

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA “JUAN MISAEL SARACHO”

FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL

DEPARTAