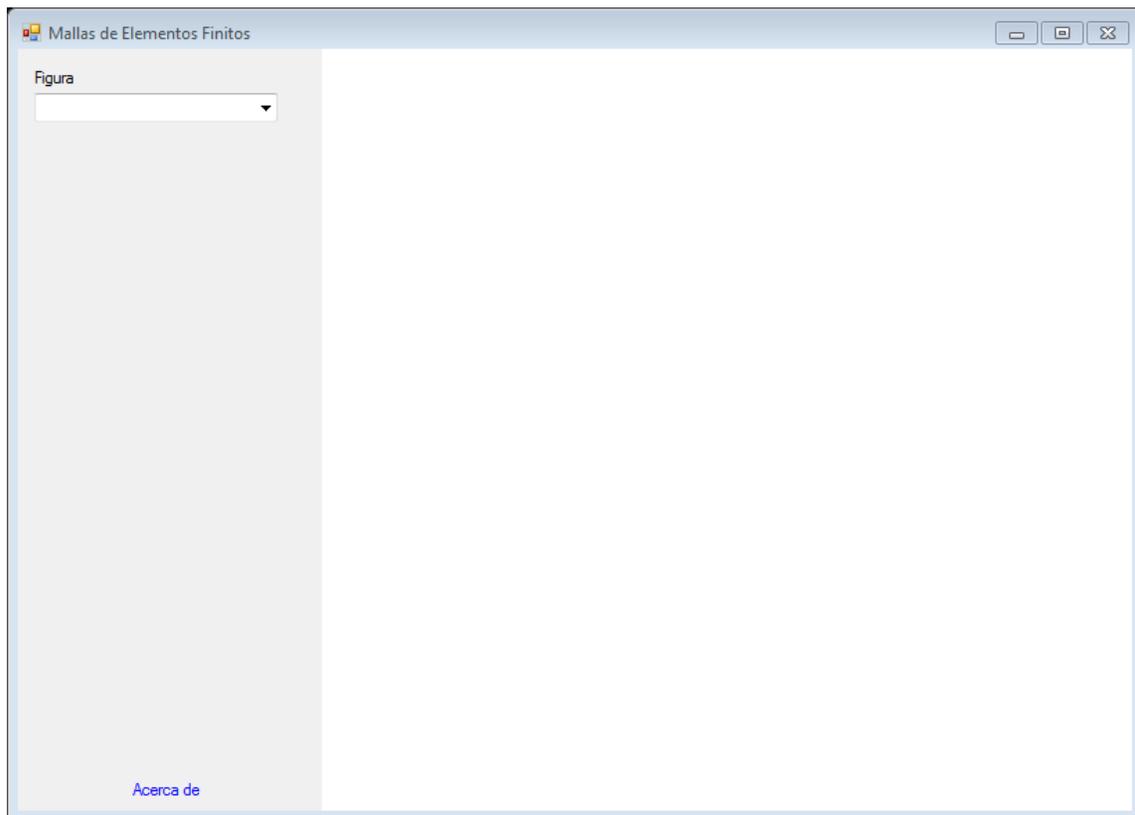
Nudo 9: $\rightarrow \sigma_{xy 9} = -8.173$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

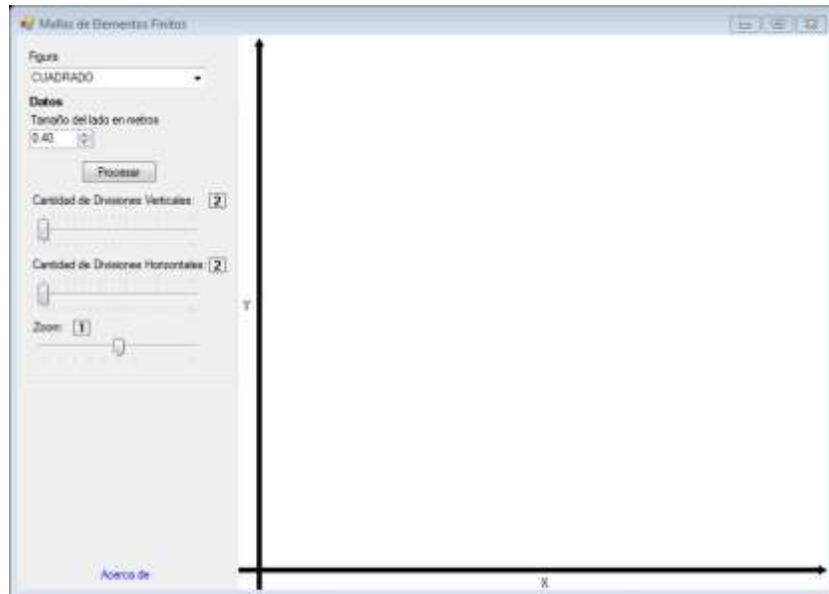
	1	
1	-28.043 -13.733 -9.438 -26.952 -17.667 -10.092271 -22.959 -17.346 -8.173	
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
$\epsilon_{xy} =$		

Con el programa:

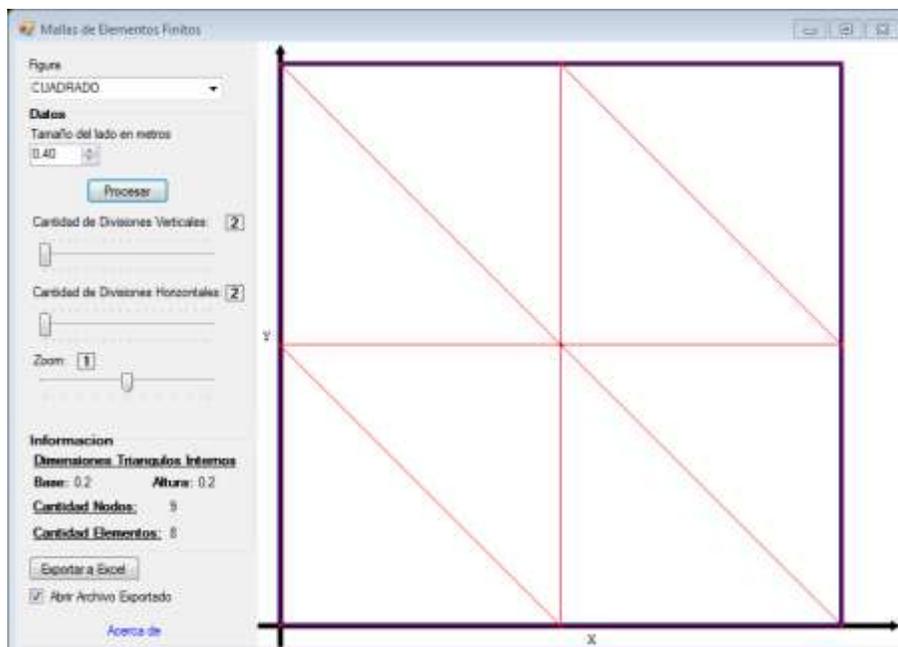
Se elige la figura que se desea analizar en este caso un cuadrado



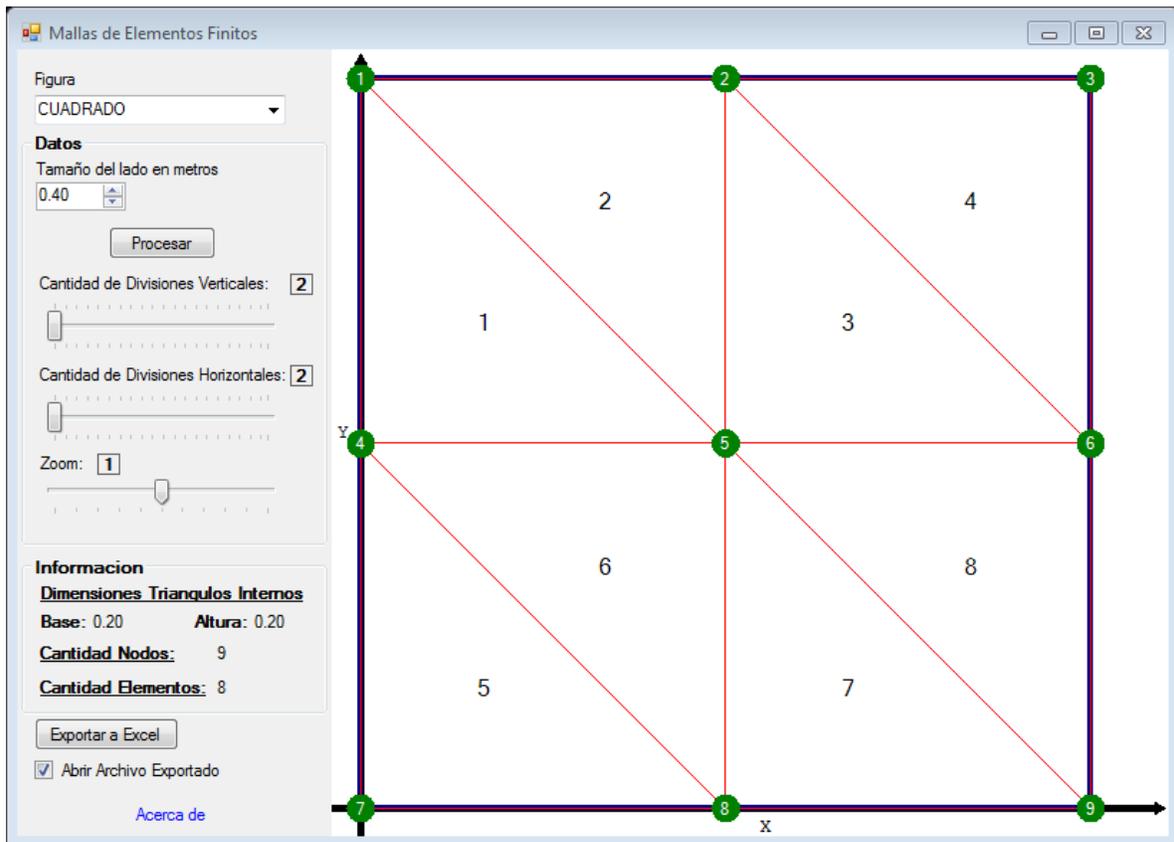
Se introduce las dimensiones del cuadrado que en este caso es de 0.40 m y se presiona en “PROCESAR”



Una vez obtenida esta imagen se va desplazando el cursores donde dice “ CANTIDAD DE DIVISIONES VERTICALES” y “CANTIDAD DE DIVISIONES HORIZONTALES” para obtener el número deseado de triángulos. También se puede observar que en la parte inferior de la pantalla aparece las dimensiones de los triángulos, la cantidad de nodos y elementos existentes.



Se presiona “EXPORTAR A EXCEL”



Y de manera automática los datos serán llevados al Excel

Hoja TB_GEN: En esta hoja se escriben los parámetros generales como el título, número de grados de libertad por nudo, número de nudos por elemento para nuestro caso es un elemento finito triangular y número de dimensiones del problema en nuestro caso el análisis es en 2 dimensiones. Como propiedades mecánicas el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young, la relación de Poisson, espesor, y el tipo de problema que para nuestro caso es en una condición plana de deformaciones.

La forma de cómo ingresar los datos para nuestro problema es:

TITULO

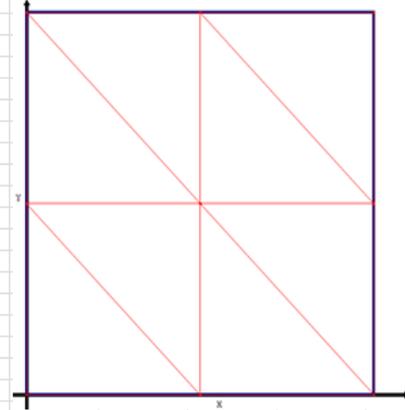
PROBLEMAS DE ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

PÁRAMETROS GENERALES

NÚMERO DE NUDOS	9
NÚMERO DE ELEMENTOS	8
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD POR NUDO	2
NÚMERO DE NUDOS POR ELEMENTO	3
NÚMERO DE DIMENSIONES DEL PROBLEMA	2

PROPIEDADES MECÁNICAS

MODULO DE YOUNG	2.00E+07	kN/m ²
RELACION DE POISSON	0.25	
ESPESOR (PARA PROBLEMA PLANO DE ESFUERZOS)	1.00	m
TIPO DE PROBLEMA (0=PLANO DE ESFUERZOS , 1=PLANO DE DEFORMACIONES)	1	



Hoja TB_XYZ: En esta hoja se muestran las coordenadas de la malla de elementos finitos que son valores colocados automáticamente por el programa, ordenados de forma secuencial, definiendo un sistema de referencia coordenado, para nuestro problema se fija el sistema de referencia en el apoyo inferior, por lo tanto la tabla de coordenadas de los nudos es la siguiente:

TABLA DE COORDENADAS DE LOS NUDOS

NUDO	m	m
	X	Y
1	0.000	0.400
2	0.200	0.400
3	0.400	0.400
4	0.000	0.200
5	0.200	0.200
6	0.400	0.200
7	0.000	0.000
8	0.200	0.000
9	0.400	0.000

Hoja TB_ELE: En esta hoja se muestran los nudos asociados a cada elemento de la malla que son valores colocados automáticamente por el programa, ordenados de forma secuencial

en sentido antihorario, por lo tanto la tabla de coordenadas asociados a cada nudo es la siguiente:

ELE	NI	NJ	NK
1	4	5	1
2	5	2	1
3	5	6	2
4	6	3	2
5	7	8	4
6	8	5	4
7	8	9	5
8	9	6	5

Hoja TB_RES: En esta hoja se escriben las condiciones de borde naturales, asignando el tipo de desplazamiento y el valor del desplazamiento conocido, es decir indicando los grados de libertad conocidos por cada nudo. Para nuestro ejercicio tenemos 3 apoyos en los nudos 1, 4 y 7 los cuales restringen movimientos en las direcciones de sus reacciones y sus desplazamientos en esas direcciones son nulas, por lo tanto la tabla de desplazamientos nodales conocidos es la siguiente:

NUDO	Tipo de desplazamiento		NUDO	Valor de desplazamiento conocido	
	UX	UY		UX	UY
1	001	000	1	0.000	
4	001	001	4	0.000	0.000
7	001	000	7	0.000	

Hoja TB_FUN: En esta hoja se escriben las componentes de las fuerzas puntuales aplicadas a cada uno de los nudos, para nuestro ejercicio tenemos una fuerza puntual en dirección

vertical hacia abajo en el nudo 3, en esa dirección la fuerza se considera negativa, por lo tanto tabla de fuerzas en los nudos es la siguiente:

TABLA DE FUERZAS EN LOS NUDOS			
	kN	kN	
NUDO	FX	FY	
3	0,000	-1,000	

Hoja TB_FUE: En esta hoja se escriben las componentes de las fuerzas distribuidas por unidad de superficie y por unidad de volumen aplicadas sobre los elementos, en el caso de las fuerzas por unidad de superficie es necesario indicar en qué cara del elemento finito está actuando dicha fuerza de acuerdo a los nudos asociados a cada elemento, para nuestro ejercicio existe una fuerza de superficie actuando en las caras de los elementos 2 y 4, para el elemento 2 está actuando en la cara o lado que tiene como frontera a los nudos 2 y 1, de acuerdo a la tabla de nudos asociados a cada elemento dichos nudos están en la cara o lado número 2, lo mismo para el elemento 4 la fuerza de superficie actúa desde el nudo 3 al 2 que corresponde al lado 2. Para las fuerzas de volumen es decir el peso propio actúan en todo el volumen de cada elemento finito por lo tanto hay que escribir el valor del peso específico del hormigón en los 8 elementos, en consecuencia la tabla de fuerzas en los elementos es la siguiente:

TABLA DE FUERZAS EN LOS ELEMENTOS					
	kN/m ³	kN/m ³	kN/m ²	kN/m ²	
ELEM	WX	WY	PX	PY	CARA
1	0.000	-24.000	0.000	0.000	1
2	0.000	-24.000	0.000	-20.000	2
3	0.000	-24.000	0.000	0.000	1
4	0.000	-24.000	0.000	-20.000	2
5	0.000	-24.000	0.000	0.000	1
6	0.000	-24.000	0.000	0.000	1
7	0.000	-24.000	0.000	0.000	1
8	0.000	-24.000	0.000	0.000	1

Al concluir el ingreso de datos en todas las hojas de ingreso de datos, se da el paso final de ingresar a la hoja de salida o resultados TB_OUT, en la cual simplemente se tiene que

seleccionar la ventana creada con el nombre EJECUTAR, el cual procede al cálculo correspondiente.

Para nuestro ejercicio se obtuvieron que las respuestas son exactamente las mismas de las que se hicieron de forma manual, por lo tanto se puede dar validez que el programa goza de toda confiabilidad y eficacia.

UXX() (9x1)	
	C1
F1	1,1590E-06
F2	1,0256E-06
F3	7,8867E-07
F4	-5,4379E-07
F5	4,4893E-07
F6	3,9122E-07
F7	-2,0760E-06
F8	-6,9516E-07
F9	-1,9653E-08

UYX() (9x1)	
	C1
F1	-1,4630E-06
F2	-1,1538E-06
F3	-1,1863E-06
F4	-8,5231E-08
F5	-7,9128E-07
F6	-8,8103E-07
F7	1,7153E-06
F8	4,5010E-07
F9	-2,5090E-07

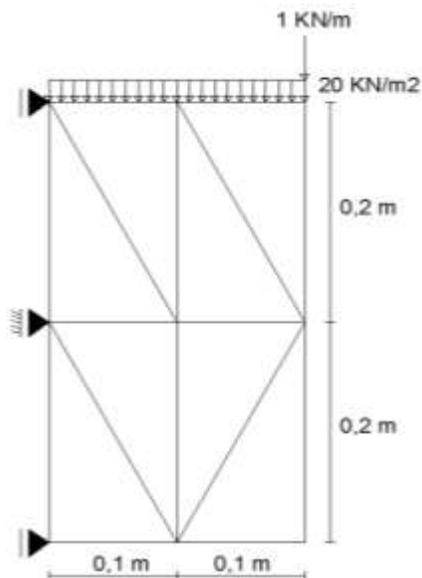
UXY() (9x1)	
	C1
F1	-3,5054E-06
F2	-1,7166E-06
F3	-1,1797E-06
F4	-3,3690E-06
F5	-2,2084E-06
F6	-1,2615E-06
F7	-2,8699E-06
F8	-2,1682E-06
F9	-1,0217E-06

NXX() (9x1)	
	C1
F1	1,6113E+01
F2	1,5388E+01
F3	9,4375E+00
F4	-1,3733E+01
F5	4,4440E+00
F6	2,3411E+00
F7	-3,6101E+01
F8	-1,3083E+01
F9	-2,4788E+00

NYX() (9x1)	
	C1
F1	-2,5839E+01
F2	-1,9485E+01
F3	-2,2162E+01
F4	-6,3959E+00
F5	-1,5399E+01
F6	-1,8015E+01
F7	2,4559E+01
F8	5,2411E+00
F9	-6,1787E+00

NYX() (9x1)	
	C1
F1	-2,8043E+01
F2	-1,3733E+01
F3	-9,4375E+00
F4	-2,6952E+01
F5	-1,7667E+01
F6	-1,0092E+01
F7	-2,2959E+01
F8	-1,7346E+01
F9	-8,1732E+00

4.2 Ejercicio N° 2:



Soporta una carga uniformemente distribuida de $1 \frac{KN}{m}$ y una carga de superficie de $20 \frac{KN}{m^2}$ además de su peso propio con un espesor $t = 1 m$. La viga es de Hormigón con peso específico $\gamma = 24 \frac{KN}{m^3}$, módulo de elasticidad longitudinal $E = 20 \times 10^6 \frac{KN}{m^2}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. La viga se va a dividir en 8 elementos finitos triangulares. Donde las incógnitas del problema son encontrar el vector de deformaciones y el vector de esfuerzos en los nudos o vértices del elemento finito.

Forma manual:

PASO N°1: Se tiene que calcular el número de grados de libertad total, números de grados de libertad conocidos y el número de grados de libertad desconocidos, el grado de libertad por nudo es igual a 2.

$GLN \rightarrow$ Grados de libertad por nudo

$GLT \rightarrow$ Grados de libertad total

$GLC \rightarrow$ Grados de libertad conocidos

$GLD \rightarrow$ Grados de libertad desconocidos

$n \rightarrow$ Número de nudos

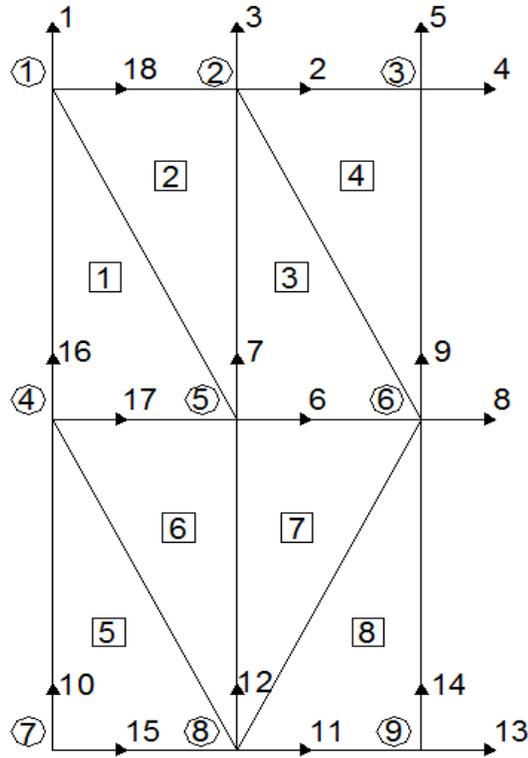
Por lo tanto:

$$GLT = n * GLN = 9 * 2 = 18$$

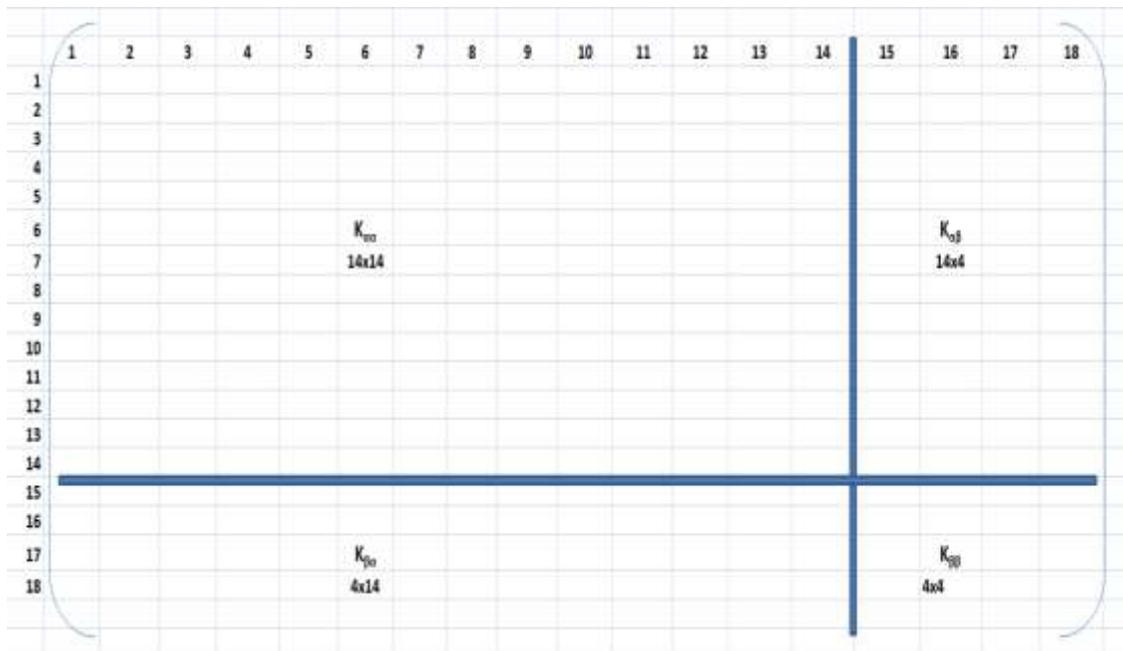
$$GLC = 4$$

$$GLD = GLT - GLC = 18 - 4 = 14$$

PASO N°2: Enumerar los diferentes nudos y elementos de forma ordenada, luego se comienza a numerar los grados de libertad desconocidos de forma ascendente (1,2,3,4,...,14) para luego los grados de libertad conocidos de forma descendente (18,17,16 y 15). La grafica que muestra dicha operación es la siguiente:



PASO N°3: Crear la matriz de toda la estructura, el número de filas y columnas es igual al grado de libertad total, es decir el número de nudos por el número de grados de libertad por nudo, es una matriz cuadrada y simétrica, en el cual se puede identificar 4 submatrices, pero que sólo nos interesa la submatriz de grados de libertad desconocidos es decir $K_{\alpha\alpha}$.



Paso N°4: Se calcula la matriz de rigidez de cada elemento y la magnitud resultante del vector de fuerzas nodales, tales como las fuerzas de superficie, fuerzas de volumen y fuerzas puntuales si actúan simultáneamente.

Elemento 1: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^1 = -\frac{\gamma * A^1 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,08KN$$

El vector de fuerzas es:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -0,08 \\ 0 \\ -0,08 \\ 0 \\ -0,08 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez para el elemento 1 es:

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

	17	15	6	7	18	1
17	26000000	8000000	-24000000	-4000000	-2000000	-4000000
16	8000000	14000000	4000000	-8000000	-4000000	-6000000
6	-24000000	-4000000	24000000	0	0	4000000
7	-4000000	-8000000	0	8000000	4000000	0
18	-2000000	-4000000	0	4000000	2000000	0
1	-4000000	-6000000	4000000	0	0	6000000

Se numeran los grados de libertad correspondientes a cada elemento, comenzando en un vértice cualquiera del elemento pero en sentido antihorario. Se eliminan las filas y columnas las cuales contengan los grados de libertad conocidos, de tal forma que solo se trabaje con la matriz de grados de libertad desconocidos.

Elemento 2: Existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical las cuales se reparten equitativamente a cada nodo y fuerzas de superficie actuando en la cara 2-18 en dirección vertical, por lo tanto se suman las fuerzas en la misma dirección que coinciden en un mismo nudo de la siguiente forma:

$$f_s^2 = -\frac{P_{2-18}^2 * L_{2-18}^2 * t}{2} = \frac{20 * 0,1 * 1}{2} = -1KN$$

$$f_b^2 = -\frac{\gamma * A^2 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,08KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0,08
0
-1,08
0
-1,08

La matriz de rigidez para el elemento 2 es:

	6	7	2	3	18	1
6	2000000	0	-2000000	-4000000	0	4000000
7	0	6000000	-4000000	-6000000	4000000	0
2	-2000000	-4000000	26000000	8000000	-24000000	-4000000
3	-4000000	-6000000	8000000	14000000	-4000000	-8000000
18	0	4000000	-24000000	-4000000	24000000	0
1	4000000	0	-4000000	-8000000	0	8000000

Elemento 3: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^3 = -\frac{\gamma * A^3 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,08KN$$

El vector de fuerzas es:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,08 \\ 0 \\ -0,08 \\ 0 \\ -0,08 \end{pmatrix}$$

La matriz de rigidez para el elemento 3 es:

	6	7	8	9	2	3
6	26000000	8000000	-24000000	-4000000	-2000000	-4000000
7	8000000	14000000	-4000000	-8000000	-4000000	-6000000
8	-24000000	-4000000	24000000	0	0	4000000
9	-4000000	-8000000	0	8000000	4000000	0
2	-2000000	-4000000	0	4000000	2000000	0
3	-4000000	-6000000	4000000	0	0	6000000

Elemento 4: Existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, fuerzas de superficie actuando en la cara 4-2 en dirección vertical y una fuerza vertical aplicada en el nudo 3, por lo tanto se suman las fuerzas en la misma dirección que coinciden en un mismo nudo de la siguiente forma:

$$f_3 = -1KN$$

$$f_s^4 = -\frac{P_{4-2}^4 * L_{4-2}^4 * t}{2} = \frac{20 * 0,1 * 1}{2} = -1KN$$

$$f_b^4 = -\frac{\gamma * A^4 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,08KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0,08
0
-2,08
0
-1,08

La matriz de rigidez del elemento 4 es:

	8	9	4	5	2	3
8	2000000	0	-2000000	-4000000	0	4000000
9	0	6000000	-4000000	-6000000	4000000	0
4	-2000000	-4000000	26000000	8000000	-24000000	-4000000
5	-4000000	-6000000	8000000	14000000	-4000000	-8000000
2	0	4000000	-24000000	-4000000	24000000	0
3	4000000	0	-4000000	-8000000	0	8000000

Elemento 5: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^5 = -\frac{\gamma * A^5 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,08KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0,08
0
-0,08
0
-0,08

La matriz de rigidez del elemento 5 es:

	15	10	11	12	17	16
15	26000000	8000000	-24000000	-4000000	-2000000	-4000000
10	8000000	14000000	-4000000	-8000000	-4000000	-6000000
11	-24000000	-4000000	24000000	0	0	4000000
12	-4000000	-8000000	0	8000000	4000000	0
17	-2000000	-4000000	0	4000000	2000000	0
16	-4000000	-6000000	4000000	0	0	6000000

Elemento 6: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^6 = -\frac{\gamma * A^6 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,08KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0,08
0
-0,08
0
-0,08

La matriz de rigidez del elemento 6 es:

	11	12	6	7	17	16
11	2000000	0	-2000000	-4000000	0	4000000
12	0	6000000	-4000000	-6000000	4000000	0
6	-2000000	-4000000	26000000	8000000	-24000000	-4000000
7	-4000000	-6000000	8000000	14000000	-4000000	-8000000
17	0	4000000	-24000000	-4000000	24000000	0
16	4000000	0	-4000000	-8000000	0	8000000

Elemento 7: Sólo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^7 = -\frac{\gamma * A^7 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,08KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0,08
0
-0,08
0
-0,08

La matriz de rigidez del elemento 7 es:

	11	12	8	9	6	7
11	2000000	0	0	-4000000	-2000000	4000000
12	0	6000000	-4000000	0	4000000	-6000000
8	0	-4000000	24000000	0	-24000000	4000000
9	-4000000	0	0	8000000	4000000	-8000000
6	-2000000	4000000	-24000000	4000000	26000000	-8000000
7	4000000	-6000000	4000000	-8000000	-8000000	14000000

Elemento 8: Solo existen fuerzas de volumen debido al peso propio en dirección vertical, las cuales se reparten equitativamente a cada nodo, por lo tanto se calcula de la siguiente forma:

$$f_b^8 = -\frac{\gamma * A^8 * t}{3} = \frac{24 * \left(\frac{0,1 * 0,2}{2}\right) * 1}{3} = -0,08KN$$

El vector de fuerzas es:

0
-0,08
0
-0,08
0
-0,08

La matriz de rigidez del elemento 8 es:

	11	12	13	14	8	9
11	24000000	0	-24000000	4000000	0	-4000000
12	0	8000000	4000000	-8000000	-4000000	0
13	-24000000	4000000	26000000	-8000000	-2000000	4000000
14	4000000	-8000000	-8000000	14000000	4000000	-6000000
8	0	-4000000	-2000000	4000000	2000000	0
9	-4000000	0	4000000	-6000000	0	6000000

PASO N°5: Se tiene que calcular el ensamblaje del vector de fuerzas, es decir se debe sumar las fuerzas resultantes de los elementos que concurren en un nudo y en la misma dirección, es decir:

$$\{f_{\alpha}\} = \sum_{e=1}^{e=8} \{f^{(e)}\}$$

Por lo tanto el vector de fuerzas ensamblado se calcula de la siguiente forma:

	e=1	e=2	e=3	e=4	e=5	e=6	e=7	e=8	=	
1	-0,08	-1,08							=	-1,16
2		0	0	0					=	0
3		-1,08	-0,08	-1,08					=	-2,24
4				0					=	0
5				-2,08					=	-2,08
6	0	0	0			0	0		=	0
7	-0,08	-0,08	-0,08			-0,08	-0,08		=	-0,4
8			0	0			0	0	=	0
9			-0,08	-0,08			-0,08	-0,08	=	-0,32
10					-0,08				=	-0,08
11					0	0	0	0	=	0
12					-0,08	-0,08	-0,08	-0,08	=	-0,32
13							0		=	0
14								-0,08	=	-0,08

PASO N°6: Se tiene que ensamblar la matriz de rigidez global $[K_{\alpha\alpha}]$, es decir se tiene que sumar las componentes de una matriz que concurren en una misma fila y columna según el grado de libertad desconocido:

$$[K_{\alpha\alpha}] = \sum_{e=1}^{e=8} [K^{(e)}]$$

La matriz de rigidez ensamblada es:

	1	2	3	4	5	6	7
1	14000000	-4000000	-8000000	0	0	8000000	0
2	-4000000	52000000	8000000	-24000000	-4000000	-4000000	-8000000
3	-8000000	8000000	28000000	-4000000	-8000000	-8000000	-12000000
4	0	-24000000	-4000000	26000000	8000000	0	0
5	0	-4000000	-8000000	8000000	14000000	0	0
6	8000000	-4000000	-8000000	0	0	104000000	8000000
7	0	-8000000	-12000000	0	0	8000000	56000000
8	0	0	8000000	-2000000	-4000000	-48000000	0
9	0	8000000	0	-4000000	-6000000	0	-16000000
10	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	-4000000	0
12	0	0	0	0	0	0	-12000000
13	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0

8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0
0	8000000	0	0	0	0	0
8000000	0	0	0	0	0	0
-2000000	-4000000	0	0	0	0	0
-4000000	-6000000	0	0	0	0	0
-48000000	0	0	-4000000	0	0	0
0	-16000000	0	0	-12000000	0	0
52000000	0	0	0	-8000000	-2000000	4000000
0	28000000	0	-8000000	0	4000000	-6000000
0	0	14000000	-4000000	-8000000	0	0
0	-8000000	-4000000	52000000	0	-24000000	4000000
-8000000	0	-8000000	0	28000000	4000000	-8000000
-2000000	4000000	0	-24000000	4000000	26000000	-8000000
4000000	-6000000	0	4000000	-8000000	-8000000	14000000

PASO N°7: Se tiene que calcular los desplazamientos nodales $\{a_\alpha\}$, es decir cómo se tiene la matriz de rigidez ensamblada y el vector de fuerzas ensambladas es posible encontrar los desplazamientos nodales según los grados de libertad desconocidos por la ecuación:

$$[K_{\alpha\alpha}]\{a_\alpha\} = \{f_\alpha\} \quad \rightarrow \quad \{a_\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1}\{f_\alpha\}$$

La matriz ensamblada de rigidez inversa es:

1,11645E-07	2,45533E-09	5,44819E-08	2,05545E-09	3,78325E-08	-1,46697E-08	2,5906E-08
2,45533E-09	4,07553E-08	-1,3795E-08	4,12088E-08	-2,51037E-08	2,28562E-09	-2,459E-09
5,44819E-08	-1,37952E-08	9,58607E-08	-1,4887E-08	7,9132E-08	-6,38032E-09	4,2348E-08
2,05545E-09	4,12088E-08	-1,4887E-08	8,83986E-08	-5,21366E-08	2,12031E-09	-2,206E-09
3,78325E-08	-2,51037E-08	7,9132E-08	-5,21366E-08	1,73745E-07	3,73263E-10	4,5413E-08
-1,46697E-08	2,28562E-09	-6,3803E-09	2,12031E-09	3,73263E-10	2,04345E-08	-4,217E-09
2,59062E-08	-2,45855E-09	4,23477E-08	-2,20604E-09	4,54127E-08	-4,21741E-09	5,0402E-08
-1,84469E-08	4,08171E-09	-1,3405E-08	3,82524E-09	2,1428E-09	2,09176E-08	-4,156E-09
2,9035E-08	-1,5128E-08	5,51115E-08	-1,39606E-08	7,90199E-08	-3,26369E-09	5,0968E-08
1,03432E-08	-2,58099E-09	2,20447E-08	-2,34745E-09	3,0331E-08	2,65355E-09	2,6116E-08
3,63406E-09	-2,72572E-09	1,071E-08	-2,51078E-09	1,73213E-08	2,98757E-09	1,0604E-08
1,62836E-08	-3,15387E-09	3,32232E-08	-2,85264E-09	4,44186E-08	3,14993E-09	4,04E-08
3,58844E-09	-2,49718E-09	1,04479E-08	-2,29905E-09	1,6601E-08	2,91953E-09	1,0519E-08
2,80313E-08	-1,01E-08	4,93442E-08	-9,3025E-09	6,31729E-08	-4,76051E-09	4,9098E-08

-1,84469E-08	2,9035E-08	1,03432E-08	3,63406E-09	1,62836E-08	3,58844E-09	2,80313E-08
4,08171E-09	-1,5128E-08	-2,58099E-09	-2,72572E-09	-3,1539E-09	-2,49718E-09	-1,01E-08
-1,34054E-08	5,51115E-08	2,20447E-08	1,071E-08	3,32232E-08	1,04479E-08	4,93442E-08
3,82524E-09	-1,3961E-08	-2,34745E-09	-2,51078E-09	-2,8526E-09	-2,29905E-09	-9,3025E-09
2,1428E-09	7,90199E-08	3,0331E-08	1,73213E-08	4,44186E-08	1,6601E-08	6,31729E-08
2,09176E-08	-3,2637E-09	2,65355E-09	2,98757E-09	3,14993E-09	2,91953E-09	-4,76051E-09
-4,15634E-09	5,09679E-08	2,61156E-08	1,06037E-08	4,04004E-08	1,05187E-08	4,90979E-08
4,31288E-08	-3,4996E-09	6,75206E-09	3,83373E-09	9,89923E-09	3,6671E-09	-7,16552E-09
-3,49961E-09	1,04702E-07	3,54689E-08	2,205E-08	5,10455E-08	2,09598E-08	8,07181E-08
6,75206E-09	3,54689E-08	1,0898E-07	1,93768E-08	5,60259E-08	2,00933E-08	5,12322E-08
3,83373E-09	2,205E-08	1,93768E-08	4,14532E-08	1,31828E-08	4,17183E-08	2,7883E-08
9,89923E-09	5,10455E-08	5,60259E-08	1,31828E-08	9,14539E-08	1,43042E-08	7,57149E-08
3,6671E-09	2,09598E-08	2,00933E-08	4,17183E-08	1,43042E-08	8,87148E-08	5,48835E-08
-7,16552E-09	8,07181E-08	5,12322E-08	2,7883E-08	7,57149E-08	5,48835E-08	1,7473E-07

El vector de fuerzas ensamblada es:

-1,16
0
-2,24
0
-2,08
0
-0,4
0
-0,32
-0,08
0
-0,32
0
-0,08

Multiplicando matricialmente la matriz de rigidez inversa y el vector de fuerzas, es posible obtener el vector de desplazamientos nodales que es igual a:

1	-3,58174E-07
2	8,81168E-08
3	-4,93439E-07
4	1,46601E-07
5	-6,47676E-07
6	3,24243E-08
7	-2,74784E-07
8	4,66173E-08
9	-4,01013E-07
10	-1,77008E-07
11	-8,35312E-08
12	-2,57999E-07
13	-8,35861E-08
14	-3,62222E-07

PASO N°8: Con los desplazamientos nodales conocidos y con la matriz de operadores diferenciales cuyas componentes están en función a las coordenadas del elemento finito, es posible calcular las deformaciones en cada elemento, por la siguiente ecuación:

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{a^{(e)}\}$$

Elemento 1: La matriz de operadores diferenciales para una condición plana de esfuerzos y deformaciones es de tamaño constante de 3x6, el vector de desplazamientos para el elemento 1 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 1 son: 17, 16, 6, 7, 18 y 1, su tamaño es un vector de 6x1, por lo tanto el tamaño del vector de deformaciones es de 3x1.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 1 es:

$$[B^{(e)}] = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

-10	0	10	0	0	0
0	-5	0	0	0	5
-5	-10	0	10	5	0

El vector de desplazamientos para elemento 1 según sus grados de libertad es:

17	0
16	0
6	3,24243E-08
7	-2,74784E-07
18	0
1	-3,58174E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 1 es:

3,24243E-07
-1,79087E-06
-2,74784E-06

Elemento 2: El vector de desplazamientos para el elemento 2 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 2 son: 6, 7, 2, 3, 18 y 1.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 2 es:

0	0	10	0	-10	0
0	-5	0	5	0	0
-5	0	5	10	0	-10

El vector de desplazamientos para elemento 2 según sus grados de libertad es:

6	3,24243E-08
7	-2,74784E-07
2	8,81168E-08
3	-4,93439E-07
18	0
1	-3,58174E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 2 es:

8,81168E-07
-1,09327E-06
-1,07418E-06

Elemento 3: El vector de desplazamientos para el elemento 3 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 3 son: 6, 7, 8, 9, 2 y 3.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 3 es:

-10	0	10	0	0	0
0	-5	0	0	0	5
-5	-10	0	10	5	0

El vector de desplazamientos para elemento 3 según sus grados de libertad es:

6	3,24243E-08
7	-2,74784E-07
8	4,66173E-08
9	-4,01013E-07
2	8,81168E-08
3	-4,93439E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 3 es:

1,4193E-07
-1,09327E-06
-9,83826E-07

Elemento 4: El vector de desplazamientos para el elemento 4 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 4 son: 8, 9, 4, 5, 2 y 3.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 4 es:

0	0	10	0	-10	0
0	-5	0	5	0	0
-5	0	5	10	0	-10

El vector de desplazamientos para elemento 4 según sus grados de libertad es:

8	4,66173E-08
9	-4,01013E-07
4	1,46601E-07
5	-6,47676E-07
2	8,81168E-08
3	-4,93439E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 4 es:

$$\begin{pmatrix} 5,84847E-07 \\ -1,23331E-06 \\ -1,04245E-06 \end{pmatrix}$$

Elemento 5: El vector de desplazamientos para el elemento 5 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 5 son: 15, 10, 11, 12, 17 y 16.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 5 es:

-10	0	10	0	0	0
0	-5	0	0	0	5
-5	-10	0	10	5	0

El vector de desplazamientos para elemento 5 según sus grados de libertad es:

15	0
10	-1,77008E-07
11	-8,35312E-08
12	-2,57999E-07
17	0
16	0

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 5 es:

$$\begin{pmatrix} -8,35312E-07 \\ 8,85041E-07 \\ -8,09906E-07 \end{pmatrix}$$

Elemento 6: El vector de desplazamientos para el elemento 6 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 6 son: 11, 12, 6, 7, 17 y 16.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 6 es:

0	0	10	0	-10	0
0	-5	0	5	0	0
-5	0	5	10	0	-10

El vector de desplazamientos para elemento 6 según sus grados de libertad es:

11	-8,35312E-08
12	-2,57999E-07
6	3,24243E-08
7	-2,74784E-07
17	0
16	0

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 6 es:

3,24243E-07
-8,39273E-08
-2,16807E-06

Elemento 7: El vector de desplazamientos para el elemento 7 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 7 son: 11, 12, 8, 9, 6 y 7.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 7 es:

0	0	10	0	-10	0
0	-5	0	0	0	5
-5	0	0	10	5	-10

El vector de desplazamientos para elemento 7 según sus grados de libertad es:

11	-8,35312E-08
12	-2,57999E-07
8	4,66173E-08
9	-4,01013E-07
6	3,24243E-08
7	-2,74784E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 7 es:

1,4193E-07
-8,39273E-08
-6,82511E-07

Elemento 8: El vector de desplazamientos para el elemento 8 debe estar según los grados de libertad que tenga el elemento, es decir los grados de libertad para el elemento 8 son: 11, 12, 8, 9, 6 y 7.

La matriz de operadores diferenciales del elemento 8 es:

-10	0	10	0	0	0
0	0	0	-5	0	5
0	-10	-5	10	5	0

El vector de desplazamientos para elemento 8 según sus grados de libertad es:

11	-8,35312E-08
12	-2,57999E-07
13	-8,35861E-08
14	-3,62222E-07
8	4,66173E-08
9	-4,01013E-07

Por lo tanto el vector de deformaciones en el elemento 8 es:

$$\begin{Bmatrix} -5,49319E-10 \\ -1,93957E-07 \\ -3,91211E-07 \end{Bmatrix}$$

PASO N°9: Conociendo las deformaciones en todos los elementos como también la matriz constitutiva cuyas componentes están en función al coeficiente de Poisson y al Módulo de Elasticidad el tamaño de la matriz para una condición plana de esfuerzos y deformaciones es de 3x3, es posible conocer el vector de esfuerzos de tamaño 3x1 en los elementos por la siguiente ecuación:

$$\{\sigma^{(e)}\} = [D^{(e)}]\{\varepsilon^{(e)}\}$$

La matriz constitutiva es constante en todos los elementos porque se está trabajando con un material homogéneo, por lo tanto es:

24000000	8000000	0
8000000	24000000	0
0	0	8000000

Elemento 1: El vector de esfuerzos para el elemento 1 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 1 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} -6,5451232 \\ -40,386949 \\ -21,982748 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2: El vector de esfuerzos para el elemento 2 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 2 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} 12,4018502 \\ -19,189189 \\ -8,5934745 \end{Bmatrix}$$

Elemento 3: El vector de esfuerzos para el elemento 3 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 3 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} -5,3398616 \\ -25,103093 \\ -7,87061 \end{Bmatrix}$$

Elemento 4: El vector de esfuerzos para el elemento 4 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 4 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} 4,16980794 \\ -24,920768 \\ -8,3396159 \end{Bmatrix}$$

Elemento 5: El vector de esfuerzos para el elemento 5 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 5 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} -12,967151 \\ 14,558499 \\ -6,4792495 \end{Bmatrix}$$

Elemento 6: El vector de esfuerzos para el elemento 6 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 6 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} 7,11042386 \\ 0,57969215 \\ -17,344528 \end{Bmatrix}$$

Elemento 7: El vector de esfuerzos para el elemento 7 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 7 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} 2,73489728 \\ -0,8788167 \\ -5,4600869 \end{Bmatrix}$$

Elemento 8: El vector de esfuerzos para el elemento 8 es el resultado de la multiplicación matricial del vector de deformaciones del elemento 8 entre la matriz constitutiva cuyo valor es constante para todos los elementos.

Por lo tanto el vector de esfuerzos es:

-1,5648436
-4,6593745
-3,1296872

PASO N°10: Calcular los valores nodales tanto para esfuerzos como para deformaciones, el procedimiento de cálculo consiste en hacer una ponderación de aquellos elementos que tengan un nudo en común con sus respectivas áreas, es decir:

$$\psi_{nodo} = \frac{1}{A_T} * \sum_{e=1}^{e=n} A^{(e)} \psi^{(e)}$$

Deformación en dirección xx :

Nudo 1: El nudo 1 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 1 y 2, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx1} = \frac{(3,24 \times 10^{-7}) + (8,81 \times 10^{-7})}{2} = 6,025 \times 10^{-7}$$

Nudo 2: El nudo 2 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 2, 3 y 4, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx2} = \frac{8,81 \times 10^{-7} + 1,42 \times 10^{-7} + 5,85 \times 10^{-7}}{3} = 5,36 \times 10^{-7}$$

Nudo 3: El nudo 3 tiene como elementos comunes solo al elemento finito 4, por lo tanto la deformación de este elemento aporta al nudo, es decir:

$$\varepsilon_{xx3} = 5,85 \times 10^{-7}$$

Nudo 4: El nudo 4 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 1, 5 y 6, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx4} = \frac{3,24x10^{-7} + (-8,35x10^{-7}) + 3,24x10^{-7}}{3} = -6,23x10^{-8}$$

Nudo 5: El nudo 5 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 1, 2, 3, 6 y 7, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx5} = \frac{3,24x10^{-7} + 8,81x10^{-7} + 1,42x10^{-7} + 3,24x10^{-7} + 1,42x10^{-7}}{5}$$

$$\varepsilon_{xx5} = 3,63x10^{-7}$$

Nudo 6: El nudo 6 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 3, 4, 7 y 8, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx6} = \frac{1,42x10^{-7} + 5,85x10^{-7} + 1,42x10^{-7} + (-5,49x10^{-10})}{4} = 2,17x10^{-7}$$

Nudo 7: El nudo 7 tiene como elementos comunes solo al elemento finito 5, por lo tanto la deformación de este elemento aporta al nudo, es decir:

$$\varepsilon_{xx7} = -8,35x10^{-7}$$

Nudo 8: El nudo 8 tiene como elementos comunes a los elementos finitos 5, 6, 7 y 8, por lo tanto las deformaciones de estos elementos aportan al nudo, como todos los elementos tienen la misma área entonces las áreas se simplifican, es decir:

$$\varepsilon_{xx8} = \frac{-8,35x10^{-7} + 3,24x10^{-7} + 1,42x10^{-7} + (-5,49x10^{-10})}{4} = -9,24x10^{-8}$$

Nudo 9: El nudo 9 tiene como elementos comunes sólo al elemento finito 8, por lo tanto la deformación de este elemento aporta al nudo, es decir:

$$\varepsilon_{xx9} = -5,49x10^{-10}$$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

1	60,27	
2	53,60	
3	58,48	
4	-6,23	
5	36,27	$\times 10^{-8}$
6	21,70	
7	-83,53	
8	-9,24	
9	-0,05	

Deformación en dirección yy:

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con las deformaciones en dirección yy:

$$\text{Nudo 1:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 1} = -1,44 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 2:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 2} = -1,14 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 3:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 3} = -1,23 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 4} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 4} = -3,30 \times 10^{-7}$$

$$\text{Nudo 5:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 5} = 8,29 \times 10^{-7}$$

$$\text{Nudo 6:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 6} = -6,51 \times 10^{-7}$$

$$\text{Nudo 7:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 7} = 8,85 \times 10^{-7}$$

$$\text{Nudo 8:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 8} = 1,30 \times 10^{-7}$$

$$\text{Nudo 9:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{yy 9} = -1,94 \times 10^{-7}$$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

1	-144,21	
2	-114,00	
3	-123,33	
4	-32,99	
5	-82,91	$\times 10^{-8}$
6	-65,11	
7	88,50	
8	13,08	
9	-19,40	

Deformación en dirección xy :

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con las deformaciones en dirección xy :

$$\text{Nudo 1:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 1} = -1,91 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 2:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 2} = -1,03 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 3:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 3} = -1,04 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 4} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 4} = -1,91 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 5:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 5} = -1,53 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 6:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 6} = -7,75 \times 10^{-7}$$

$$\text{Nudo 7:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 7} = -8,10 \times 10^{-7}$$

$$\text{Nudo 8:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 8} = -1,01 \times 10^{-6}$$

$$\text{Nudo 9:} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{xy 9} = -3,91 \times 10^{-7}$$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

1	-191,10	
2	-103,35	
3	-104,25	
4	-190,86	
5	-153,13	} x 10 ⁻⁸
6	-77,50	
7	-80,99	
8	-101,29	
9	-39,12	

Esfuerzos en dirección xx :

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con los esfuerzos en dirección xx :

Nudo 1: → $\sigma_{xx 1} = 2,928$

Nudo 2: → $\sigma_{xx 2} = 3,744$

Nudo 3: → $\sigma_{xx 3} = 4,170$

Nudo 4 → $\sigma_{xx 4} = -4,134$

Nudo 5: → $\sigma_{xx 5} = 2,072$

Nudo 6: → $\sigma_{xx 6} = 0,00$

Nudo 7: → $\sigma_{xx 7} = -12,967$

Nudo 8: → $\sigma_{xx 8} = -1,172$

Nudo 9: → $\sigma_{xx 9} = -1,565$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

1	2,928
2	3,744
3	4,170
4	-4,134
5	2,072
6	0E+00
7	-12,967
8	-1,172
9	-1,565

Esfuerzos en dirección yy:

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con los esfuerzos en dirección yy:

Nudo 1: → $\sigma_{yy 1} = -29,788$

Nudo 2: → $\sigma_{yy 2} = -23,071$

Nudo 3: → $\sigma_{yy 3} = -24,921$

Nudo 4 → $\sigma_{yy 4} = -8,416$

Nudo 5: → $\sigma_{yy 5} = -16,996$

Nudo 6: → $\sigma_{yy 6} = -13,981$

Nudo 7: → $\sigma_{yy 7} = 14,558$

Nudo 8: → $\sigma_{yy 8} = 2,400$

Nudo 9: → $\sigma_{yy 9} = -4,659$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

1	-29,788
2	-23,071
3	-24,921
4	-8,416
5	-16,996
6	-13,891
7	14,558
8	2,4
9	-4,659

Esfuerzos en dirección xy :

Se hace el mismo procedimiento que en el anterior, es decir que los mismos nudos serán comunes en los mismos elementos anteriores, puesto que se analiza la misma estructura, sólo que ahora con los esfuerzos en dirección xy :

Nudo 1: $\rightarrow \sigma_{xy 1} = -15,288$

Nudo 2: $\rightarrow \sigma_{xy 2} = -8,268$

Nudo 3: $\rightarrow \sigma_{xy 3} = -8,340$

Nudo 4: $\rightarrow \sigma_{xy 4} = -15,269$

Nudo 5: $\rightarrow \sigma_{xy 5} = -12,250$

Nudo 6: $\rightarrow \sigma_{xy 6} = -6,200$

Nudo 7: $\rightarrow \sigma_{xy 7} = -6,479$

Nudo 8: $\rightarrow \sigma_{xy 8} = -8,103$

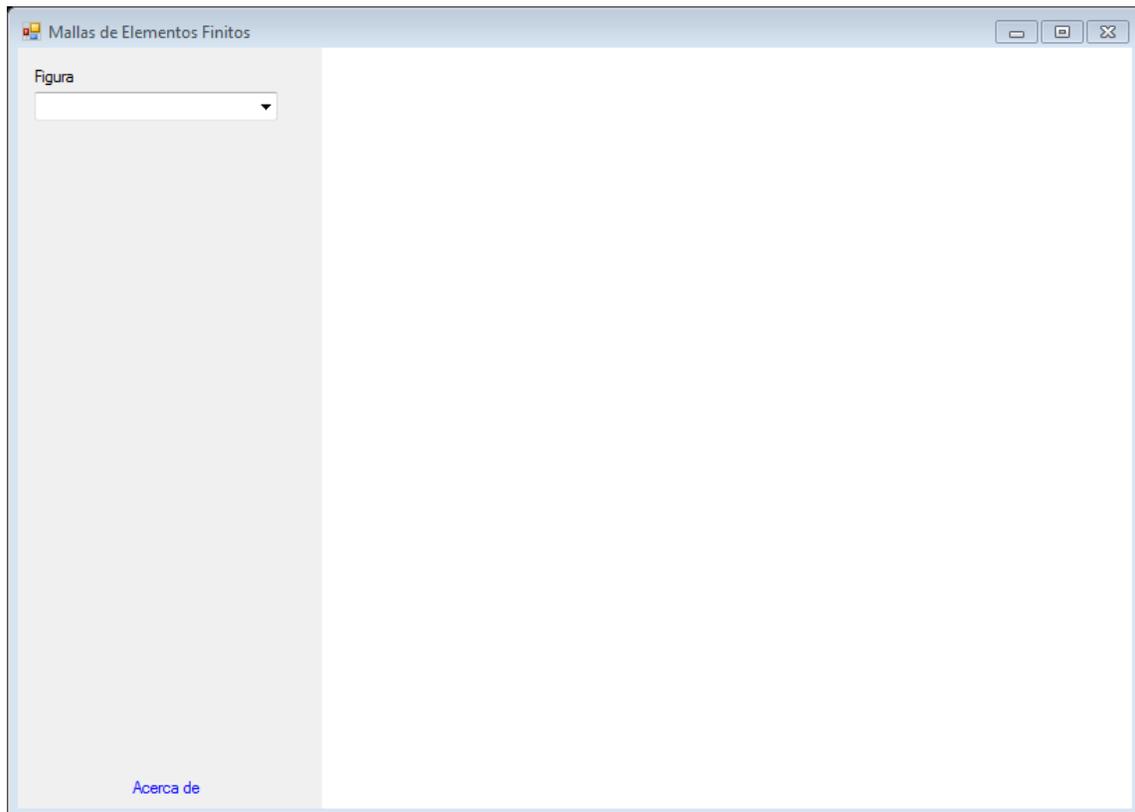
Nudo 9: $\rightarrow \sigma_{xy 9} = -3,130$

Por lo tanto el vector de deformaciones nodales es:

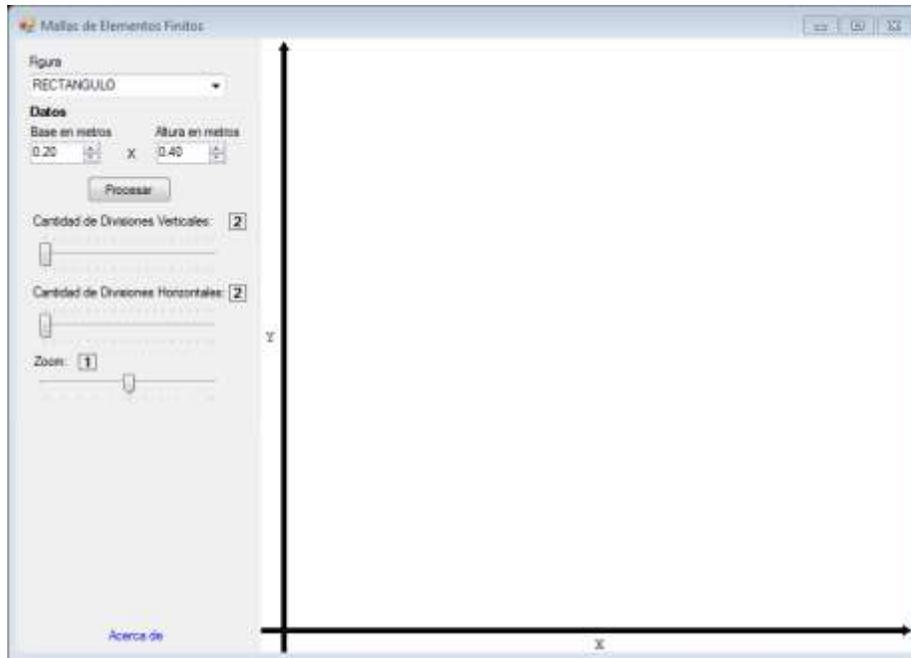
1	-15,288
2	-8,268
3	-8,340
4	-15,269
5	-12,250
6	-6,2
7	-6,479
8	-8,103
9	-3,130

Con el programa:

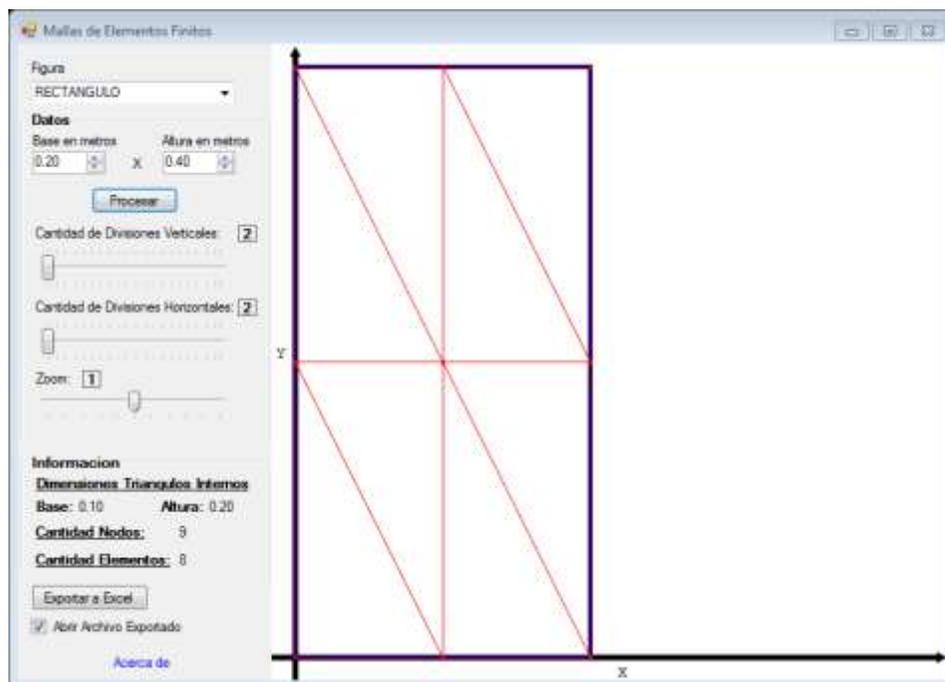
Se elige la figura que e desea analizar en este caso un rectángulo.



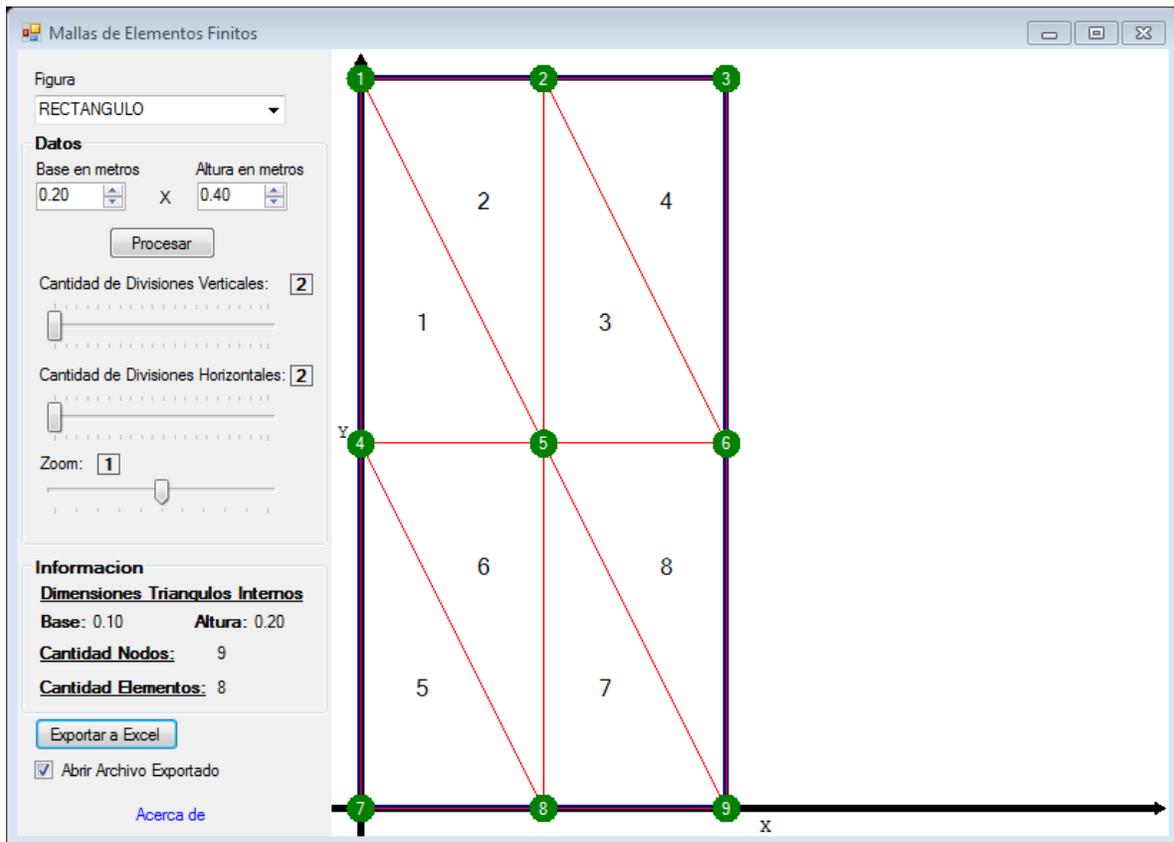
Se introduce las dimensiones del cuadrado que en este caso es de 0.20 x 0.40 m y se presiona en “PROCESAR”



Una vez obtenida esta imagen se va desplazando el cursores donde dice “ CANTIDAD DE DIVISIONES VERTICALES” y “CANTIDAD DE DIVISIONES HORIZONTALES” para obtener el número deseado de triángulos. También se puede observar que en la parte inferior de la pantalla aparece las dimensiones de los triángulos, la cantidad de nodos y elementos existentes.



Se presiona “EXPORTAR A EXCEL”



Y de manera automática los datos serán llevados al Excel

Hoja TB_GEN: En esta hoja se escriben los parámetros generales como el título, número de grados de libertad por nudo, número de nudos por elemento para nuestro caso es un elemento finito triangular y número de dimensiones del problema en nuestro caso el análisis es en 2 dimensiones. Como propiedades mecánicas el módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young, la relación de Poisson, espesor, y el tipo de problema que para nuestro caso es en una condición plana de deformaciones.

La forma de cómo ingresar los datos para nuestro problema es:

TITULO

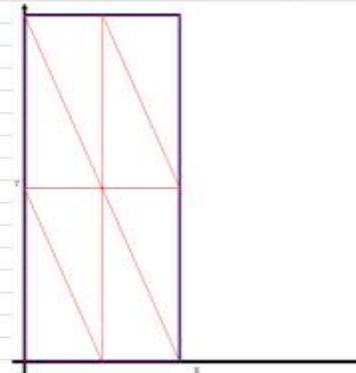
PROBLEMAS DE ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL

PÁRAMETROS GENERALES

NÚMERO DE NUDOS	9
NÚMERO DE ELEMENTOS	8
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD POR NUDO	2
NÚMERO DE NUDOS POR ELEMENTO	3
NÚMERO DE DIMENSIONES DEL PROBLEMA	2

PROPIEDADES MECÁNICAS

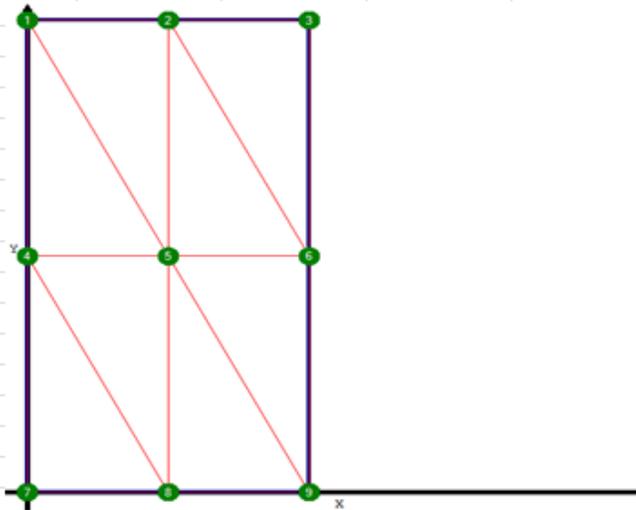
MODULO DE YOUNG	2.00E+07	kg/m ²
RELACION DE POISSON	0.25	
ESPESOR (PARA PROBLEMA PLANO DE ESFUERZOS)	1.00	m
TIPO DE PROBLEMA (0=PLANO DE ESFUERZOS , 1=PLANO DE DEFORMACIONES)	1	



Hoja TB_XYZ: En esta hoja se muestran las coordenadas de la malla de elementos finitos que son valores colocados automáticamente por el programa, ordenados de forma secuencial, definiendo un sistema de referencia coordenado, para nuestro problema se fija el sistema de referencia en el apoyo inferior, por lo tanto la tabla de coordenadas de los nudos es la siguiente:

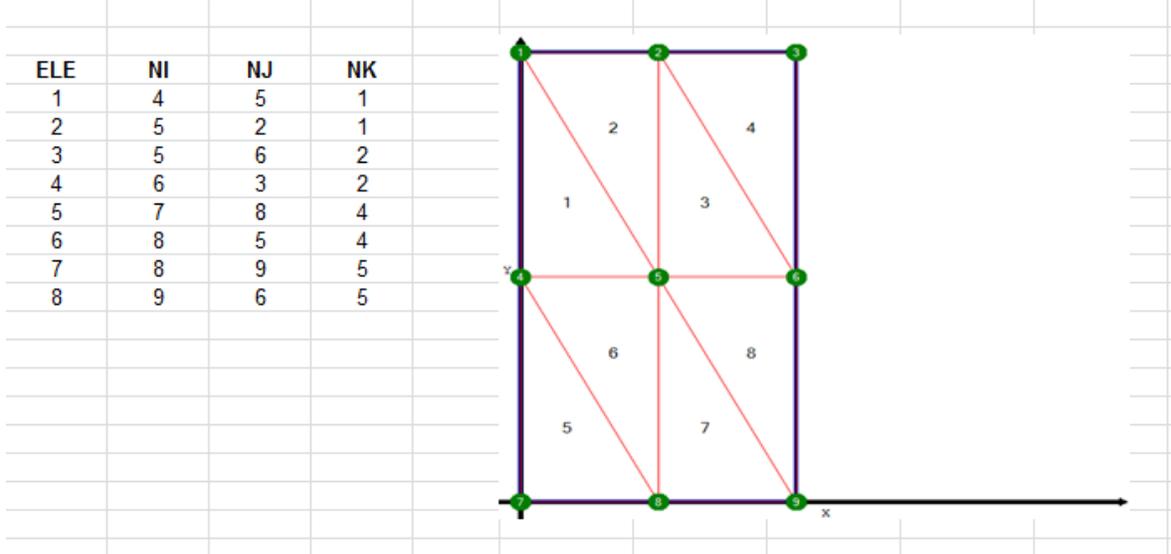
TABLA DE COORDENADAS DE LOS NUDOS

NUDO	m	m
	X	Y
1	0.000	0.400
2	0.100	0.400
3	0.200	0.400
4	0.000	0.200
5	0.100	0.200
6	0.200	0.200
7	0.000	0.000
8	0.100	0.000
9	0.200	0.000



Hoja TB_ELE: En esta hoja se muestran los nudos asociados a cada elemento de la malla que son valores colocados automáticamente por el programa, ordenados de forma secuencial en sentido antihorario, por lo tanto la tabla de coordenadas asociados a cada nudo es la siguiente:

TABLA DE NUDOS ASOCIADOS A CADA ELEMENTO



Hoja TB_RES: En esta hoja se escriben las condiciones de borde naturales, asignando el tipo de desplazamiento y el valor del desplazamiento conocido, es decir indicando los grados de libertad conocidos por cada nudo. Para nuestro ejercicio tenemos 3 apoyos en los nudos 1, 4 y 7 los cuales restringen movimientos en las direcciones de sus reacciones y sus desplazamientos en esas direcciones son nulas, por lo tanto la tabla de desplazamientos nodales conocidos es la siguiente:

TABLA DE DESPLAZAMIENTOS NODALES CONOCIDOS					
Tipo de desplazamiento: conocido = 001, desconocido = 000					
NUDO	Tipo de desplazamiento		NUDO	Valor de desplazamiento conocido	
	UX	UY		UX	UY
1	001	000	1	0,000	
4	001	001	4	0,000	0,000
7	001	000	7	0,000	

Hoja TB_FUN: En esta hoja se escriben las componentes de las fuerzas puntuales aplicadas a cada uno de los nudos, para nuestro ejercicio tenemos una fuerza puntual en dirección vertical hacia abajo en el nudo 3, en esa dirección la fuerza se considera negativa, por lo tanto tabla de fuerzas en los nudos es la siguiente:

TABLA DE FUERZAS EN LOS NUDOS			
	kN	kN	
NUDO	FX	FY	
3	0,000	-1,000	

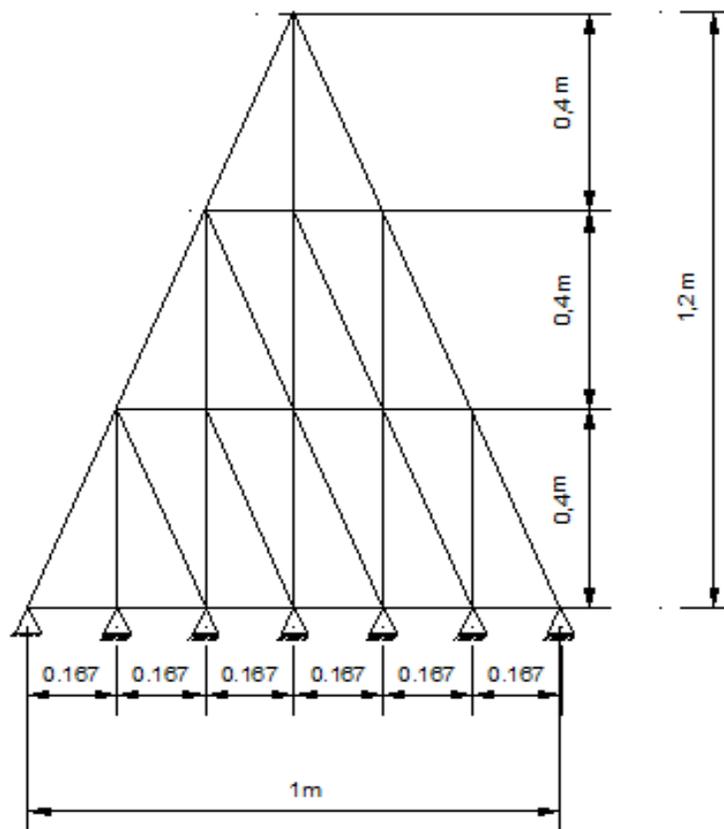
Hoja TB_FUE: En esta hoja se escriben las componentes de las fuerzas distribuidas por unidad de superficie y por unidad de volumen aplicadas sobre los elementos, en el caso de las fuerzas por unidad de superficie es necesario indicar en qué cara del elemento finito está actuando dicha fuerza de acuerdo a los nudos asociados a cada elemento, para nuestro ejercicio existe una fuerza de superficie actuando en las caras de los elementos 2 y 4, para el elemento 2 está actuando en la cara o lado que tiene como frontera a los nudos 2 y 1, de acuerdo a la tabla de nudos asociados a cada elemento dichos nudos están en la cara o lado número 2, lo mismo para el elemento 4 la fuerza de superficie actúa desde el nudo 3 al 2 que corresponde al lado 2. Para las fuerzas de volumen es decir el peso propio actúan en todo el volumen de cada elemento finito por lo tanto hay que escribir el valor del peso específico del hormigón en los 8 elementos, en consecuencia la tabla de fuerzas en los elementos es la siguiente:

TABLA DE FUERZAS EN LOS ELEMENTOS					
	kN/m3	kN/m3	kN/m2	kN/m2	
ELEM	WX	WY	PX	PY	CARA
1	0,000	-24,000	0,000	0,000	1
2	0,000	-24,000	0,000	-20,000	2
3	0,000	-24,000	0,000	0,000	1
4	0,000	-24,000	0,000	-20,000	2
5	0,000	-24,000	0,000	0,000	1
6	0,000	-24,000	0,000	0,000	1
7	0,000	-24,000	0,000	0,000	1
8	0,000	-24,000	0,000	0,000	1

Al concluir el ingreso de datos en todas las hojas de ingreso de datos, se da el paso final de ingresar a la hoja de salida o resultados TB_OUT, en la cual simplemente se tiene que seleccionar la ventana creada con el nombre EJECUTAR, el cual procede al cálculo correspondiente.

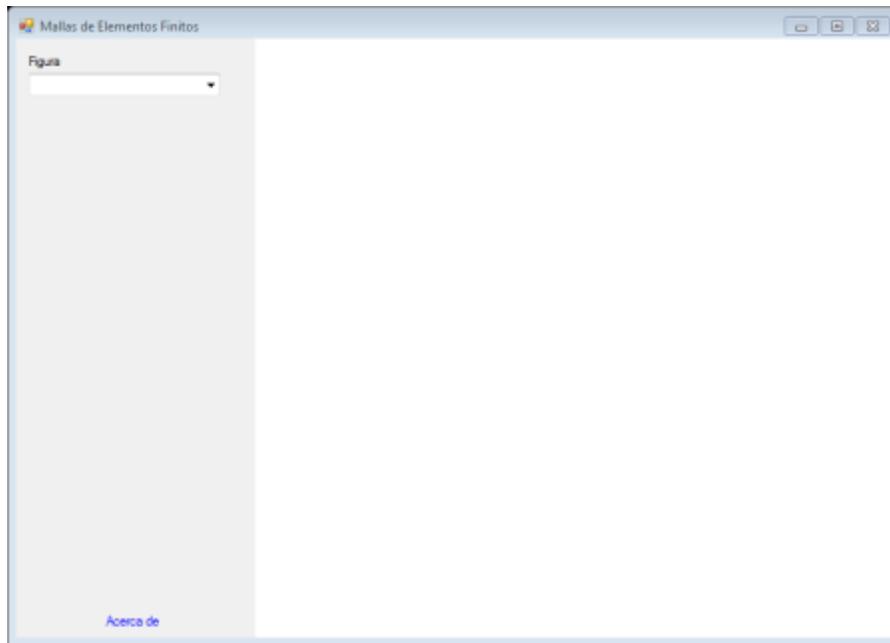
Para nuestro ejercicio se obtuvieron que las respuestas son exactamente las mismas de las que se hicieron de forma manual, por lo tanto se puede dar validez que el programa goza de toda confiabilidad y eficacia.

4.3 Ejercicio N° 3: Una pirámide como se muestra en la figura cuyas dimensiones para fines de este ejercicio es de 1m de ancho y 1.2 m de altura, esta pirámide de piedra caliza tiene un módulo de elasticidad longitudinal o módulo de Young $E = 274680000 \text{ KN/m}^2$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$

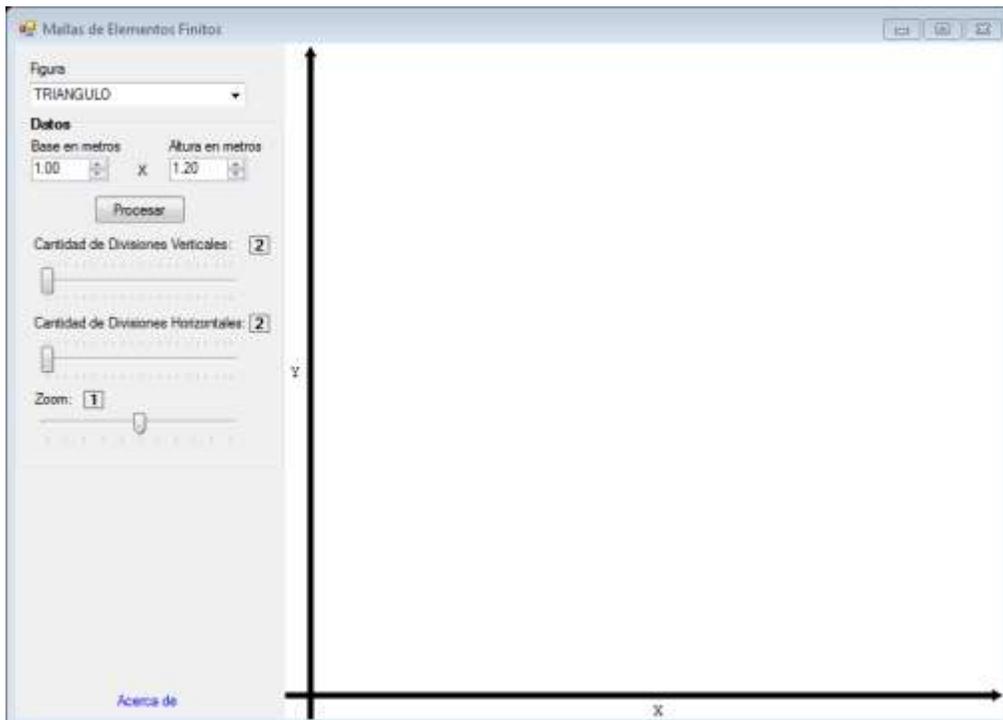


Con el programa:

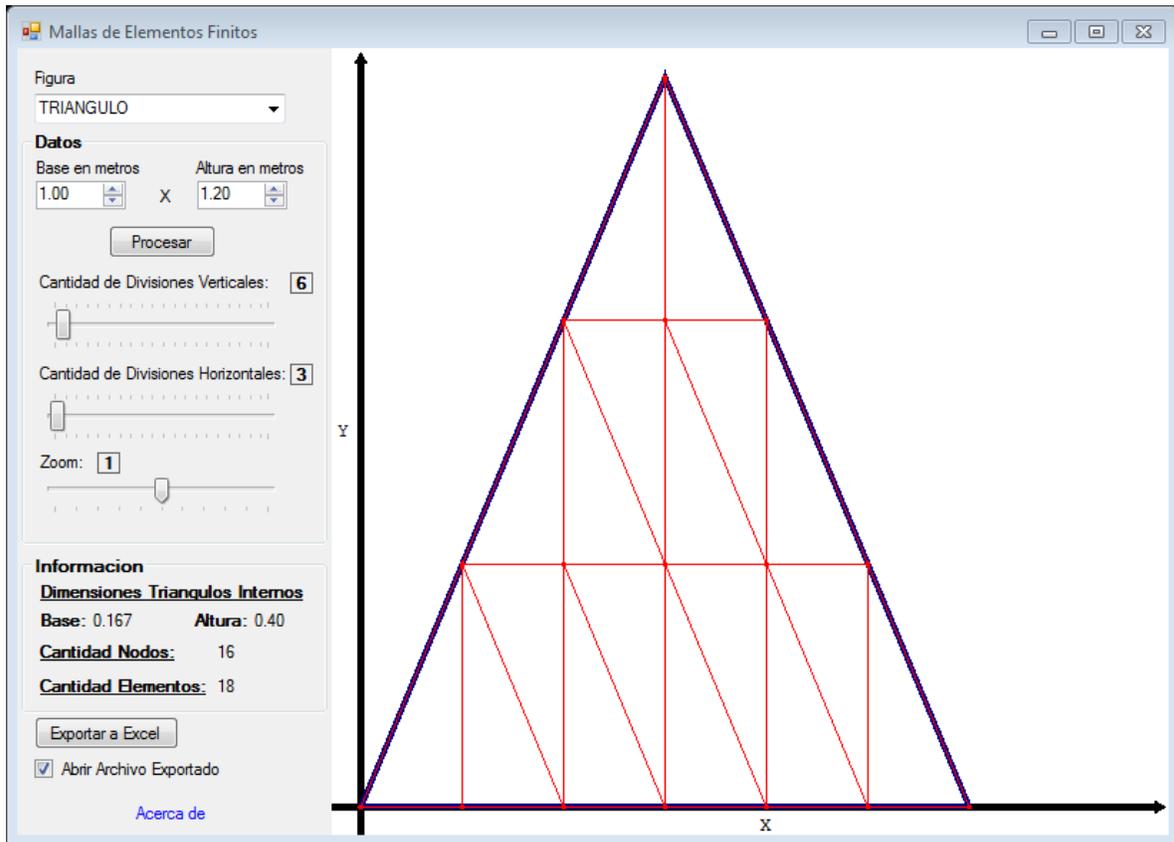
Se elige la figura que se desea analizar en este caso un triángulo



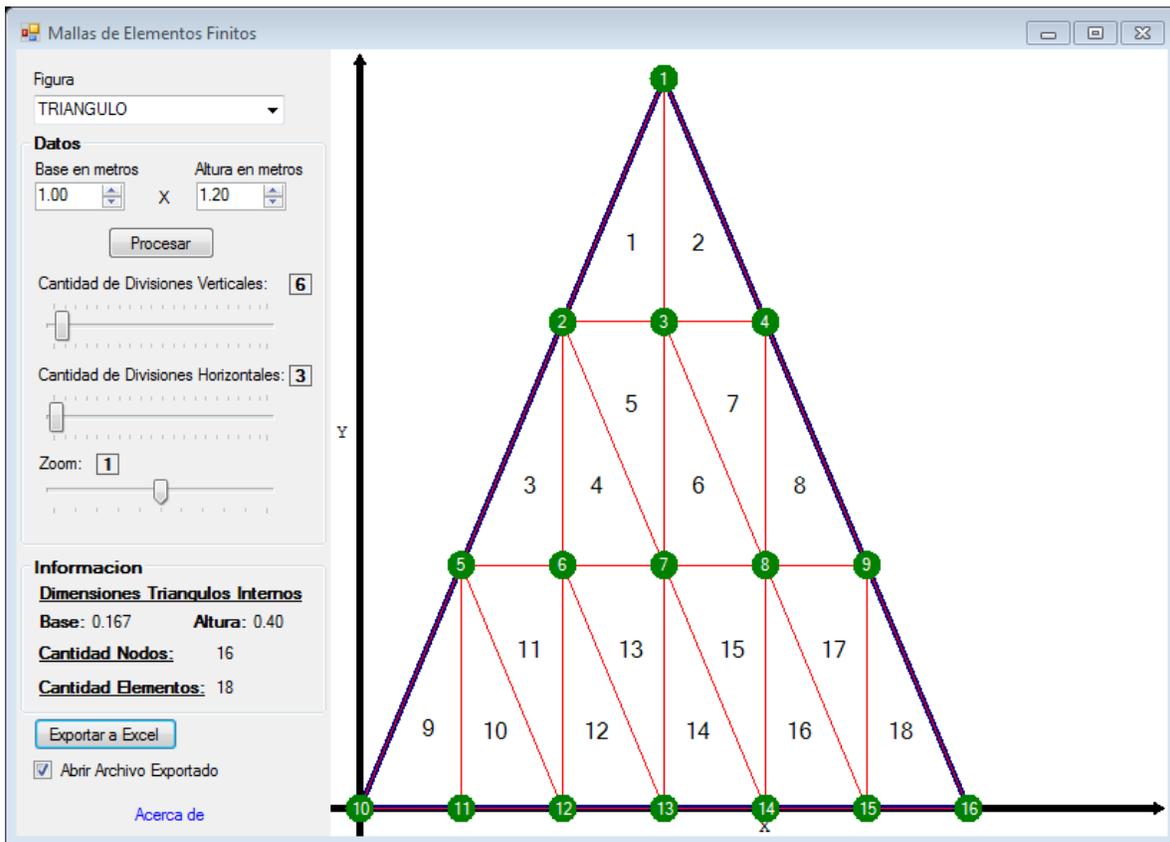
Se introduce las dimensiones del triángulo que en este caso es de 1m x 1.20 m y se presiona en “PROCESAR”



Una vez obtenida esta imagen se va desplazando el cursores donde dice “ CANTIDAD DE DIVISIONES VERTICALES” y “CANTIDAD DE DIVISIONES HORIZONTALES” para obtener el número deseado de triángulos. También se puede observar que en la parte inferior de la pantalla aparece las dimensiones de los triángulos, la cantidad de nodos y elementos existentes.



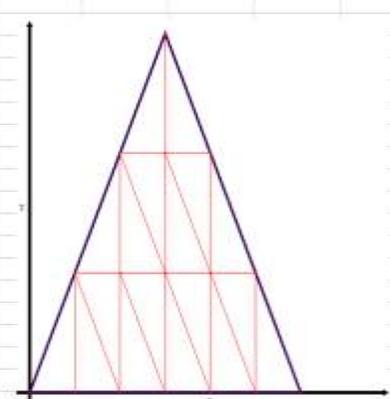
Se presiona “EXPORTAR A EXCEL”



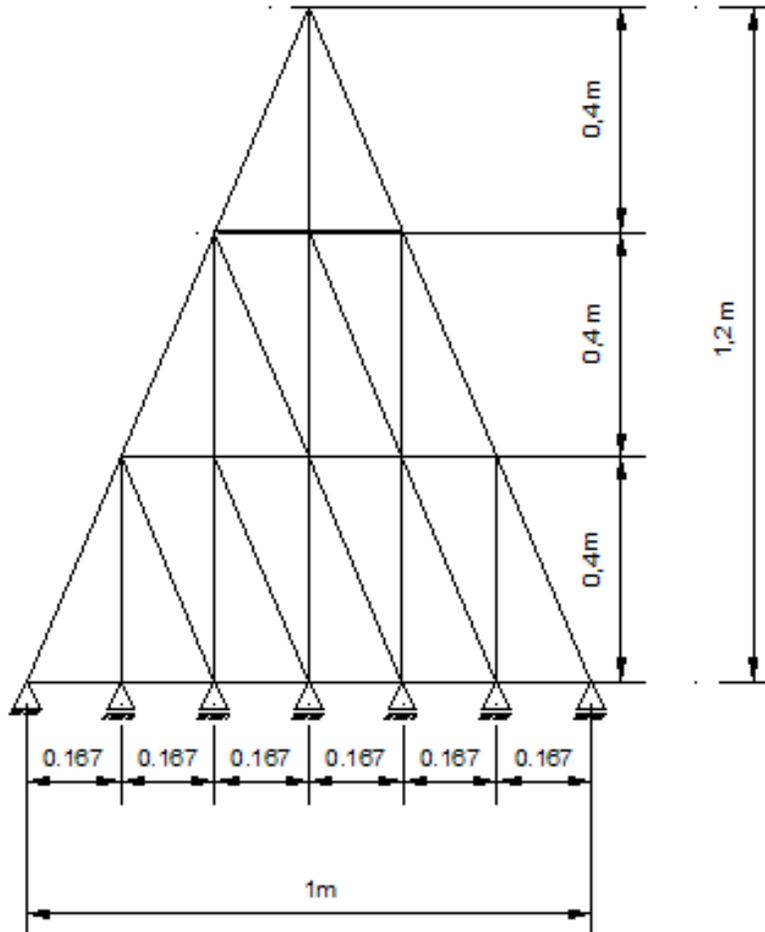
Y de manera automática los datos serán llevados al Excel

1^{ra} Malla: La primera malla de elementos finitos consta de los siguientes parámetros generales y propiedades mecánicas:

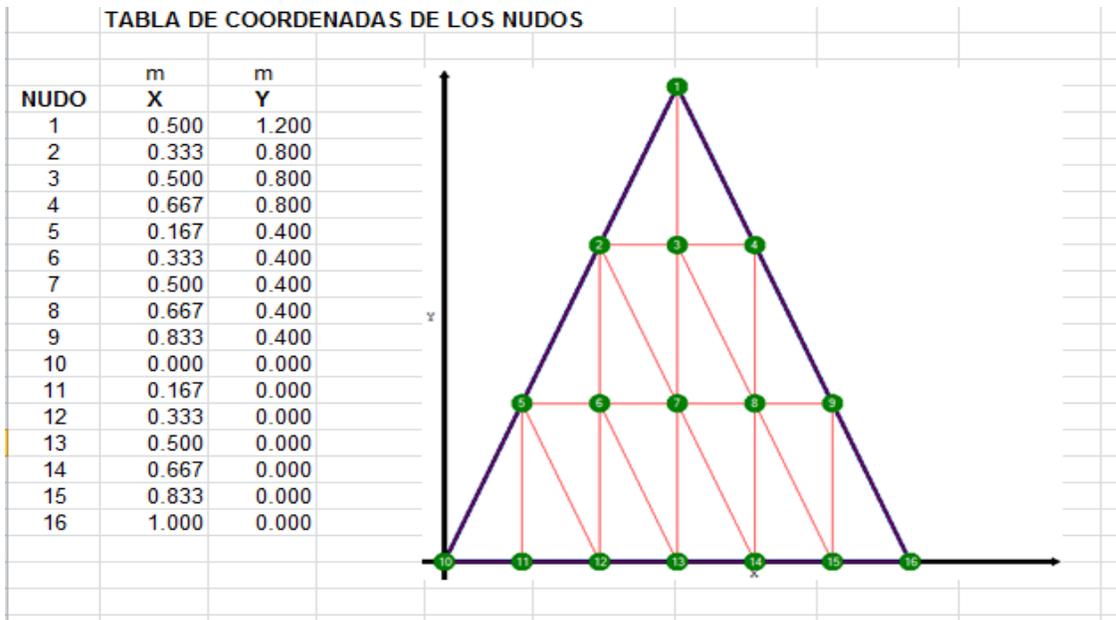
TITULO		PROBLEMAS DE ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL	
PÁRAMETROS GENERALES			
NÚMERO DE NUDOS	16		
NÚMERO DE ELEMENTOS	18		
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD POR NUDO	2		
NÚMERO DE NUDOS POR ELEMENTO	3		
NÚMERO DE DIMENSIONES DEL PROBLEMA	2		
PROPIEDADES MECÁNICAS			
MODULO DE YOUNG	2.75E+07	kN/m ²	
RELACION DE POISSON	0.2		
ESPESOR (PARA PROBLEMA PLANO DE ESFUERZOS)	1.00	m	
TIPO DE PROBLEMA (0=PLANO DE ESFUERZOS, 1=PLANO DE DEFORMACIONES)	1		



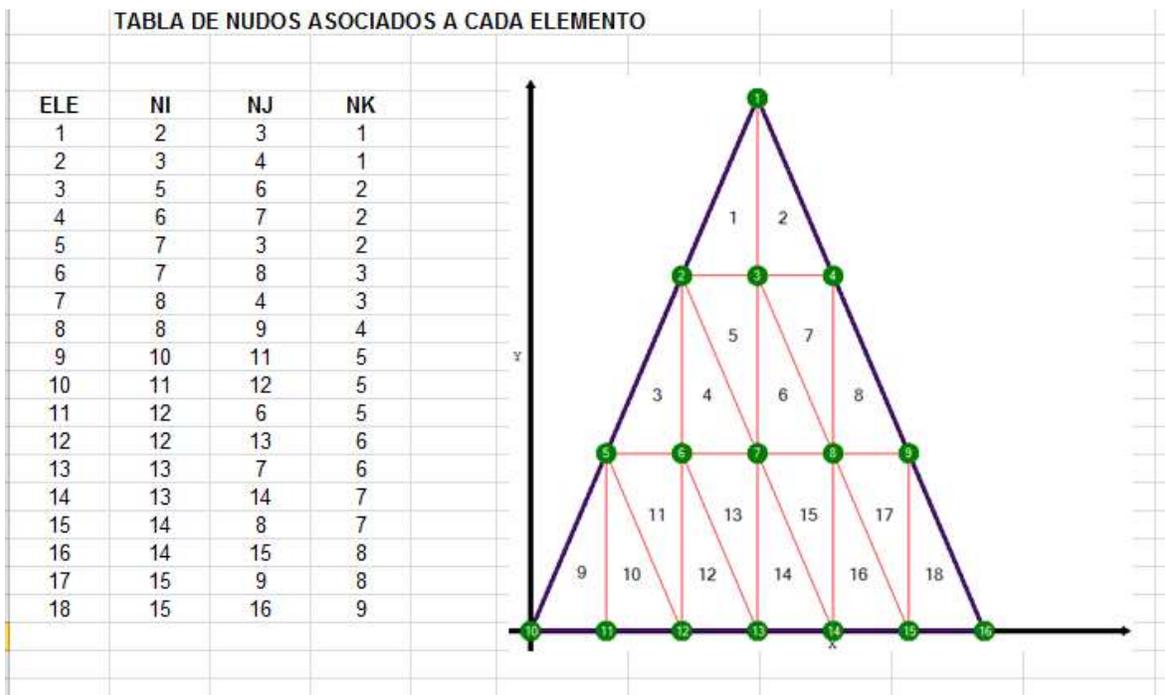
La figura de la malla de elementos finitos es la siguiente, donde se dividió cada 0.167 m por 0.4 m dos elementos finitos como se muestra en la figura:



Hoja TB_XYZ: En esta hoja se muestran las coordenadas de la malla de elementos finitos que son valores colocados automáticamente por el programa, ordenados de forma secuencial, definiendo un sistema de referencia coordenado, para nuestro problema se fija el sistema de referencia en el apoyo inferior, por lo tanto la tabla de coordenadas de los nudos es la siguiente:



Hoja TB_ELE: En esta hoja se muestran los nudos asociados a cada elemento de la malla que son valores colocados automáticamente por el programa, ordenados de forma secuencial en sentido antihorario, por lo tanto la tabla de coordenadas asociados a cada nudo es la siguiente:



Por lo tanto desarrollando el programa, se obtienen que los resultados del vector de deformaciones nodales:

UXX()	
(16x1)	
	C1
F1	3.1960E-09
F2	8.1049E-09
F3	4.9451E-09
F4	4.5920E-09
F5	1.2078E-08
F6	1.3659E-08
F7	1.2239E-08
F8	9.9200E-09
F9	8.8332E-09
F10	1.2301E-08
F11	1.2076E-08
F12	1.3659E-08
F13	1.6552E-08
F14	1.6025E-08
F15	1.1928E-08
F16	1.0928E-08

UYX()	
(16x1)	
	C1
F1	-1.4107E-08
F2	-3.0112E-08
F3	-2.4925E-08
F4	-2.4664E-08
F5	-4.8312E-08
F6	-5.0245E-08
F7	-4.7172E-08
F8	-4.1777E-08
F9	-3.9123E-08
F10	-4.9205E-08
F11	-4.9205E-08
F12	-5.5257E-08
F13	-6.0461E-08
F14	-5.8459E-08
F15	-4.8113E-08
F16	-4.3713E-08

UXY() (16x1)	
	C1
F1	-6.6174E-24
F2	-1.1799E-08
F3	1.9633E-09
F4	1.3881E-08
F5	-1.0163E-08
F6	-1.1778E-08
F7	-1.4151E-09
F8	1.1355E-08
F9	1.3608E-08
F10	1.4414E-09
F11	1.4414E-09
F12	-5.7871E-09
F13	-2.0463E-09
F14	1.7948E-09
F15	5.1356E-09
F16	-6.7518E-09

Y se obtienen que los resultados del vector de esfuerzos en los nudos:

NXX() (16x1)	
	C1
F1	-9.1024E-02
F2	1.5878E-01
F3	-3.5394E-01
F4	-4.3319E-01
F5	-1.3933E-14
F6	3.0224E-01
F7	1.2280E-01
F8	-1.4424E-01
F9	-2.6075E-01
F10	-2.6369E-14
F11	-6.1920E-02
F12	-4.2792E-02
F13	3.9535E-01
F14	3.8819E-01
F15	-2.7519E-02
F16	-2.0450E-15

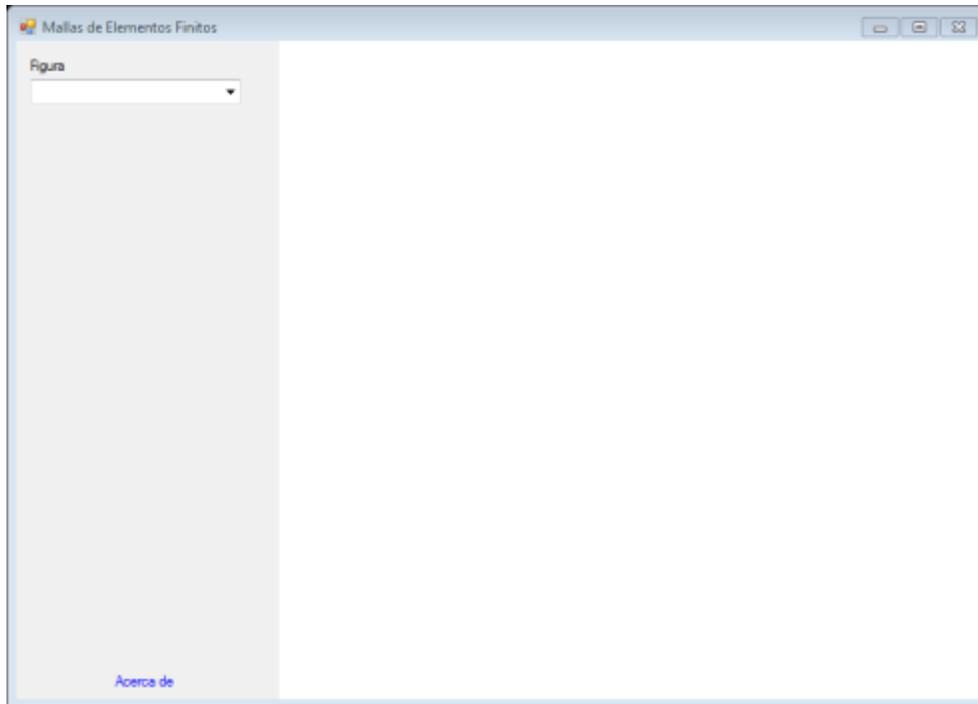
NYY() (16x1)	
	C1
F1	-3.6624E+00
F2	-7.7291E+00
F3	-6.5191E+00
F4	-6.4717E+00
F5	-1.2464E+01
F6	-1.2888E+01
F7	-1.2140E+01
F8	-1.0814E+01
F9	-1.0159E+01
F10	-1.2695E+01
F11	-1.2710E+01
F12	-1.4267E+01
F13	-1.5500E+01
F14	-1.4985E+01
F15	-1.2420E+01
F16	-1.1278E+01

NXY() (16x1)	
	C1
F1	-6.6613E-16
F2	-1.2177E+00
F3	2.0261E-01
F4	1.4325E+00
F5	-1.0488E+00
F6	-1.2155E+00
F7	-1.4604E-01
F8	1.1718E+00
F9	1.4043E+00
F10	1.4876E-01
F11	1.4876E-01
F12	-5.9723E-01
F13	-2.1118E-01
F14	1.8523E-01
F15	5.2999E-01
F16	-6.9679E-01

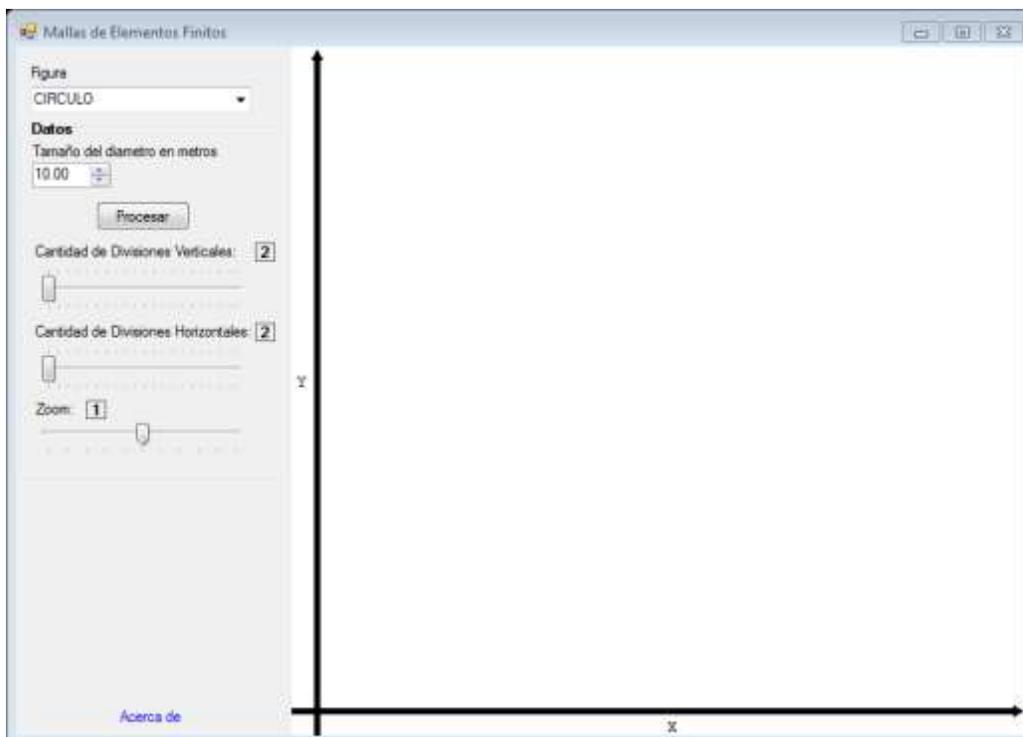
4.4 Ejercicio N° 4: Una viga redonda como se muestra en la figura cuyas dimensiones para fines de este ejercicio es de 1 m de diámetro, es de madera (pino) con peso específico $\gamma = 7.1 \frac{KN}{m^3}$, módulo de elasticidad longitudinal $E = 107910000 \frac{KN}{m^2}$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0,225$

Con el programa:

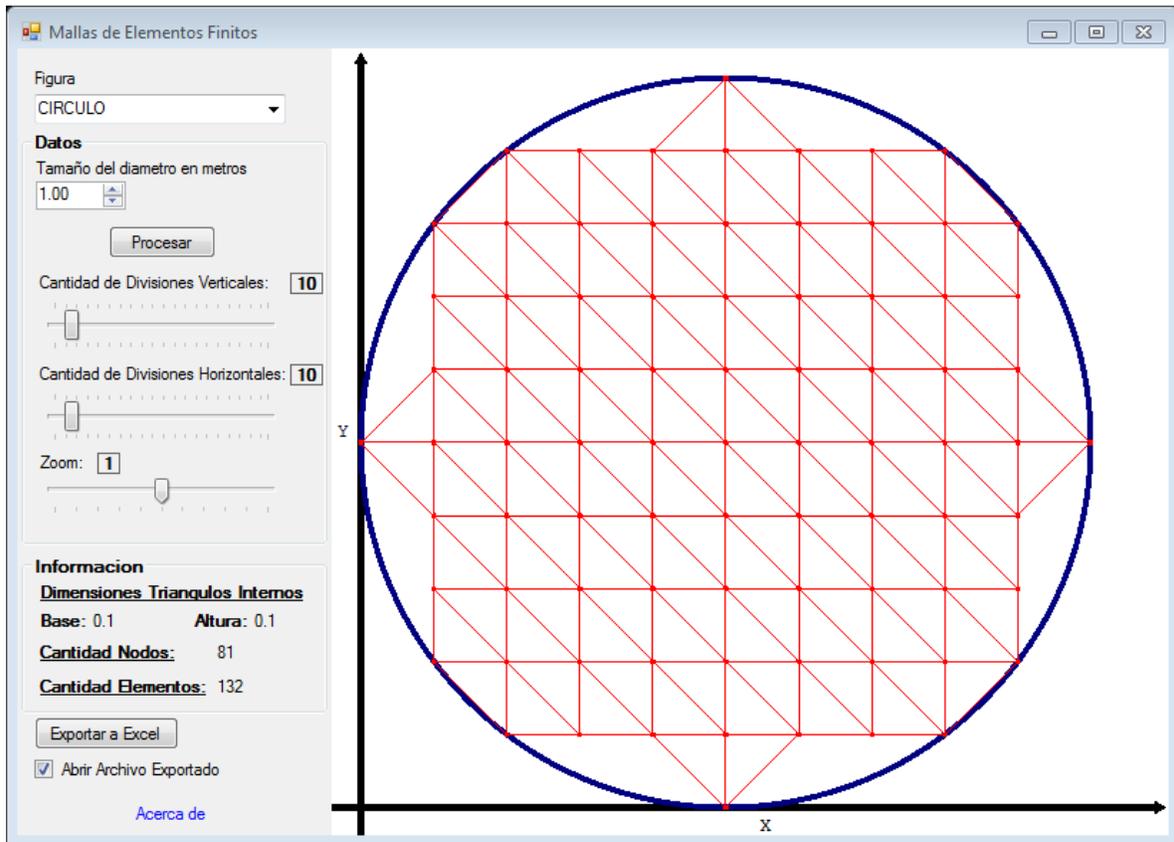
Se elige la figura que se desea analizar en este caso un círculo



Se introduce las dimensiones del triángulo que en este caso es de 1m de radio y se presiona en “PROCESAR”



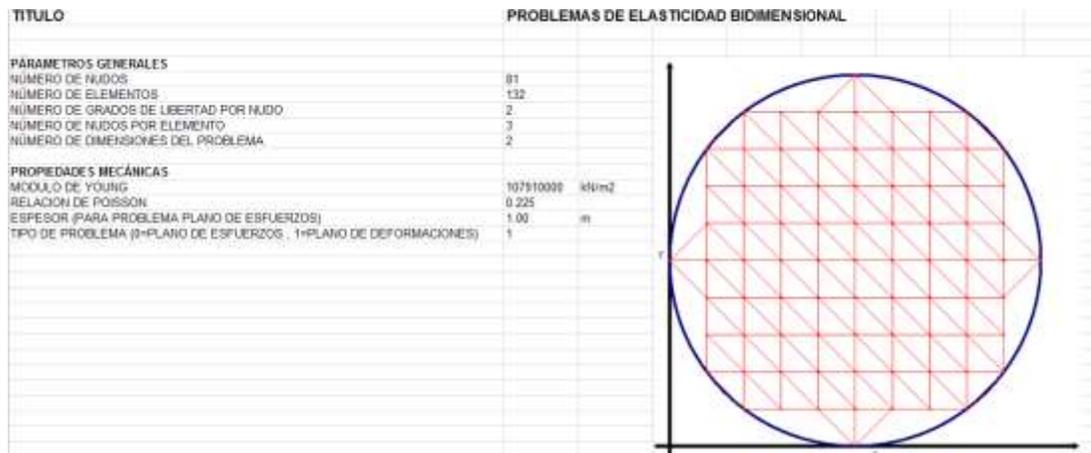
Una vez obtenida esta imagen se va desplazando el cursores donde dice “CANTIDAD DE DIVISIONES VERTICALES” y “CANTIDAD DE DIVISIONES HORIZONTALES” para obtener el número deseado de triángulos. En el caso del círculo será necesario ir probando con varias divisiones hasta poder conseguir que la mayor parte del círculo esté cubierto ya que no se puede cubrir en su totalidad el mismo por tratarse de elementos finitos triangulares. También se puede observar que en la parte inferior de la pantalla aparece las dimensiones de los triángulos, la cantidad de nodos y elementos existentes.



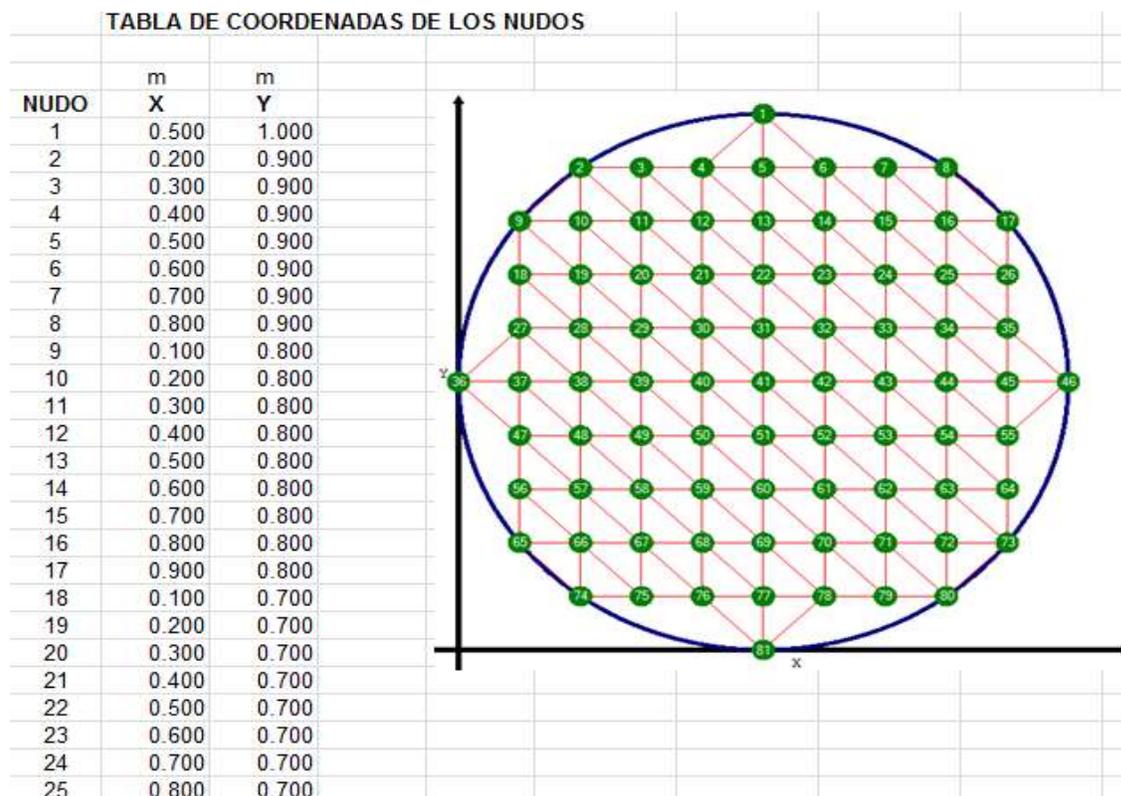
Se presiona “EXPORTAR A EXCEL”

Y de manera automática los datos serán llevados al Excel

1^{ra} Malla: La primera malla de elementos finitos consta de los siguientes parámetros generales y propiedades mecánicas:



Hoja TB_XYZ: En esta hoja se muestran las coordenadas de la malla de elementos finitos que son valores colocados automáticamente por el programa, ordenados de forma secuencial, definiendo un sistema de referencia coordenado, para nuestro problema se fija el sistema de referencia en el apoyo inferior, por lo tanto la tabla de coordenadas de los nudos es la siguiente:



26	0.900	0.700
27	0.100	0.600
28	0.200	0.600
29	0.300	0.600
30	0.400	0.600
31	0.500	0.600
32	0.600	0.600
33	0.700	0.600
34	0.800	0.600
35	0.900	0.600
36	0.000	0.500
37	0.100	0.500
38	0.200	0.500
39	0.300	0.500
40	0.400	0.500
41	0.500	0.500
42	0.600	0.500
43	0.700	0.500
44	0.800	0.500
45	0.900	0.500
46	1.000	0.500
47	0.100	0.400
48	0.200	0.400
49	0.300	0.400
50	0.400	0.400
51	0.500	0.400
52	0.600	0.400
53	0.700	0.400
54	0.800	0.400

54	0.800	0.400
55	0.900	0.400
56	0.100	0.300
57	0.200	0.300
58	0.300	0.300
59	0.400	0.300
60	0.500	0.300
61	0.600	0.300
62	0.700	0.300
63	0.800	0.300
64	0.900	0.300
65	0.100	0.200
66	0.200	0.200
67	0.300	0.200
68	0.400	0.200
69	0.500	0.200
70	0.600	0.200
71	0.700	0.200
72	0.800	0.200
73	0.900	0.200
74	0.200	0.100
75	0.300	0.100
76	0.400	0.100
77	0.500	0.100
78	0.600	0.100
79	0.700	0.100
80	0.800	0.100
81	0.500	0.000

Hoja TB_ELE: En esta hoja se muestran los nudos asociados a cada elemento de la malla que son valores colocados automáticamente por el programa, ordenados de forma secuencial en sentido antihorario, por lo tanto la tabla de coordenadas asociados a cada nudo es la siguiente:

TABLA DE NUDOS ASOCIADOS A CADA ELEMENTO			
ELE	NI	NJ	NK
1	4	5	1
2	5	6	1
3	9	10	2
4	10	11	2
5	11	3	2
6	11	12	3
7	12	4	3
8	12	13	4
9	13	5	4
10	13	14	5
11	14	6	5
12	14	15	6
13	15	7	6
14	15	16	7
15	16	8	7
16	16	17	8
17	18	19	9
18	19	10	9
19	19	20	10
20	20	11	10
21	20	21	11
22	21	12	11
23	21	22	12
24	22	13	12
25	22	23	13

26	23	14	13
27	23	24	14
28	24	15	14
29	24	25	15
30	25	16	15
31	25	26	16
32	26	17	16
33	27	28	18
34	28	19	18
35	28	29	19
36	29	20	19
37	29	30	20
38	30	21	20
39	30	31	21
40	31	22	21
41	31	32	22
42	32	23	22
43	32	33	23
44	33	24	23
45	33	34	24
46	34	25	24
47	34	35	25
48	35	26	25
49	36	37	27
50	37	38	27
51	38	28	27
52	38	39	28
53	39	29	28
54	39	40	29

54	39	40	29
55	40	30	29
56	40	41	30
57	41	31	30
58	41	42	31
59	42	32	31
60	42	43	32
61	43	33	32
62	43	44	33
63	44	34	33
64	44	45	34
65	45	35	34
66	45	46	35
67	47	37	36
68	47	48	37
69	48	38	37
70	48	49	38
71	49	39	38
72	49	50	39
73	50	40	39
74	50	51	40
75	51	41	40
76	51	52	41
77	52	42	41
78	52	53	42
79	53	43	42
80	53	54	43
81	54	44	43
82	54	55	44

83	55	45	44
84	55	46	45
85	56	57	47
86	57	48	47
87	57	58	48
88	58	49	48
89	58	59	49
90	59	50	49
91	59	60	50
92	60	51	50
93	60	61	51
94	61	52	51
95	61	62	52
96	62	53	52
97	62	63	53
98	63	54	53
99	63	64	54
100	64	55	54
101	65	66	56
102	66	57	56
103	66	67	57
104	67	58	57
105	67	68	58
106	68	59	58
107	68	69	59
108	69	60	59
109	69	70	60
110	70	61	60
111	70	71	61

112	71	62	61
113	71	72	62
114	72	63	62
115	72	73	63
116	73	64	63
117	74	66	65
118	74	75	66
119	75	67	66
120	75	76	67
121	76	68	67
122	76	77	68
123	77	69	68
124	77	78	69
125	78	70	69
126	78	79	70
127	79	71	70
128	79	80	71
129	80	72	71
130	80	73	72
131	81	77	76
132	81	78	77

Por lo tanto desarrollando el programa, se obtienen que los resultados del vector de deformaciones nodales:

<i>UXX()</i>	<i>(81x1)</i>
	C1
F1	4.8395E-09
F2	3.4457E-09
F3	5.5996E-09
F4	6.4165E-09
F5	5.6043E-09
F6	5.2304E-09
F7	3.5336E-09
F8	1.4412E-09
F9	2.9034E-09
F10	4.3451E-09
F11	6.3565E-09
F12	8.7684E-09
F13	8.8920E-09
F14	7.4106E-09
F15	5.1933E-09
F16	2.3062E-09
F17	1.2319E-09
F18	4.2576E-09
F19	5.5555E-09
F20	9.2228E-09
F21	1.2471E-08
F22	1.3275E-08
F23	1.1132E-08
F24	7.4299E-09
F25	3.8316E-09
F26	1.9800E-09
F27	3.8834E-09
F28	7.3524E-09
F29	1.2463E-08

F30	1.7452E-08
F31	1.8462E-08
F32	1.5040E-08
F33	9.8194E-09
F34	5.0849E-09
F35	2.5831E-09
F36	1.1921E-09
F37	2.2505E-09
F38	6.9763E-09
F39	1.4808E-08
F40	2.2980E-08
F41	2.4240E-08
F42	1.8490E-08
F43	1.1046E-08
F44	5.2118E-09
F45	2.3039E-09
F46	1.2293E-09
F47	1.0049E-09
F48	4.3573E-09
F49	1.4414E-08
F50	2.8421E-08
F51	3.0101E-08
F52	2.0525E-08
F53	1.0555E-08
F54	4.2967E-09
F55	2.0404E-09
F56	-1.7725E-09
F57	-1.1677E-09
F58	7.1620E-09
F59	3.1486E-08
F60	3.4766E-08
F61	1.9243E-08
F62	7.1497E-09

F63	2.3992E-09
F64	9.7009E-10
F65	-3.1105E-09
F66	-4.8350E-09
F67	-1.0985E-08
F68	1.5978E-08
F69	3.7300E-08
F70	1.1700E-08
F71	1.2944E-09
F72	-4.4143E-10
F73	4.8918E-10
F74	-2.3960E-09
F75	-1.7498E-08
F76	-1.6626E-08
F77	1.6919E-08
F78	1.6889E-08
F79	-5.9914E-09
F80	-1.0857E-09
F81	9.0876E-09

UY _Y ()	(81x1)
	C1
F1	-3.3117E-09
F2	-3.8076E-09
F3	-5.2110E-09
F4	-6.3513E-09
F5	-5.8460E-09
F6	-4.8998E-09
F7	-3.2861E-09
F8	-1.6643E-09
F9	-5.4925E-09
F10	-6.4512E-09
F11	-8.0898E-09
F12	-1.0659E-08
F13	-1.1890E-08
F14	-9.9146E-09
F15	-6.7689E-09
F16	-3.8093E-09
F17	-2.4840E-09
F18	-8.3081E-09
F19	-1.0109E-08
F20	-1.4721E-08
F21	-1.9139E-08
F22	-2.1005E-08
F23	-1.8292E-08
F24	-1.3024E-08
F25	-7.9069E-09
F26	-4.8968E-09
F27	-7.4313E-09
F28	-1.4000E-08
F29	-2.1874E-08

F30	-2.9267E-08
F31	-3.2235E-08
F32	-2.7575E-08
F33	-1.9232E-08
F34	-1.0885E-08
F35	-5.6150E-09
F36	-4.1063E-09
F37	-6.3283E-09
F38	-1.5629E-08
F39	-2.8828E-08
F40	-4.1288E-08
F41	-4.6419E-08
F42	-3.7894E-08
F43	-2.4869E-08
F44	-1.3482E-08
F45	-5.8974E-09
F46	-4.2341E-09
F47	-5.5711E-09
F48	-1.5745E-08
F49	-3.4376E-08
F50	-5.5677E-08
F51	-6.5216E-08
F52	-4.8961E-08
F53	-2.8977E-08
F54	-1.4338E-08
F55	-6.9088E-09
F56	-3.0347E-10
F57	-1.0783E-08
F58	-3.4971E-08
F59	-7.2476E-08
F60	-9.1989E-08
F61	-5.9459E-08
F62	-2.9720E-08

F63	-1.2225E-08
F64	-5.0484E-09
F65	2.0221E-09
F66	-2.0766E-09
F67	-2.1400E-08
F68	-8.4772E-08
F69	-1.3555E-07
F70	-6.6163E-08
F71	-2.4783E-08
F72	-9.8588E-09
F73	-3.2627E-09
F74	-1.2002E-09
F75	-3.1681E-09
F76	-1.2574E-07
F77	-2.4770E-07
F78	-1.7817E-07
F79	-3.0195E-08
F80	-6.2399E-09
F81	-3.7825E-07

UXY() (81x1)	
	C1
F1	-3.7327E-22
F2	2.3388E-09
F3	3.3718E-09
F4	9.8201E-10
F5	-5.5904E-10
F6	-2.3043E-09
F7	-3.9744E-09
F8	-1.6448E-09
F9	2.7566E-09
F10	5.1321E-09
F11	6.0418E-09
F12	4.0630E-09
F13	-5.1919E-10
F14	-4.8224E-09
F15	-6.7154E-09
F16	-3.8594E-09
F17	-1.2219E-09
F18	8.0576E-09
F19	9.8482E-09
F20	1.1953E-08
F21	7.9320E-09
F22	-1.1013E-09
F23	-9.1773E-09
F24	-1.2411E-08
F25	-9.0519E-09
F26	-4.7417E-09
F27	1.1449E-08
F28	1.6058E-08
F29	1.9654E-08
F30	1.3526E-08
F31	-1.9421E-09

F32	-1.5344E-08
F33	-1.9427E-08
F34	-1.4261E-08
F35	-8.0063E-09
F36	5.3733E-09
F37	1.3769E-08
F38	2.3481E-08
F39	2.9936E-08
F40	2.2102E-08
F41	-3.9929E-09
F42	-2.4803E-08
F43	-2.8808E-08
F44	-2.0788E-08
F45	-9.6845E-09
F46	-5.3733E-09
F47	1.7563E-08
F48	3.1358E-08
F49	4.4379E-08
F50	3.6898E-08
F51	-8.2957E-09
F52	-3.9397E-08
F53	-4.0168E-08
F54	-2.6189E-08
F55	-1.3234E-08
F56	1.5037E-08
F57	3.1670E-08
F58	6.1450E-08
F59	6.4527E-08
F60	-1.6377E-08
F61	-6.0948E-08
F62	-5.0433E-08
F63	-2.6829E-08

F64	-1.4805E-08
F65	-7.4397E-10
F66	1.4322E-08
F67	6.4292E-08
F68	1.1747E-07
F69	-2.5905E-08
F70	-9.0192E-08
F71	-5.3768E-08
F72	-2.2783E-08
F73	-5.6966E-09
F74	2.8603E-09
F75	4.4706E-08
F76	1.6550E-07
F77	2.2869E-08
F78	-1.7567E-07
F79	-7.2410E-08
F80	-1.4619E-08
F81	-2.8852E-21

Y se obtienen que los resultados del vector de esfuerzos en los nudos:

NXX()	(81x1)
	C1
F1	4.8137E-01
F2	2.9049E-01
F3	5.0727E-01
F4	5.6757E-01
F5	4.8497E-01
F6	4.7265E-01
F7	3.2019E-01
F8	1.1891E-01
F9	1.6245E-01
F10	3.0686E-01
F11	4.9747E-01
F12	7.0429E-01
F13	6.7526E-01
F14	5.6256E-01
F15	4.0070E-01
F16	1.4899E-01
F17	6.3397E-02
F18	2.2908E-01
F19	3.2529E-01
F20	6.1430E-01
F21	8.5835E-01
F22	8.9088E-01
F23	7.2260E-01
F24	4.5293E-01
F25	1.9066E-01
F26	6.9301E-02
F27	2.1423E-01
F28	4.0812E-01
F29	7.5876E-01
F30	1.1116E+00
F31	1.1299E+00

F32	8.7321E-01
F33	5.2579E-01
F34	2.3890E-01
F35	1.1829E-01
F36	5.8948E-14
F37	5.1296E-02
F38	3.0272E-01
F39	7.9917E-01
F40	1.3645E+00
F41	1.3360E+00
F42	9.2951E-01
F43	4.7488E-01
F44	1.6109E-01
F45	7.3451E-02
F46	1.5094E-14
F47	-7.6026E-02
F48	-2.6535E-02
F49	5.5036E-01
F50	1.5213E+00
F51	1.3862E+00
F52	7.8335E-01
F53	2.6590E-01
F54	1.6633E-02
F55	4.3000E-03
F56	-2.3095E-01
F57	-5.3351E-01
F58	-3.7124E-01
F59	1.2964E+00
F60	1.0004E+00
F61	2.4585E-01
F62	-1.8354E-01
F63	-1.4275E-01
F64	-6.1513E-02

F65	-3.1323E-01
F66	-6.7499E-01
F67	-2.1347E+00
F68	-1.0717E+00
F69	-2.5477E-01
F70	-9.3203E-01
F71	-7.3242E-01
F72	-4.1007E-01
F73	-5.6857E-02
F74	-3.4066E-01
F75	-2.2861E+00
F76	-6.5949E+00
F77	-6.8263E+00
F78	-4.3242E+00
F79	-1.8318E+00
F80	-3.5963E-01
F81	-1.2503E+01

<i>NYX()</i> (81x1)	
	C1
F1	-2.3667E-01
F2	-3.5673E-01
F3	-4.4800E-01
F4	-5.5952E-01
F5	-5.2653E-01
F6	-4.1954E-01
F7	-2.7961E-01
F8	-1.5471E-01
F9	-5.9230E-01
F10	-6.5105E-01
F11	-7.7571E-01
F12	-1.0035E+00
F13	-1.1557E+00
F14	-9.6137E-01
F15	-6.4992E-01
F16	-3.9035E-01
F17	-2.6486E-01
F18	-8.9802E-01
F19	-1.0638E+00
F20	-1.4917E+00
F21	-1.9183E+00
F22	-2.1276E+00
F23	-1.8663E+00
F24	-1.3443E+00
F25	-8.4446E-01
F26	-5.4102E-01
F27	-8.0269E-01
F28	-1.4853E+00
F29	-2.2601E+00
F30	-2.9895E+00
F31	-3.3346E+00

F32	-2.8747E+00
F33	-2.0259E+00
F34	-1.1680E+00
F35	-6.1095E-01
F36	-4.9289E-01
F37	-7.2637E-01
F38	-1.7020E+00
F39	-3.0377E+00
F40	-4.2730E+00
F41	-4.8885E+00
F42	-4.0257E+00
F43	-2.6772E+00
F44	-1.4884E+00
F45	-6.6072E-01
F46	-4.9995E-01
F47	-6.8172E-01
F48	-1.8188E+00
F49	-3.7445E+00
F50	-5.8491E+00
F51	-7.0144E+00
F52	-5.3162E+00
F53	-3.1990E+00
F54	-1.6356E+00
F55	-8.0718E-01
F56	-1.1848E-01
F57	-1.4024E+00
F58	-4.1007E+00
F59	-7.8116E+00
F60	-1.0175E+01
F61	-6.6488E+00
F62	-3.4109E+00
F63	-1.4453E+00
F64	-6.2992E-01

F65	1.2907E-01
F66	-4.2273E-01
F67	-3.0728E+00
F68	-9.9385E+00
F69	-1.5496E+01
F70	-7.7270E+00
F71	-3.0141E+00
F72	-1.2582E+00
F73	-4.2061E-01
F74	-2.2982E-01
F75	-1.0248E+00
F76	-1.6245E+01
F77	-3.0196E+01
F78	-2.1433E+01
F79	-3.9617E+00
F80	-8.3456E-01
F81	-4.6623E+01

NXY() (81x1)	
	C1
F1	-1.6445E-14
F2	1.0301E-01
F3	1.4851E-01
F4	4.3252E-02
F5	-2.4623E-02
F6	-1.0149E-01
F7	-1.7505E-01
F8	-7.2444E-02
F9	1.2141E-01
F10	2.2604E-01
F11	2.6611E-01
F12	1.7895E-01
F13	-2.2868E-02
F14	-2.1240E-01
F15	-2.9578E-01
F16	-1.6999E-01
F17	-5.3817E-02
F18	3.5490E-01
F19	4.3376E-01
F20	5.2648E-01
F21	3.4937E-01
F22	-4.8505E-02
F23	-4.0421E-01
F24	-5.4662E-01
F25	-3.9869E-01
F26	-2.0885E-01
F27	5.0425E-01
F28	7.0728E-01
F29	8.6564E-01
F30	5.9576E-01
F31	-8.5538E-02

F32	-6.7581E-01
F33	-8.5566E-01
F34	-6.2813E-01
F35	-3.5264E-01
F36	2.3667E-01
F37	6.0643E-01
F38	1.0342E+00
F39	1.3185E+00
F40	9.7350E-01
F41	-1.7587E-01
F42	-1.0925E+00
F43	-1.2688E+00
F44	-9.1560E-01
F45	-4.2655E-01
F46	-2.3667E-01
F47	7.7354E-01
F48	1.3812E+00
F49	1.9547E+00
F50	1.6252E+00
F51	-3.6538E-01
F52	-1.7353E+00
F53	-1.7692E+00
F54	-1.1535E+00
F55	-5.8288E-01
F56	6.6232E-01
F57	1.3949E+00
F58	2.7066E+00
F59	2.8421E+00
F60	-7.2131E-01
F61	-2.6845E+00
F62	-2.2213E+00
F63	-1.1817E+00
F64	-6.5209E-01

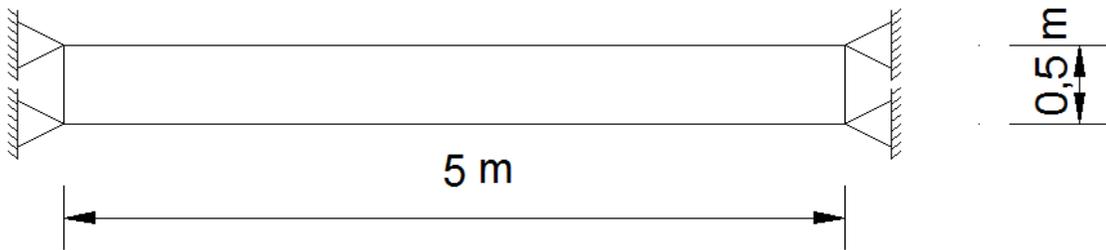
F65	-3.2768E-02
F66	6.3083E-01
F67	2.8318E+00
F68	5.1739E+00
F69	-1.1410E+00
F70	-3.9725E+00
F71	-2.3682E+00
F72	-1.0035E+00
F73	-2.5090E-01
F74	1.2598E-01
F75	1.9691E+00
F76	7.2895E+00
F77	1.0073E+00
F78	-7.7375E+00
F79	-3.1893E+00
F80	-6.4389E-01
F81	-1.2701E-13

4.5 Ejercicio 5 Se calculara la deflexión de la siguiente viga que tiene una longitud de 5 m una altura de 0.5 m y un espesor de 0.15 m, que tiene una carga uniformemente disdribuida de 10 KN/m² y el peso propio se desprecia. Se realizará en este ejercicio la comparación de resultados entre el método de elementos finitos y un método convencional.

Se utilizará un modulo de elasticidad de E=20000000 KN/m²

$$I = \frac{0.15 \times 0.5^3}{12} = 0.0015625 \text{ m}^4$$

a) Se analizará como viga Biempotrada



Según formulas deducidas por resistencia de materiales la máxima deflexión es producida al medio de la viga y se obtiene el valor de la siguiente expresión:

$$\Delta = \frac{w \times L^4}{384 \times E \times I}$$
$$\Delta = \frac{1.5 \times 5^4}{384 \times 20000000 \times 0.0015625} = 0.000078125 \text{ m}$$

$$M = 1.5625 \text{ KN} * \text{m}$$

Malla #1

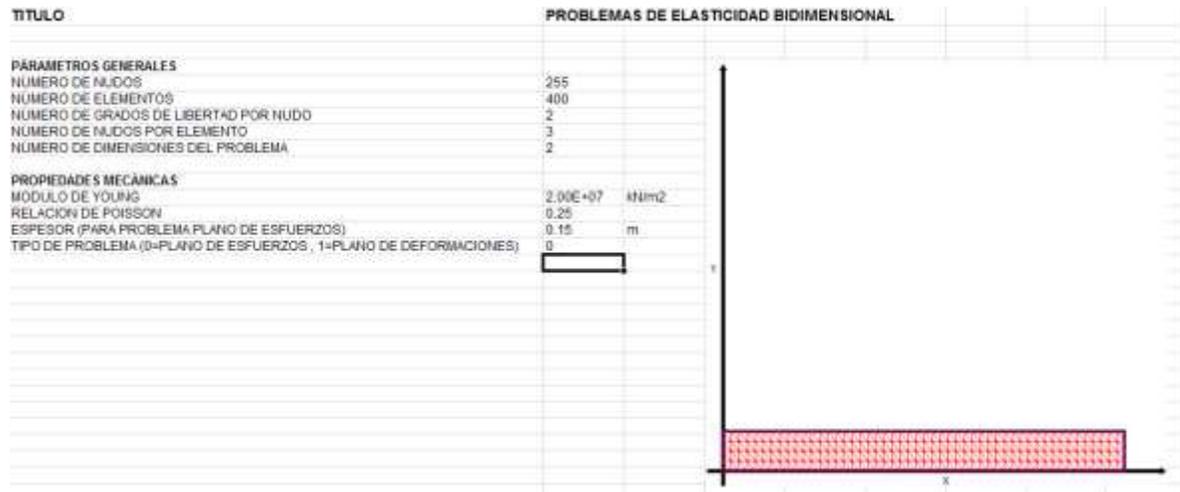


TABLA DE COORDENADAS DE LOS NUDOS

NUDO	m	m			
	X	Y			
1	0.000	0.500			
2	0.100	0.500			
3	0.200	0.500			
4	0.300	0.500			
5	0.400	0.500			
6	0.500	0.500			
7	0.600	0.500			
8	0.700	0.500			
9	0.800	0.500			
10	0.900	0.500			
11	1.000	0.500			
12	1.100	0.500			
13	1.200	0.500			
14	1.300	0.500			
15	1.400	0.500			
16	1.500	0.500			
17	1.600	0.500			
18	1.700	0.500			
19	1.800	0.500			
20	1.900	0.500			
21	2.000	0.500			
22	2.100	0.500			
23	2.200	0.500			
24	2.300	0.500			
25	2.400	0.500			

25	2.400	0.500
26	2.500	0.500
27	2.600	0.500
28	2.700	0.500
29	2.800	0.500
30	2.900	0.500
31	3.000	0.500
32	3.100	0.500
33	3.200	0.500
34	3.300	0.500
35	3.400	0.500
36	3.500	0.500
37	3.600	0.500
38	3.700	0.500
39	3.800	0.500
40	3.900	0.500
41	4.000	0.500
42	4.100	0.500
43	4.200	0.500
44	4.300	0.500
45	4.400	0.500
46	4.500	0.500
47	4.600	0.500
48	4.700	0.500
49	4.800	0.500
50	4.900	0.500
51	5.000	0.500
52	0.000	0.375
53	0.100	0.375

54	0.200	0.375
55	0.300	0.375
56	0.400	0.375
57	0.500	0.375
58	0.600	0.375
59	0.700	0.375
60	0.800	0.375
61	0.900	0.375
62	1.000	0.375
63	1.100	0.375
64	1.200	0.375
65	1.300	0.375
66	1.400	0.375
67	1.500	0.375
68	1.600	0.375
69	1.700	0.375
70	1.800	0.375
71	1.900	0.375
72	2.000	0.375
73	2.100	0.375
74	2.200	0.375
75	2.300	0.375
76	2.400	0.375
77	2.500	0.375
78	2.600	0.375
79	2.700	0.375
80	2.800	0.375
81	2.900	0.375
82	3.000	0.375

83	3.100	0.375
84	3.200	0.375
85	3.300	0.375
86	3.400	0.375
87	3.500	0.375
88	3.600	0.375
89	3.700	0.375
90	3.800	0.375
91	3.900	0.375
92	4.000	0.375
93	4.100	0.375
94	4.200	0.375
95	4.300	0.375
96	4.400	0.375
97	4.500	0.375
98	4.600	0.375
99	4.700	0.375
100	4.800	0.375
101	4.900	0.375
102	5.000	0.375
103	0.000	0.250
104	0.100	0.250
105	0.200	0.250
106	0.300	0.250
107	0.400	0.250
108	0.500	0.250
109	0.600	0.250
110	0.700	0.250
111	0.800	0.250

112	0.900	0.250
113	1.000	0.250
114	1.100	0.250
115	1.200	0.250
116	1.300	0.250
117	1.400	0.250
118	1.500	0.250
119	1.600	0.250
120	1.700	0.250
121	1.800	0.250
122	1.900	0.250
123	2.000	0.250
124	2.100	0.250
125	2.200	0.250
126	2.300	0.250
127	2.400	0.250
128	2.500	0.250
129	2.600	0.250
130	2.700	0.250
131	2.800	0.250
132	2.900	0.250
133	3.000	0.250
134	3.100	0.250
135	3.200	0.250
136	3.300	0.250
137	3.400	0.250
138	3.500	0.250
139	3.600	0.250
140	3.700	0.250

141	3.800	0.250
142	3.900	0.250
143	4.000	0.250
144	4.100	0.250
145	4.200	0.250
146	4.300	0.250
147	4.400	0.250
148	4.500	0.250
149	4.600	0.250
150	4.700	0.250
151	4.800	0.250
152	4.900	0.250
153	5.000	0.250
154	0.000	0.125
155	0.100	0.125
156	0.200	0.125
157	0.300	0.125
158	0.400	0.125
159	0.500	0.125
160	0.600	0.125
161	0.700	0.125
162	0.800	0.125
163	0.900	0.125
164	1.000	0.125
165	1.100	0.125
166	1.200	0.125
167	1.300	0.125
168	1.400	0.125
169	1.500	0.125

170	1.600	0.125
171	1.700	0.125
172	1.800	0.125
173	1.900	0.125
174	2.000	0.125
175	2.100	0.125
176	2.200	0.125
177	2.300	0.125
178	2.400	0.125
179	2.500	0.125
180	2.600	0.125
181	2.700	0.125
182	2.800	0.125
183	2.900	0.125
184	3.000	0.125
185	3.100	0.125
186	3.200	0.125
187	3.300	0.125
188	3.400	0.125
189	3.500	0.125
190	3.600	0.125
191	3.700	0.125
192	3.800	0.125
193	3.900	0.125
194	4.000	0.125
195	4.100	0.125
196	4.200	0.125
197	4.300	0.125
198	4.400	0.125

199	4.500	0.125
200	4.600	0.125
201	4.700	0.125
202	4.800	0.125
203	4.900	0.125
204	5.000	0.125
205	0.000	0.000
206	0.100	0.000
207	0.200	0.000
208	0.300	0.000
209	0.400	0.000
210	0.500	0.000
211	0.600	0.000
212	0.700	0.000
213	0.800	0.000
214	0.900	0.000
215	1.000	0.000
216	1.100	0.000
217	1.200	0.000
218	1.300	0.000
219	1.400	0.000
220	1.500	0.000
221	1.600	0.000
222	1.700	0.000
223	1.800	0.000
224	1.900	0.000
225	2.000	0.000
226	2.100	0.000
227	2.200	0.000

228	2.300	0.000
229	2.400	0.000
230	2.500	0.000
231	2.600	0.000
232	2.700	0.000
233	2.800	0.000
234	2.900	0.000
235	3.000	0.000
236	3.100	0.000
237	3.200	0.000
238	3.300	0.000
239	3.400	0.000
240	3.500	0.000
241	3.600	0.000
242	3.700	0.000
243	3.800	0.000
244	3.900	0.000
245	4.000	0.000
246	4.100	0.000
247	4.200	0.000
248	4.300	0.000
249	4.400	0.000
250	4.500	0.000
251	4.600	0.000
252	4.700	0.000
253	4.800	0.000
254	4.900	0.000
255	5.000	0.000

TABLA DE NUDOS ASOCIADOS A CADA ELEMENTO

ELE	NI	NJ	NK
1	52	53	1
2	53	2	1
3	53	54	2
4	54	3	2
5	54	55	3
6	55	4	3
7	55	56	4
8	56	5	4
9	56	57	5
10	57	6	5
11	57	58	6
12	58	7	6
13	58	59	7
14	59	8	7
15	59	60	8
16	60	9	8
17	60	61	9
18	61	10	9
19	61	62	10
20	62	11	10
21	62	63	11
22	63	12	11
23	63	64	12
24	64	13	12
25	64	65	13

26	65	14	13
27	65	66	14
28	66	15	14
29	66	67	15
30	67	16	15
31	67	68	16
32	68	17	16
33	68	69	17
34	69	18	17
35	69	70	18
36	70	19	18
37	70	71	19
38	71	20	19
39	71	72	20
40	72	21	20
41	72	73	21
42	73	22	21
43	73	74	22
44	74	23	22
45	74	75	23
46	75	24	23
47	75	76	24
48	76	25	24
49	76	77	25
50	77	26	25
51	77	78	26
52	78	27	26
53	78	79	27
54	79	28	27

55	79	80	28
56	80	29	28
57	80	81	29
58	81	30	29
59	81	82	30
60	82	31	30
61	82	83	31
62	83	32	31
63	83	84	32
64	84	33	32
65	84	85	33
66	85	34	33
67	85	86	34
68	86	35	34
69	86	87	35
70	87	36	35
71	87	88	36
72	88	37	36
73	88	89	37
74	89	38	37
75	89	90	38
76	90	39	38
77	90	91	39
78	91	40	39
79	91	92	40
80	92	41	40
81	92	93	41
82	93	42	41
83	93	94	42

84	94	43	42
85	94	95	43
86	95	44	43
87	95	96	44
88	96	45	44
89	96	97	45
90	97	46	45
91	97	98	46
92	98	47	46
93	98	99	47
94	99	48	47
95	99	100	48
96	100	49	48
97	100	101	49
98	101	50	49
99	101	102	50
100	102	51	50
101	103	104	52
102	104	53	52
103	104	105	53
104	105	54	53
105	105	106	54
106	106	55	54
107	106	107	55
108	107	56	55
109	107	108	56
110	108	57	56
111	108	109	57
112	109	58	57

113	109	110	58
114	110	59	58
115	110	111	59
116	111	60	59
117	111	112	60
118	112	61	60
119	112	113	61
120	113	62	61
121	113	114	62
122	114	63	62
123	114	115	63
124	115	64	63
125	115	116	64
126	116	65	64
127	116	117	65
128	117	66	65
129	117	118	66
130	118	67	66
131	118	119	67
132	119	68	67
133	119	120	68
134	120	69	68
135	120	121	69
136	121	70	69
137	121	122	70
138	122	71	70
139	122	123	71
140	123	72	71
141	123	124	72

142	124	73	72
143	124	125	73
144	125	74	73
145	125	126	74
146	126	75	74
147	126	127	75
148	127	76	75
149	127	128	76
150	128	77	76
151	128	129	77
152	129	78	77
153	129	130	78
154	130	79	78
155	130	131	79
156	131	80	79
157	131	132	80
158	132	81	80
159	132	133	81
160	133	82	81
161	133	134	82
162	134	83	82
163	134	135	83
164	135	84	83
165	135	136	84
166	136	85	84
167	136	137	85
168	137	86	85
169	137	138	86
170	138	87	86

171	138	139	87
172	139	88	87
173	139	140	88
174	140	89	88
175	140	141	89
176	141	90	89
177	141	142	90
178	142	91	90
179	142	143	91
180	143	92	91
181	143	144	92
182	144	93	92
183	144	145	93
184	145	94	93
185	145	146	94
186	146	95	94
187	146	147	95
188	147	96	95
189	147	148	96
190	148	97	96
191	148	149	97
192	149	98	97
193	149	150	98
194	150	99	98
195	150	151	99
196	151	100	99
197	151	152	100
198	152	101	100
199	152	153	101

200	153	102	101
201	154	155	103
202	155	104	103
203	155	156	104
204	156	105	104
205	156	157	105
206	157	106	105
207	157	158	106
208	158	107	106
209	158	159	107
210	159	108	107
211	159	160	108
212	160	109	108
213	160	161	109
214	161	110	109
215	161	162	110
216	162	111	110
217	162	163	111
218	163	112	111
219	163	164	112
220	164	113	112
221	164	165	113
222	165	114	113
223	165	166	114
224	166	115	114
225	166	167	115
226	167	116	115
227	167	168	116
228	168	117	116

228	168	117	116
229	168	169	117
230	169	118	117
231	169	170	118
232	170	119	118
233	170	171	119
234	171	120	119
235	171	172	120
236	172	121	120
237	172	173	121
238	173	122	121
239	173	174	122
240	174	123	122
241	174	175	123
242	175	124	123
243	175	176	124
244	176	125	124
245	176	177	125
246	177	126	125
247	177	178	126
248	178	127	126
249	178	179	127
250	179	128	127
251	179	180	128
252	180	129	128
253	180	181	129
254	181	130	129
255	181	182	130
256	182	131	130

257	182	183	131
258	183	132	131
259	183	184	132
260	184	133	132
261	184	185	133
262	185	134	133
263	185	186	134
264	186	135	134
265	186	187	135
266	187	136	135
267	187	188	136
268	188	137	136
269	188	189	137
270	189	138	137
271	189	190	138
272	190	139	138
273	190	191	139
274	191	140	139
275	191	192	140
276	192	141	140
277	192	193	141
278	193	142	141
279	193	194	142
280	194	143	142
281	194	195	143
282	195	144	143
283	195	196	144
284	196	145	144
285	196	197	145

286	197	146	145
287	197	198	146
288	198	147	146
289	198	199	147
290	199	148	147
291	199	200	148
292	200	149	148
293	200	201	149
294	201	150	149
295	201	202	150
296	202	151	150
297	202	203	151
298	203	152	151
299	203	204	152
300	204	153	152
301	205	206	154
302	206	155	154
303	206	207	155
304	207	156	155
305	207	208	156
306	208	157	156
307	208	209	157
308	209	158	157
309	209	210	158
310	210	159	158
311	210	211	159
312	211	160	159
313	211	212	160
314	212	161	160

315	212	213	161
316	213	162	161
317	213	214	162
318	214	163	162
319	214	215	163
320	215	164	163
321	215	216	164
322	216	165	164
323	216	217	165
324	217	166	165
325	217	218	166
326	218	167	166
327	218	219	167
328	219	168	167
329	219	220	168
330	220	169	168
331	220	221	169
332	221	170	169
333	221	222	170
334	222	171	170
335	222	223	171
336	223	172	171
337	223	224	172
338	224	173	172
339	224	225	173
340	225	174	173
341	225	226	174
342	226	175	174
343	226	227	175

344	227	176	175
345	227	228	176
346	228	177	176
347	228	229	177
348	229	178	177
349	229	230	178
350	230	179	178
351	230	231	179
352	231	180	179
353	231	232	180
354	232	181	180
355	232	233	181
356	233	182	181
357	233	234	182
358	234	183	182
359	234	235	183
360	235	184	183
361	235	236	184
362	236	185	184
363	236	237	185
364	237	186	185
365	237	238	186
366	238	187	186
367	238	239	187
368	239	188	187
369	239	240	188
370	240	189	188
371	240	241	189
372	241	190	189

373	241	242	190
374	242	191	190
375	242	243	191
376	243	192	191
377	243	244	192
378	244	193	192
379	244	245	193
380	245	194	193
381	245	246	194
382	246	195	194
383	246	247	195
384	247	196	195
385	247	248	196
386	248	197	196
387	248	249	197
388	249	198	197
389	249	250	198
390	250	199	198
391	250	251	199
392	251	200	199
393	251	252	200
394	252	201	200
395	252	253	201
396	253	202	201
397	253	254	202
398	254	203	202
399	254	255	203
400	255	204	203

TABLA DE DESPLAZAMIENTOS NODALES CONOCIDOS

Tipo de desplazamiento: conocido = 001, desconocido = 000

NUDO	Tipo de desplazamiento		NUDO	Valor de desplazamiento conocido	
	UX	UY		UX	UY
1	001	001	1	0.000	0.000
51	001	001	51	0.000	0.000
52	001	001	52	0.000	0.000
102	001	001	102	0.000	0.000
103	001	001	103	0.000	0.000
153	001	001	153	0.000	0.000
154	001	001	154	0.000	0.000
204	001	001	204	0.000	0.000
205	001	001	205	0.000	0.000
255	001	001	255	0.000	0.000

TABLA DE FUERZAS EN LOS NUDOS

	kN	kN
NUDO	FX	FY
52	12.500	0.000
102	-12.500	0.000
154	-12.500	0.000
204	12.500	0.000

Se colocaron estas fuerzas horizontales debido al momento que existe en los empotramientos en los demás casos no existes estas fuerzas.

TABLA DE FUERZAS EN LOS ELEMENTOS

	kN/m3	kN/m3	kN/m2	kN/m2	
ELEM	WX	WY	PX	PY	CARA
1	0.000	0.000	0.000	0.000	1
2	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
3	0.000	0.000	0.000	0.000	1
4	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
5	0.000	0.000	0.000	0.000	1
6	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
7	0.000	0.000	0.000	0.000	1
8	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
9	0.000	0.000	0.000	0.000	1
10	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
11	0.000	0.000	0.000	0.000	1
12	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
13	0.000	0.000	0.000	0.000	1
14	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
15	0.000	0.000	0.000	0.000	1
16	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
17	0.000	0.000	0.000	0.000	1
18	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
19	0.000	0.000	0.000	0.000	1
20	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
21	0.000	0.000	0.000	0.000	1
22	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
23	0.000	0.000	0.000	0.000	1
24	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
25	0.000	0.000	0.000	0.000	1

26	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
27	0.000	0.000	0.000	0.000	1
28	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
29	0.000	0.000	0.000	0.000	1
30	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
31	0.000	0.000	0.000	0.000	1
32	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
33	0.000	0.000	0.000	0.000	1
34	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
35	0.000	0.000	0.000	0.000	1
36	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
37	0.000	0.000	0.000	0.000	1
38	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
39	0.000	0.000	0.000	0.000	1
40	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
41	0.000	0.000	0.000	0.000	1
42	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
43	0.000	0.000	0.000	0.000	1
44	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
45	0.000	0.000	0.000	0.000	1
46	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
47	0.000	0.000	0.000	0.000	1
48	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
49	0.000	0.000	0.000	0.000	1
50	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
51	0.000	0.000	0.000	0.000	1
52	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
53	0.000	0.000	0.000	0.000	1
54	0.000	0.000	0.000	-10.000	2

55	0.000	0.000	0.000	0.000	1
56	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
57	0.000	0.000	0.000	0.000	1
58	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
59	0.000	0.000	0.000	0.000	1
60	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
61	0.000	0.000	0.000	0.000	1
62	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
63	0.000	0.000	0.000	0.000	1
64	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
65	0.000	0.000	0.000	0.000	1
66	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
67	0.000	0.000	0.000	0.000	1
68	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
69	0.000	0.000	0.000	0.000	1
70	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
71	0.000	0.000	0.000	0.000	1
72	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
73	0.000	0.000	0.000	0.000	1
74	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
75	0.000	0.000	0.000	0.000	1
76	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
77	0.000	0.000	0.000	0.000	1
78	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
79	0.000	0.000	0.000	0.000	1
80	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
81	0.000	0.000	0.000	0.000	1
82	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
83	0.000	0.000	0.000	0.000	1

84	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
85	0.000	0.000	0.000	0.000	1
86	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
87	0.000	0.000	0.000	0.000	1
88	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
89	0.000	0.000	0.000	0.000	1
90	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
91	0.000	0.000	0.000	0.000	1
92	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
93	0.000	0.000	0.000	0.000	1
94	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
95	0.000	0.000	0.000	0.000	1
96	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
97	0.000	0.000	0.000	0.000	1
98	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
99	0.000	0.000	0.000	0.000	1
100	0.000	0.000	0.000	-10.000	2
101	0.000	0.000	0.000	0.000	1
102	0.000	0.000	0.000	0.000	1
103	0.000	0.000	0.000	0.000	1
104	0.000	0.000	0.000	0.000	1
105	0.000	0.000	0.000	0.000	1
106	0.000	0.000	0.000	0.000	1
107	0.000	0.000	0.000	0.000	1
108	0.000	0.000	0.000	0.000	1
109	0.000	0.000	0.000	0.000	1
110	0.000	0.000	0.000	0.000	1
111	0.000	0.000	0.000	0.000	1
112	0.000	0.000	0.000	0.000	1

113	0.000	0.000	0.000	0.000	1
114	0.000	0.000	0.000	0.000	1
115	0.000	0.000	0.000	0.000	1
116	0.000	0.000	0.000	0.000	1
117	0.000	0.000	0.000	0.000	1
118	0.000	0.000	0.000	0.000	1
119	0.000	0.000	0.000	0.000	1
120	0.000	0.000	0.000	0.000	1
121	0.000	0.000	0.000	0.000	1
122	0.000	0.000	0.000	0.000	1
123	0.000	0.000	0.000	0.000	1
124	0.000	0.000	0.000	0.000	1
125	0.000	0.000	0.000	0.000	1
126	0.000	0.000	0.000	0.000	1
127	0.000	0.000	0.000	0.000	1
128	0.000	0.000	0.000	0.000	1
129	0.000	0.000	0.000	0.000	1
130	0.000	0.000	0.000	0.000	1
131	0.000	0.000	0.000	0.000	1
132	0.000	0.000	0.000	0.000	1
133	0.000	0.000	0.000	0.000	1
134	0.000	0.000	0.000	0.000	1
135	0.000	0.000	0.000	0.000	1
136	0.000	0.000	0.000	0.000	1
137	0.000	0.000	0.000	0.000	1
138	0.000	0.000	0.000	0.000	1
139	0.000	0.000	0.000	0.000	1
140	0.000	0.000	0.000	0.000	1
141	0.000	0.000	0.000	0.000	1

142	0.000	0.000	0.000	0.000	1
143	0.000	0.000	0.000	0.000	1
144	0.000	0.000	0.000	0.000	1
145	0.000	0.000	0.000	0.000	1
146	0.000	0.000	0.000	0.000	1
147	0.000	0.000	0.000	0.000	1
148	0.000	0.000	0.000	0.000	1
149	0.000	0.000	0.000	0.000	1
150	0.000	0.000	0.000	0.000	1
151	0.000	0.000	0.000	0.000	1
152	0.000	0.000	0.000	0.000	1
153	0.000	0.000	0.000	0.000	1
154	0.000	0.000	0.000	0.000	1
155	0.000	0.000	0.000	0.000	1
156	0.000	0.000	0.000	0.000	1
157	0.000	0.000	0.000	0.000	1
158	0.000	0.000	0.000	0.000	1
159	0.000	0.000	0.000	0.000	1
160	0.000	0.000	0.000	0.000	1
161	0.000	0.000	0.000	0.000	1
162	0.000	0.000	0.000	0.000	1
163	0.000	0.000	0.000	0.000	1
164	0.000	0.000	0.000	0.000	1
165	0.000	0.000	0.000	0.000	1
166	0.000	0.000	0.000	0.000	1
167	0.000	0.000	0.000	0.000	1
168	0.000	0.000	0.000	0.000	1
169	0.000	0.000	0.000	0.000	1
170	0.000	0.000	0.000	0.000	1

171	0.000	0.000	0.000	0.000	1
172	0.000	0.000	0.000	0.000	1
173	0.000	0.000	0.000	0.000	1
174	0.000	0.000	0.000	0.000	1
175	0.000	0.000	0.000	0.000	1
176	0.000	0.000	0.000	0.000	1
177	0.000	0.000	0.000	0.000	1
178	0.000	0.000	0.000	0.000	1
179	0.000	0.000	0.000	0.000	1
180	0.000	0.000	0.000	0.000	1
181	0.000	0.000	0.000	0.000	1
182	0.000	0.000	0.000	0.000	1
183	0.000	0.000	0.000	0.000	1
184	0.000	0.000	0.000	0.000	1
185	0.000	0.000	0.000	0.000	1
186	0.000	0.000	0.000	0.000	1
187	0.000	0.000	0.000	0.000	1
188	0.000	0.000	0.000	0.000	1
189	0.000	0.000	0.000	0.000	1
190	0.000	0.000	0.000	0.000	1
191	0.000	0.000	0.000	0.000	1
192	0.000	0.000	0.000	0.000	1
193	0.000	0.000	0.000	0.000	1
194	0.000	0.000	0.000	0.000	1
195	0.000	0.000	0.000	0.000	1
196	0.000	0.000	0.000	0.000	1
197	0.000	0.000	0.000	0.000	1
198	0.000	0.000	0.000	0.000	1
199	0.000	0.000	0.000	0.000	1

200	0.000	0.000	0.000	0.000	1
201	0.000	0.000	0.000	0.000	1
202	0.000	0.000	0.000	0.000	1
203	0.000	0.000	0.000	0.000	1
204	0.000	0.000	0.000	0.000	1
205	0.000	0.000	0.000	0.000	1
206	0.000	0.000	0.000	0.000	1
207	0.000	0.000	0.000	0.000	1
208	0.000	0.000	0.000	0.000	1
209	0.000	0.000	0.000	0.000	1
210	0.000	0.000	0.000	0.000	1
211	0.000	0.000	0.000	0.000	1
212	0.000	0.000	0.000	0.000	1
213	0.000	0.000	0.000	0.000	1
214	0.000	0.000	0.000	0.000	1
215	0.000	0.000	0.000	0.000	1
216	0.000	0.000	0.000	0.000	1
217	0.000	0.000	0.000	0.000	1
218	0.000	0.000	0.000	0.000	1
219	0.000	0.000	0.000	0.000	1
220	0.000	0.000	0.000	0.000	1
221	0.000	0.000	0.000	0.000	1
222	0.000	0.000	0.000	0.000	1
223	0.000	0.000	0.000	0.000	1
224	0.000	0.000	0.000	0.000	1
225	0.000	0.000	0.000	0.000	1
226	0.000	0.000	0.000	0.000	1
227	0.000	0.000	0.000	0.000	1
228	0.000	0.000	0.000	0.000	1

229	0.000	0.000	0.000	0.000	1
230	0.000	0.000	0.000	0.000	1
231	0.000	0.000	0.000	0.000	1
232	0.000	0.000	0.000	0.000	1
233	0.000	0.000	0.000	0.000	1
234	0.000	0.000	0.000	0.000	1
235	0.000	0.000	0.000	0.000	1
236	0.000	0.000	0.000	0.000	1
237	0.000	0.000	0.000	0.000	1
238	0.000	0.000	0.000	0.000	1
239	0.000	0.000	0.000	0.000	1
240	0.000	0.000	0.000	0.000	1
241	0.000	0.000	0.000	0.000	1
242	0.000	0.000	0.000	0.000	1
243	0.000	0.000	0.000	0.000	1
244	0.000	0.000	0.000	0.000	1
245	0.000	0.000	0.000	0.000	1
246	0.000	0.000	0.000	0.000	1
247	0.000	0.000	0.000	0.000	1
248	0.000	0.000	0.000	0.000	1
249	0.000	0.000	0.000	0.000	1
250	0.000	0.000	0.000	0.000	1
251	0.000	0.000	0.000	0.000	1
252	0.000	0.000	0.000	0.000	1
253	0.000	0.000	0.000	0.000	1
254	0.000	0.000	0.000	0.000	1
255	0.000	0.000	0.000	0.000	1
256	0.000	0.000	0.000	0.000	1
257	0.000	0.000	0.000	0.000	1

258	0.000	0.000	0.000	0.000	1
259	0.000	0.000	0.000	0.000	1
260	0.000	0.000	0.000	0.000	1
261	0.000	0.000	0.000	0.000	1
262	0.000	0.000	0.000	0.000	1
263	0.000	0.000	0.000	0.000	1
264	0.000	0.000	0.000	0.000	1
265	0.000	0.000	0.000	0.000	1
266	0.000	0.000	0.000	0.000	1
267	0.000	0.000	0.000	0.000	1
268	0.000	0.000	0.000	0.000	1
269	0.000	0.000	0.000	0.000	1
270	0.000	0.000	0.000	0.000	1
271	0.000	0.000	0.000	0.000	1
272	0.000	0.000	0.000	0.000	1
273	0.000	0.000	0.000	0.000	1
274	0.000	0.000	0.000	0.000	1
275	0.000	0.000	0.000	0.000	1
276	0.000	0.000	0.000	0.000	1
277	0.000	0.000	0.000	0.000	1
278	0.000	0.000	0.000	0.000	1
279	0.000	0.000	0.000	0.000	1
280	0.000	0.000	0.000	0.000	1
281	0.000	0.000	0.000	0.000	1
282	0.000	0.000	0.000	0.000	1
283	0.000	0.000	0.000	0.000	1
284	0.000	0.000	0.000	0.000	1
285	0.000	0.000	0.000	0.000	1
286	0.000	0.000	0.000	0.000	1

287	0.000	0.000	0.000	0.000	1
288	0.000	0.000	0.000	0.000	1
289	0.000	0.000	0.000	0.000	1
290	0.000	0.000	0.000	0.000	1
291	0.000	0.000	0.000	0.000	1
292	0.000	0.000	0.000	0.000	1
293	0.000	0.000	0.000	0.000	1
294	0.000	0.000	0.000	0.000	1
295	0.000	0.000	0.000	0.000	1
296	0.000	0.000	0.000	0.000	1
297	0.000	0.000	0.000	0.000	1
298	0.000	0.000	0.000	0.000	1
299	0.000	0.000	0.000	0.000	1
300	0.000	0.000	0.000	0.000	1
301	0.000	0.000	0.000	0.000	1
302	0.000	0.000	0.000	0.000	1
303	0.000	0.000	0.000	0.000	1
304	0.000	0.000	0.000	0.000	1
305	0.000	0.000	0.000	0.000	1
306	0.000	0.000	0.000	0.000	1
307	0.000	0.000	0.000	0.000	1
308	0.000	0.000	0.000	0.000	1
309	0.000	0.000	0.000	0.000	1
310	0.000	0.000	0.000	0.000	1
311	0.000	0.000	0.000	0.000	1
312	0.000	0.000	0.000	0.000	1
313	0.000	0.000	0.000	0.000	1
314	0.000	0.000	0.000	0.000	1
315	0.000	0.000	0.000	0.000	1

316	0.000	0.000	0.000	0.000	1
317	0.000	0.000	0.000	0.000	1
318	0.000	0.000	0.000	0.000	1
319	0.000	0.000	0.000	0.000	1
320	0.000	0.000	0.000	0.000	1
321	0.000	0.000	0.000	0.000	1
322	0.000	0.000	0.000	0.000	1
323	0.000	0.000	0.000	0.000	1
324	0.000	0.000	0.000	0.000	1
325	0.000	0.000	0.000	0.000	1
326	0.000	0.000	0.000	0.000	1
327	0.000	0.000	0.000	0.000	1
328	0.000	0.000	0.000	0.000	1
329	0.000	0.000	0.000	0.000	1
330	0.000	0.000	0.000	0.000	1
331	0.000	0.000	0.000	0.000	1
332	0.000	0.000	0.000	0.000	1
333	0.000	0.000	0.000	0.000	1
334	0.000	0.000	0.000	0.000	1
335	0.000	0.000	0.000	0.000	1
336	0.000	0.000	0.000	0.000	1
337	0.000	0.000	0.000	0.000	1
338	0.000	0.000	0.000	0.000	1
339	0.000	0.000	0.000	0.000	1
340	0.000	0.000	0.000	0.000	1
341	0.000	0.000	0.000	0.000	1
342	0.000	0.000	0.000	0.000	1
343	0.000	0.000	0.000	0.000	1
344	0.000	0.000	0.000	0.000	1

345	0.000	0.000	0.000	0.000	1
346	0.000	0.000	0.000	0.000	1
347	0.000	0.000	0.000	0.000	1
348	0.000	0.000	0.000	0.000	1
349	0.000	0.000	0.000	0.000	1
350	0.000	0.000	0.000	0.000	1
351	0.000	0.000	0.000	0.000	1
352	0.000	0.000	0.000	0.000	1
353	0.000	0.000	0.000	0.000	1
354	0.000	0.000	0.000	0.000	1
355	0.000	0.000	0.000	0.000	1
356	0.000	0.000	0.000	0.000	1
357	0.000	0.000	0.000	0.000	1
358	0.000	0.000	0.000	0.000	1
359	0.000	0.000	0.000	0.000	1
360	0.000	0.000	0.000	0.000	1
361	0.000	0.000	0.000	0.000	1
362	0.000	0.000	0.000	0.000	1
363	0.000	0.000	0.000	0.000	1
364	0.000	0.000	0.000	0.000	1
365	0.000	0.000	0.000	0.000	1
366	0.000	0.000	0.000	0.000	1
367	0.000	0.000	0.000	0.000	1
368	0.000	0.000	0.000	0.000	1
369	0.000	0.000	0.000	0.000	1
370	0.000	0.000	0.000	0.000	1
371	0.000	0.000	0.000	0.000	1
372	0.000	0.000	0.000	0.000	1
373	0.000	0.000	0.000	0.000	1

374	0.000	0.000	0.000	0.000	1
375	0.000	0.000	0.000	0.000	1
376	0.000	0.000	0.000	0.000	1
377	0.000	0.000	0.000	0.000	1
378	0.000	0.000	0.000	0.000	1
379	0.000	0.000	0.000	0.000	1
380	0.000	0.000	0.000	0.000	1
381	0.000	0.000	0.000	0.000	1
382	0.000	0.000	0.000	0.000	1
383	0.000	0.000	0.000	0.000	1
384	0.000	0.000	0.000	0.000	1
385	0.000	0.000	0.000	0.000	1
386	0.000	0.000	0.000	0.000	1
387	0.000	0.000	0.000	0.000	1
388	0.000	0.000	0.000	0.000	1
389	0.000	0.000	0.000	0.000	1
390	0.000	0.000	0.000	0.000	1
391	0.000	0.000	0.000	0.000	1
392	0.000	0.000	0.000	0.000	1
393	0.000	0.000	0.000	0.000	1
394	0.000	0.000	0.000	0.000	1
395	0.000	0.000	0.000	0.000	1
396	0.000	0.000	0.000	0.000	1
397	0.000	0.000	0.000	0.000	1
398	0.000	0.000	0.000	0.000	1
399	0.000	0.000	0.000	0.000	1
400	0.000	0.000	0.000	0.000	1

Esfuerzos

El nodo 230 es el que se encuentra en el medio de la viga

F218	5.2321E+01
F219	7.1993E+01
F220	8.9967E+01
F221	1.0624E+02
F222	1.2082E+02
F223	1.3370E+02
F224	1.4488E+02
F225	1.5436E+02
F226	1.6215E+02
F227	1.6824E+02
F228	1.7262E+02
F229	2.4531E+02
F230	2.4630E+02
F231	2.4460E+02
F232	1.7319E+02
F233	1.6909E+02
F234	1.6329E+02
F235	1.5579E+02
F236	1.4659E+02
F237	1.3569E+02
F238	1.2310E+02
F239	1.0880E+02
F240	9.2811E+01
F241	7.5121E+01
F242	5.5733E+01
F243	3.4646E+01
F244	1.1861E+01
F245	-1.2621E+01
F246	-3.8795E+01
F247	-6.6654E+01
F248	-9.6180E+01
F249	-1.2724E+02

$$M = \frac{\sigma \times I}{y}$$

$$M = \frac{246.30 \times 0.0015625}{0.25} = 1.53 \text{ KN} * m$$

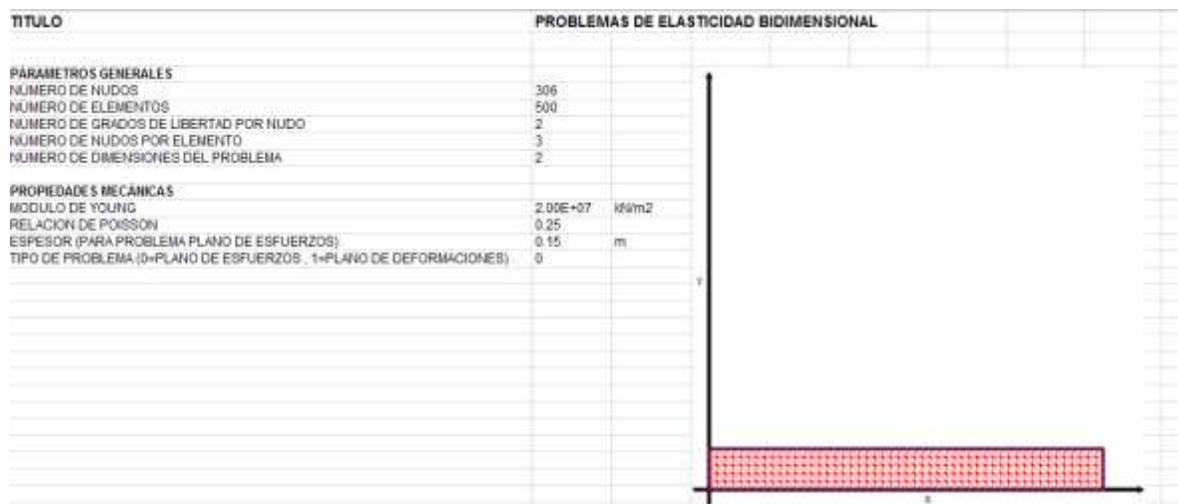
Deflexión en Y

F212	-9.1610E-06	-1.9166E-05
F213	-9.6506E-06	-2.3345E-05
F214	-9.9681E-06	-2.7663E-05
F215	-1.0124E-05	-3.2053E-05
F216	-1.0128E-05	-3.6454E-05
F217	-9.9904E-06	-4.0806E-05
F218	-9.7217E-06	-4.5056E-05
F219	-9.3318E-06	-4.9151E-05
F220	-8.8307E-06	-5.3047E-05
F221	-8.2287E-06	-5.6699E-05
F222	-7.5358E-06	-6.0071E-05
F223	-6.7621E-06	-6.3127E-05
F224	-5.9178E-06	-6.5837E-05
F225	-5.0131E-06	-6.8175E-05
F226	-4.0579E-06	-7.0118E-05
F227	-3.0625E-06	-7.1648E-05
F228	-2.0370E-06	-7.2752E-05
F229	-9.9142E-07	-7.3419E-05
F230	6.4019E-08	-7.3643E-05
F231	1.1192E-06	-7.3421E-05
F232	2.1641E-06	-7.2757E-05
F233	3.1884E-06	-7.1656E-05
F234	4.1822E-06	-7.0128E-05
F235	5.1352E-06	-6.8187E-05
F236	6.0374E-06	-6.5852E-05
F237	6.8787E-06	-6.3144E-05
F238	7.6488E-06	-6.0091E-05
F239	8.3377E-06	-5.6723E-05
F240	8.9353E-06	-5.3073E-05
F241	9.4314E-06	-4.9182E-05
F242	9.8160E-06	-4.5090E-05

Las siguientes mallas no serán tan detalladas solo se mostrara resultados

Malla #2

Consta 306 nodos y 500 elementos



Esfuerzos

El nodo 281 es el que se encuentra en el medio de la viga

F262	-1.4460E+02
F263	-1.1022E+02
F264	-7.7767E+01
F265	-4.7201E+01
F266	-1.8489E+01
F267	8.3782E+00
F268	3.3405E+01
F269	5.6592E+01
F270	7.7940E+01
F271	9.7448E+01
F272	1.1512E+02
F273	1.3094E+02
F274	1.4493E+02
F275	1.5708E+02
F276	1.6738E+02
F277	1.7585E+02
F278	1.8247E+02
F279	2.1126E+02
F280	2.4620E+02
F281	2.4831E+02
F282	2.4757E+02
F283	2.1100E+02
F284	1.8358E+02
F285	1.7732E+02
F286	1.6923E+02
F287	1.5929E+02
F288	1.4751E+02
F289	1.3389E+02
F290	1.1843E+02
F291	1.0113E+02
F292	8.1993E+01

$$M = \frac{\sigma \times I}{y}$$

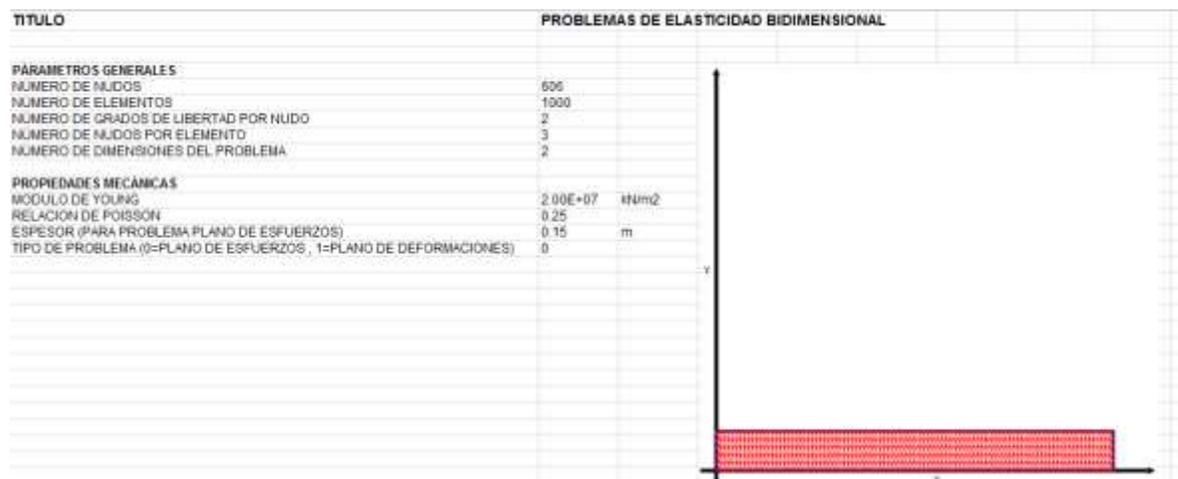
$$M = \frac{248.31 \times 0.0015625}{0.25} = 1.55 \text{ KN} * \text{m}$$

Deflexión en Y

F261	-7.9781E-06	-1.1954E-05
F262	-8.8811E-06	-1.5782E-05
F263	-9.5821E-06	-1.9909E-05
F264	-1.0093E-05	-2.4256E-05
F265	-1.0424E-05	-2.8749E-05
F266	-1.0586E-05	-3.3318E-05
F267	-1.0590E-05	-3.7900E-05
F268	-1.0446E-05	-4.2431E-05
F269	-1.0166E-05	-4.6855E-05
F270	-9.7582E-06	-5.1120E-05
F271	-9.2349E-06	-5.5177E-05
F272	-8.6061E-06	-5.8982E-05
F273	-7.8825E-06	-6.2493E-05
F274	-7.0745E-06	-6.5676E-05
F275	-6.1928E-06	-6.8499E-05
F276	-5.2479E-06	-7.0935E-05
F277	-4.2504E-06	-7.2959E-05
F278	-3.2109E-06	-7.4553E-05
F279	-2.1398E-06	-7.5703E-05
F280	-1.0478E-06	-7.6397E-05
F281	5.4505E-08	-7.6630E-05
F282	1.1567E-06	-7.6399E-05
F283	2.2481E-06	-7.5707E-05
F284	3.3181E-06	-7.4559E-05
F285	4.3563E-06	-7.2967E-05
F286	5.3521E-06	-7.0945E-05
F287	6.2948E-06	-6.8512E-05
F288	7.1739E-06	-6.5691E-05
F289	7.9789E-06	-6.2510E-05
F290	8.6992E-06	-5.9001E-05
F291	9.3243E-06	-5.5199E-05

Malla #3

Consta 606 nodos y 1000 elementos



Esfuerzos

El nodo 556 es el que se encuentra en el medio de la viga

F546	1.7371E+02
F547	1.7827E+02
F548	1.8235E+02
F549	1.8596E+02
F550	1.8910E+02
F551	1.9176E+02
F552	1.9395E+02
F553	1.9566E+02
F554	2.2589E+02
F555	2.3865E+02
F556	2.4994E+02
F557	2.3575E+02
F558	2.1708E+02
F559	1.9594E+02
F560	1.9433E+02
F561	1.9224E+02
F562	1.8967E+02
F563	1.8663E+02
F564	1.8311E+02
F565	1.7912E+02
F566	1.7466E+02
F567	1.6972E+02
F568	1.6430E+02
F569	1.5841E+02
F570	1.5204E+02
F571	1.4520E+02

$$M = \frac{\sigma \times I}{y}$$

$$M = \frac{249.94 \times 0.0015625}{0.25} = 1.56 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

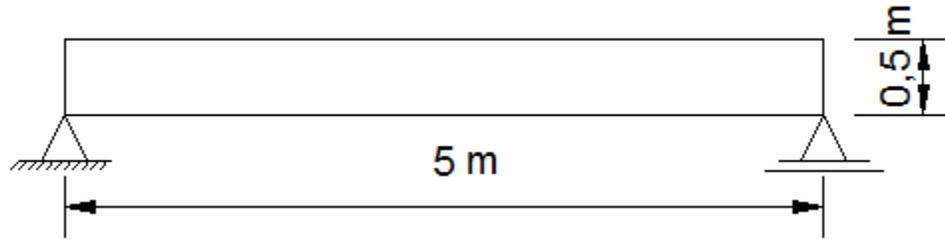
Deflexión en Y

F545	-5.9448E-06	-7.1980E-05
F546	-5.4493E-06	-7.3185E-05
F547	-4.9402E-06	-7.4284E-05
F548	-4.4189E-06	-7.5274E-05
F549	-3.8866E-06	-7.6153E-05
F550	-3.3449E-06	-7.6919E-05
F551	-2.7950E-06	-7.7570E-05
F552	-2.2383E-06	-7.8105E-05
F553	-1.6761E-06	-7.8523E-05
F554	-1.1099E-06	-7.8821E-05
F555	-5.4101E-07	-7.9001E-05
F556	2.9227E-08	-7.9061E-05
F557	5.9944E-07	-7.9002E-05
F558	1.1683E-06	-7.8822E-05
F559	1.7343E-06	-7.8524E-05
F560	2.2963E-06	-7.8107E-05
F561	2.8528E-06	-7.7573E-05
F562	3.4024E-06	-7.6922E-05
F563	3.9438E-06	-7.6156E-05
F564	4.4757E-06	-7.5278E-05
F565	4.9966E-06	-7.4288E-05
F566	5.5052E-06	-7.3190E-05
F567	6.0002E-06	-7.1985E-05
F568	6.4801E-06	-7.0678E-05
F569	6.9437E-06	-6.9270E-05
F570	7.3895E-06	-6.7766E-05

Haciendo un resumen de los resultados

Nº	Número de nodos	Número de elementos	Momento (KN*m)	Deflexión (m)
1	255	400	1.53	0.0000736
2	306	500	1.55	0.0000766
3	255	400	1.56	0.00007906

b) Se analizará como viga simplemente apoyada



Según formulas deducidas por resistencia de materiales la máxima deflexión es producida al medio de la viga y se obtiene el valor de la siguiente expresión:

$$\Delta = \frac{5 \times w \times L^4}{384 \times E \times I}$$

$$\Delta = \frac{5 \times 1.5 \times 5^4}{384 \times 20000000 \times 0.0015625} = 0.000390625 \text{ m}$$

$$M = 4.6875 \text{ KN} * \text{m}$$

Malla #1

Consta de 255 nodos y 400 elementos

TITULO		PROBLEMAS DE ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL	
PARÁMETROS GENERALES			
NUMERO DE NUDOS	255		
NUMERO DE ELEMENTOS	400		
NUMERO DE GRADOS DE LIBERTAD POR NUDO	2		
NUMERO DE NUDOS POR ELEMENTO	3		
NUMERO DE DIMENSIONES DEL PROBLEMA	2		
PROPIEDADES MECÁNICAS			
MODULO DE YOUNG	2.00E+07	t/Nm ²	
RELACION DE POISSON	0.25		
ESPESOR (PARA PROBLEMA PLANO DE ESFUERZOS)	0.15	m	
TIPO DE PROBLEMA (0=PLANO DE ESFUERZOS, 1=PLANO DE DEFORMACIONES)	0		

Esfuerzos

El nodo 230 es el que se encuentra en el medio de la viga

F222	4.7527E+02
F223	4.8815E+02
F224	4.9934E+02
F225	5.0883E+02
F226	5.1661E+02
F227	5.2270E+02
F228	5.2710E+02
F229	5.2979E+02
F230	5.3079E+02
F231	5.3008E+02
F232	5.2768E+02
F233	5.2358E+02
F234	5.1778E+02
F235	5.1029E+02
F236	5.0109E+02
F237	4.9020E+02
F238	4.7761E+02
F239	4.6332E+02
F240	4.4733E+02
F241	4.2964E+02
F242	4.1025E+02
F243	3.8917E+02
F244	3.6639E+02
F245	3.4194E+02
F246	3.1585E+02
F247	2.8824E+02
F248	2.5930E+02
F249	2.2942E+02

$$M = \frac{\sigma \times I}{y}$$

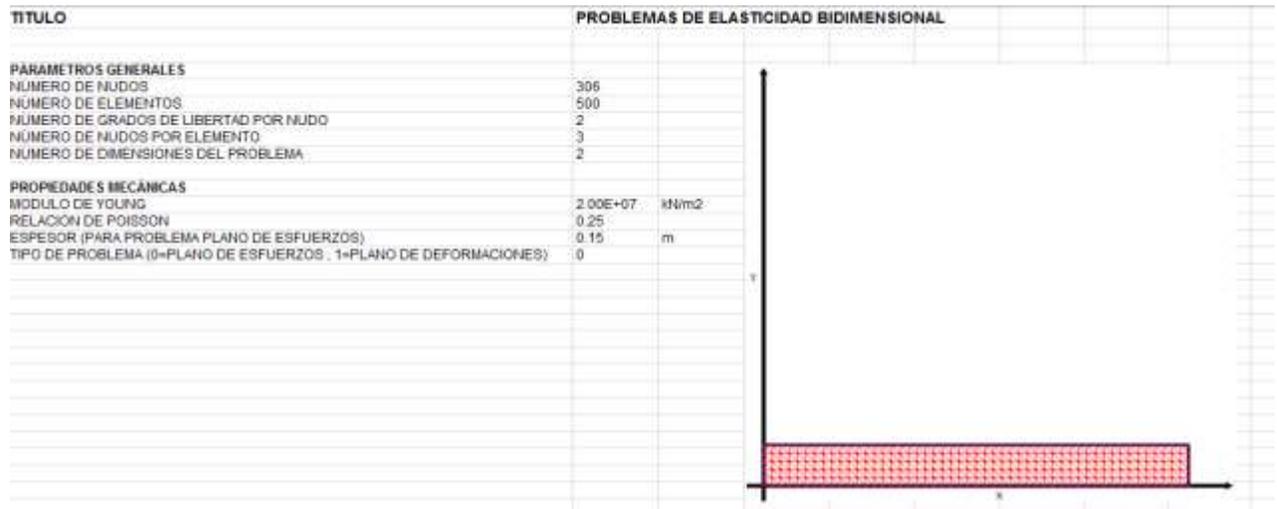
$$M = \frac{530.79 \times 0.0015625}{0.25} = 3.3174 \text{ KN} * m$$

Deflexión en Y

F218	1.9247E-05	-2.5031E-04
F219	2.1748E-05	-2.6408E-04
F220	2.4360E-05	-2.7681E-04
F221	2.7074E-05	-2.8846E-04
F222	2.9878E-05	-2.9898E-04
F223	3.2763E-05	-3.0835E-04
F224	3.5719E-05	-3.1652E-04
F225	3.8735E-05	-3.2348E-04
F226	4.1802E-05	-3.2921E-04
F227	4.4909E-05	-3.3368E-04
F228	4.8046E-05	-3.3688E-04
F229	5.1203E-05	-3.3880E-04
F230	5.4370E-05	-3.3944E-04
F231	5.7537E-05	-3.3879E-04
F232	6.0694E-05	-3.3685E-04
F233	6.3830E-05	-3.3364E-04
F234	6.6935E-05	-3.2915E-04
F235	7.0000E-05	-3.2341E-04
F236	7.3014E-05	-3.1644E-04
F237	7.5967E-05	-3.0825E-04
F238	7.8849E-05	-2.9887E-04
F239	8.1650E-05	-2.8833E-04
F240	8.4359E-05	-2.7667E-04
F241	8.6967E-05	-2.6393E-04
F242	8.9464E-05	-2.5014E-04
F243	9.1839E-05	-2.3536E-04
F244	9.4081E-05	-2.1963E-04

Malla #2

Consta 306 nodos y 500 elementos



Esfuerzos

El nodo 281 es el que se encuentra en el medio de la viga

F273	5.1493E+02
F274	5.2892E+02
F275	5.4107E+02
F276	5.5138E+02
F277	5.5985E+02
F278	5.6648E+02
F279	5.7127E+02
F280	5.7422E+02
F281	5.7533E+02
F282	5.7460E+02
F283	5.7202E+02
F284	5.6761E+02
F285	5.6136E+02
F286	5.5326E+02
F287	5.4333E+02
F288	5.3155E+02
F289	5.1794E+02
F290	5.0248E+02
F291	4.8518E+02
F292	4.6605E+02
F293	4.4506E+02
F294	4.2224E+02
F295	3.9757E+02
F296	3.7107E+02
F297	3.4278E+02
F298	3.1279E+02
F299	2.8134E+02
F300	2.4891E+02

$$M = \frac{\sigma \times I}{y}$$

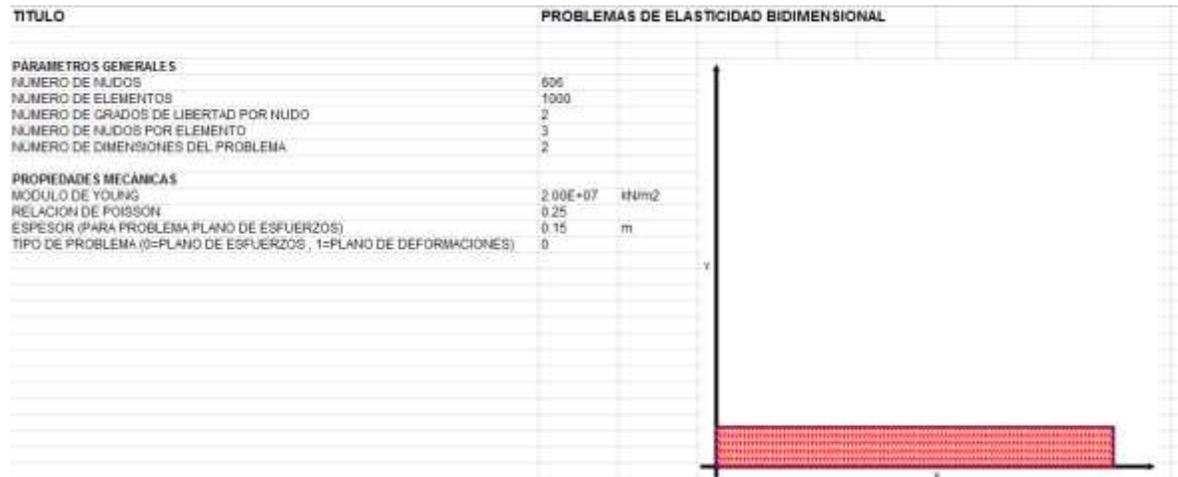
$$M = \frac{575.33 \times 0.0015625}{0.25} = 3.59 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Deflexión en Y

F267	1.5355E-05	-2.2932E-04
F268	1.7702E-05	-2.4571E-04
F269	2.0185E-05	-2.6111E-04
F270	2.2796E-05	-2.7547E-04
F271	2.5522E-05	-2.8875E-04
F272	2.8354E-05	-3.0090E-04
F273	3.1281E-05	-3.1187E-04
F274	3.4292E-05	-3.2164E-04
F275	3.7377E-05	-3.3016E-04
F276	4.0525E-05	-3.3742E-04
F277	4.3725E-05	-3.4340E-04
F278	4.6968E-05	-3.4806E-04
F279	5.0242E-05	-3.5140E-04
F280	5.3538E-05	-3.5340E-04
F281	5.6843E-05	-3.5407E-04
F282	6.0149E-05	-3.5339E-04
F283	6.3444E-05	-3.5137E-04
F284	6.6717E-05	-3.4801E-04
F285	6.9959E-05	-3.4334E-04
F286	7.3158E-05	-3.3735E-04
F287	7.6304E-05	-3.3008E-04
F288	7.9386E-05	-3.2153E-04
F289	8.2395E-05	-3.1175E-04
F290	8.5319E-05	-3.0077E-04
F291	8.8147E-05	-2.8861E-04
F292	9.0870E-05	-2.7531E-04
F293	9.3476E-05	-2.6094E-04

Malla #3

Consta 606 nodos y 1000 elementos



Esfuerzos

El nodo 556 es el que se encuentra en el medio de la viga

F534	4.7845E+02
F535	4.8872E+02
F536	4.9851E+02
F537	5.0782E+02
F538	5.1666E+02
F539	5.2503E+02
F540	5.3292E+02
F541	5.4033E+02
F542	5.4727E+02
F543	5.5373E+02
F544	5.5972E+02
F545	5.6523E+02
F546	5.7027E+02
F547	5.7483E+02
F548	5.7892E+02
F549	6.0053E+02
F550	6.1467E+02
F551	6.3033E+02
F552	6.5052E+02
F553	6.7323E+02
F554	6.9346E+02
F555	7.2622E+02
F556	7.4551E+02
F557	7.3232E+02
F558	7.0666E+02
F559	6.8652E+02
F560	6.6990E+02
F561	6.4781E+02
F562	6.1625E+02
F563	5.8321E+02

$$M = \frac{\sigma \times I}{y}$$

$$M = \frac{745.51 \times 0.0015625}{0.25} = 4.65 \text{ KN} * m$$

Deflexión en Y

F540	3.2455E-05	-3.2269E-04
F541	3.4000E-05	-3.2789E-04
F542	3.5565E-05	-3.3278E-04
F543	3.7149E-05	-3.3734E-04
F544	3.8751E-05	-3.4158E-04
F545	4.0369E-05	-3.4550E-04
F546	4.2002E-05	-3.4908E-04
F547	4.3649E-05	-3.5233E-04
F548	4.5308E-05	-3.5525E-04
F549	4.6978E-05	-3.5783E-04
F550	4.8657E-05	-3.6006E-04
F551	5.0345E-05	-3.6196E-04
F552	5.2039E-05	-3.6351E-04
F553	5.3739E-05	-3.6472E-04
F554	5.5443E-05	-3.6558E-04
F555	5.7149E-05	-3.6610E-04
F556	5.8857E-05	-3.6627E-04
F557	6.0565E-05	-3.6609E-04
F558	6.2271E-05	-3.6557E-04
F559	6.3975E-05	-3.6470E-04
F560	6.5675E-05	-3.6349E-04
F561	6.7369E-05	-3.6193E-04
F562	6.9056E-05	-3.6003E-04
F563	7.0735E-05	-3.5778E-04
F564	7.2405E-05	-3.5520E-04
F565	7.4064E-05	-3.5228E-04
F566	7.5710E-05	-3.4902E-04

Haciendo un resumen de los resultados

Nº	Número de nodos	Número de elementos	Momento (KN*m)	Deflexión (m)
1	255	400	3.317	0.000339
2	306	500	3.59	0.000354
3	255	400	4.65	0.000366

Se hubieran podido encontrar mallas más óptimas para la viga simplemente apoyada solo que se decidió trabajar con las mismas mallas en los dos ejercicios tanto en la viga biempotrada como simplemente apoyada.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

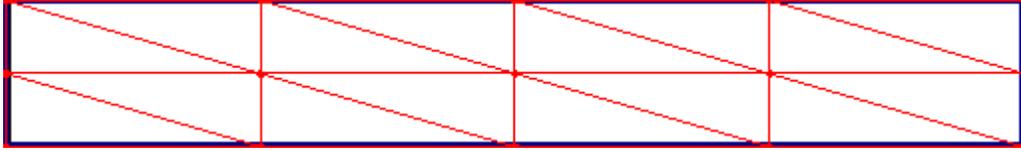
Inicialmente es conveniente acotar que el programa realizado con anterioridad por el Ing. Eduardo Daniel Farfán Duran se limita a realizar el proceso de armado de la matriz y la solución estructural, con la introducción de datos, discretización de elementos y vinculación exterior de manera manual. Este hecho puede acarrear errores resultado de la transcripción.

- ❖ El programa realizado en el presente trabajo pretende minimizar los errores de transcripción (propios de los humanos) y lo logra generando de manera automática las tablas de coordenadas de nodos asociados a cada elemento y la tabla de coordenadas de los nodos de los que constituye el enmallado. Esta situación facilita el trabajo en cuanto al tiempo y a la variación que se le puede dar al enmallado, pudiendo cambiar de número de elementos de acuerdo a la necesidad del usuario y a la aproximación que se desee de los resultados.
- ❖ A través de la visualización del dibujo de la idealización y discretización estructural se puede observar de manera objetiva, acomodar y escoger la cantidad de elementos finitos que se desea analizar, pudiéndose realizar como máximo 100 divisiones horizontales y 100 divisiones verticales lo que nos daría 20000 elementos finitos triangulares. Este número es generalmente suficiente para los casos prácticos y más aún para los que posibilita el cálculo en estados de esfuerzo plano o de deformación plana. Así también mencionar que el espesor deberá ser como máximo un décimo de la base para poder obtener óptimos resultados.
- ❖ El proceso de discretización se limita a estructuras que se puedan idealizar adoptando una forma cuadrada, rectangular, triangular o circular; como por ejemplo: a) una viga podría ser idealizada como un rectángulo, b) el suelo bajo una zapata donde deseamos conocer la distribución de esfuerzos podría ser idealizada como una figura plana circular simulando de esta manera el bulbo de Boussinesq. Futuros trabajos que sigan la idea original del Ing. Farfán podrían posibilitar la discretización de otras estructuras más complejas sean planas o espaciales. Este trabajo no persigue tal objetivo.
- ❖ Las dimensiones que se podrán dar como máximo es de 20 metros tanto para la base como para la altura y un diámetro de 20 metros para el círculo.

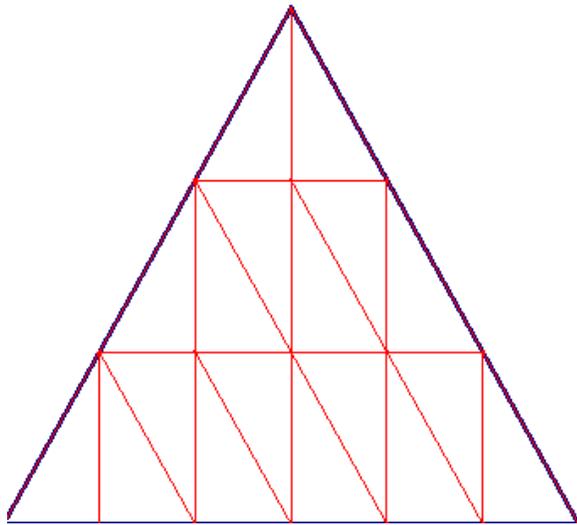
- ❖ Las estructuras que se adapten a una forma cuadrada, rectangular, triangular o circular sólo podrán ser discretizadas en triángulos rectángulos de igual tamaño.

Como por ejemplo:

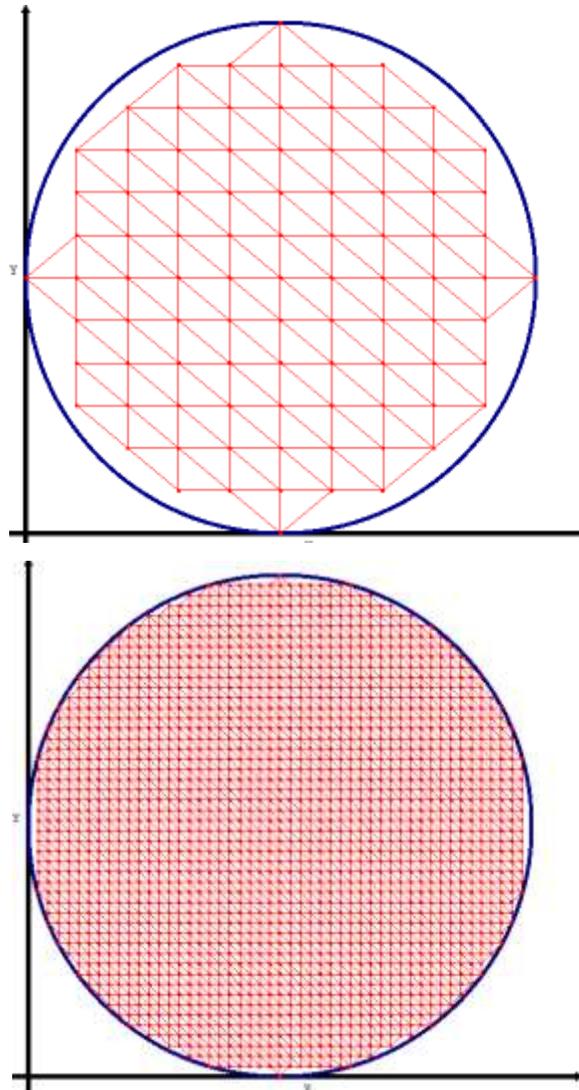
- Rectángulo:



- Triángulo:



Es evidente que este tipo de discretización de elementos finitos (triángulos rectángulos) deja vacíos en el dominio situación que se subsana incrementando el número de elementos finitos, es decir agrandando el número de elementos del enmallado.

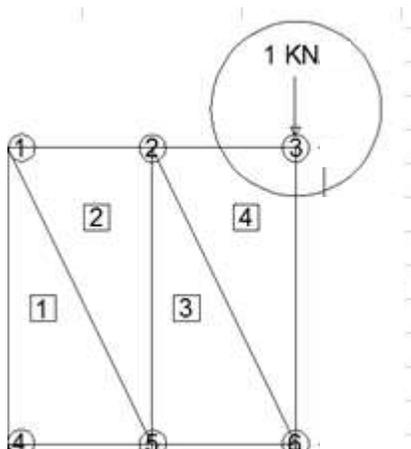


- ❖ Para la introducción de otros datos tales como cargas externas, peso propio y vínculos es conveniente acotar que el programa permite:
 - a) La tabla para poder posicionar los apoyos de la estructura a trabajar llamada “tabla de desplazamientos conocidos” se coloca de manera manual ya que depende del tipo de vínculo, con lo que puede variar la posición de los mismos; colocando en la tabla de la izquierda los nudos en los que se encuentra el apoyo y colocando “001” a aquellas restricciones que sean conocidas y “000” a aquellas que no se conocen y en la tabla de la derecha se coloca el valor de los desplazamientos, sabiendo así que donde existe la restricción el valor del desplazamiento es “0” por ejemplo

Tipo de desplazamiento			Valor de desplazamiento conocido		
NUDO	UX	UY	NUDO	UX	UY
1	001	000	1	0,000	
4	001	001	4	0,000	0,000
7	001	000	7	0,000	

- b) Las cargas o fuerzas puntuales que se encuentren en la estructura que se está analizando se deben colocar en los nudos de manera manual ya que las cuales pueden variar de lugar y posición. Se debe colocar positivo (+) si va hacia arriba y hacia la derecha y negativo (-) si va hacia abajo y hacia la izquierda; además se debe colocar la dirección de la fuerza ya sea en el eje “x” o en el eje “y”.

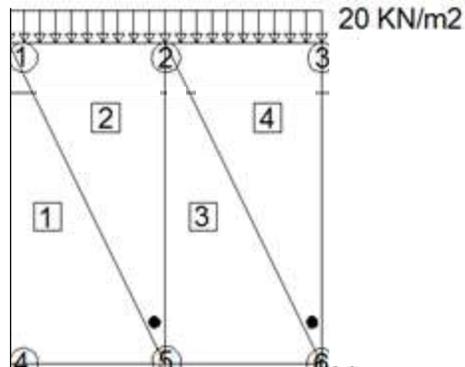
Ejemplo:



NUDO	kN FX	kN FY
3	0,000	-1,000

- c) El peso propio y las cargas distribuidas se coloca de manera manual, si bien el peso propio es constante las cargas distribuidas pueden variar de magnitud, lugar y posición. Se debe colocar positivo (+) si va hacia arriba y hacia la derecha y negativo (-) si va hacia abajo y hacia la izquierda; además se debe colocar la dirección de la carga ya sea en el eje “x” o en el eje “y”. Se denomina como caras a los dos catetos del triángulo siendo las caras verticales “cara 1” y las horizontales “cara 2”

Ejemplo:



ELEM	kN/m3 WX	kN/m3 WY	kN/m2 PX	kN/m2 PY	CARA
1	0,000	-24,000	0,000	0,000	1
2	0,000	-24,000	0,000	-20,000	2
3	0,000	-24,000	0,000	0,000	1
4	0,000	-24,000	0,000	-20,000	2
5	0,000	-24,000	0,000	0,000	1
6	0,000	-24,000	0,000	0,000	1

Lo anterior también se podría automatizar. Sin embargo se estimó que se corre el riesgo de perder la objetividad que persigue, un “programa académico”, por lo cual no se hace nada al respecto.

- d) Se pueden colocar cargas puntuales ya sean verticales u horizontales solamente en el plano de trabajo y únicamente sobre los nodos.
 - e) Los apoyos pueden ser colocados sobre cualquier nodo en el plano donde se está trabajando.
- ❖ Del programa sólo se obtienen esfuerzos, deformaciones y deflexiones en los puntos de continuidad de los elementos finitos (nodos). Fuerzas internas como cortantes axiales y momentos deberán ser encontrados a partir de las deformaciones por medio de métodos tradicionales (trabajo virtual, teorema de castigliano u otro) o por medio de otros programas académicos que realizan el proceso.
 - ❖ El MEF es en la actualidad, el método más utilizado para el análisis estructural, y cobra real importancia cuando es escrito en un lenguaje de programación sencillo, en nuestro caso en Visual Basic con un entorno Excel, Visual Studio y Windows form por su versatilidad.

- ❖ Se puede evidenciar que el elemento finito triangular lineal es el que se acomoda mejor geoméricamente para la discretización de cualquier estructura plana, sin importar la geometría que tenga. Otra razón por la que se optó por este tipo de elemento, es porque los esfuerzos y deformaciones dentro de este tipo de elemento finito son constantes lo cual hace más simple su análisis y se obtiene buenos resultados.
- ❖ El programa requiere para su funcionamiento un sistema operativo Microsoft Windows, como también Microsoft Office Excel versión 2000, 2003, 2007 o más actual previamente instalado, ya que la carpeta del mallado funciona sin depender de un programa en específico.
- ❖ Tanto el programa como los datos de un problema particular quedan archivados en un libro de Microsoft Excel, esto facilita su portabilidad a computadores que cuenten con un sistema operativo Microsoft Windows y con el programa Microsoft Excel, lo cual es común en el medio.
- ❖ Este programa está creado para un análisis elástico lineal, para cualquier tipo de estructura plana que cumpla con la condición de un material isótropo y de las formas previamente mencionadas. En elasticidad las únicas variables necesarias para identificar este tipo de material son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson.
- ❖ No es necesario como en resistencia de materiales el dato de la inercia porque no es un hecho físico, simplemente es un artificio para pasar del análisis en tres dimensiones al de dos dimensiones.
- ❖ La capacidad del programa está determinada por el máximo de la matriz de rigidez del sistema. En general las matrices son arreglos de dos tamaño índices enteros tipo integer, cuyo tamaño máximo es de 32767. Sin embargo la velocidad de cálculo se reduce fuertemente cuando se declaran matrices de gran tamaño debido al espacio ocupado en la memoria RAM o en la memoria virtual del disco duro, por ejemplo, una matriz de doble precisión de 32767 por 32767 tiene un tamaño de almacenamiento de 8.5 GB aproximadamente.

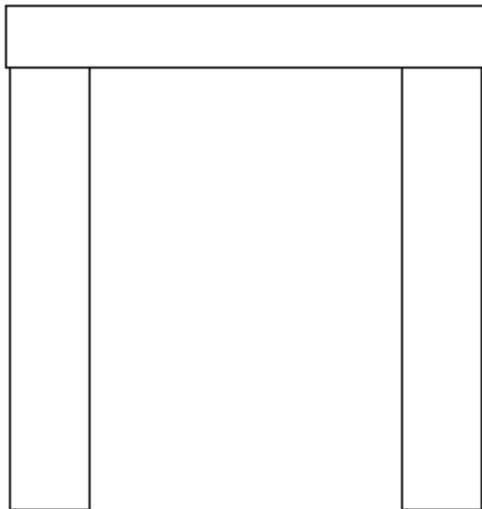
- ❖ En el programa sólo es posible ingresar datos de las fuerzas de superficie uniformemente distribuidas, es decir con una altura de carga constante, por lo tanto habrá en algunos casos que idealizar a este tipo de carga o fuerza de superficie para el cual ha sido diseñado el programa.
- ❖ Este programa ha sido diseñado a código abierto, lo cual permite crear nuevas subrutinas de cálculo las cuales se acomoden a las necesidades del usuario, y generen una flexibilidad y transparencia del programa.
- ❖ Como todo programa tiene sus limitaciones en el ingreso de datos, por ejemplo el programa no trabaja con momentos aplicados, puesto que el momento aplicado no es un hecho físico como tal sino debe entenderse como un par de fuerzas.

RECOMENDACIONES

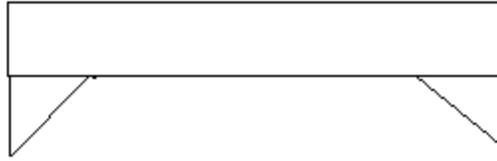
- ❖ Debido a la variedad de valores de módulo de elasticidad y de coeficiente de Poisson que existe según diferentes autores para evitar la búsqueda de los mismos se puede emplear algunos de estos valores (obtenidos del libro de “RESISTENCIA DE LOS MATERIALES, Timoshenko”) dependiendo del material a ser utilizado, aclarando que se puede usar en el programa cualquier valor obtenido de otra bibliografía.

MATERIALES	MODULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL O MODULO DE YOUNG E (KN/m ²)	COEFICIENTE DE POISSON ν
Aleaciones de aluminio	68947573 - 78600233	0.33
Hormigón	17236893 - 31026408	0.2-0.3
Vidrio	48263301 - 82737087	0.17-0.27
Piedra		
-granito, mármol, cuarzo	41368544 - 96526602	0.2-0.3
-piedra caliza, arenisca	20684272 - 68947573	0.2-0.3
Caucho	689 - 4136	0.45-0.50
Acero	193053204 - 206842719	0.27-0.30
Madera		
- Pino	11031612 - 13100038	0.225
- Roble		
-Pino	11031612 - 12410563	0.225

- ❖ Dentro del plan de estudios de ingeniería civil conviene recomendar que se profundice el estudio del método de los elementos finitos ya que es un método muy útil y muy amplio para poder analizar diferentes tipos de estructuras. En la actualidad, la carrera solo contempla un semestre para el estudio de este método que se considera insuficiente por la amplitud del mismo y las aplicaciones en otros campos (electricidad, hidráulica, etc.)
- ❖ Por otra parte para abordar el método de los elementos finitos es necesario el estudio de otras materias tales como: métodos numéricos y resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales que podrán ser tomadas en cuenta en asignaturas de semestres previos; se debe profundizar en el análisis matricial.
- ❖ El presente trabajo solo significa un apronte preliminar a la solución de estructuras por el MEF. Por lo tanto es conveniente recomendar que se siga ampliando el presente trabajo que ya es fruto de dos personas (Daniel Farfán y Daniela Olivera) y que persiga la línea de investigación: EL CONOCIMIENTO DEL MEF CON FINES ACADÉMICOS.
- ❖ Con trabajos posteriores, los alumnos que deseen continuar pueden orientar sus estudios a figuras planas más complejas, que puedan ser el ser resultado de la conjunción de las figuras del programa por ejemplo:
 - a) 3 rectángulos juntos para formar un pórtico



b) Un rectángulo y 2 triángulos para formar una viga acartelada.



c) El post proceso, hacer dos o más materiales diferentes trabajen en conjunto, etc.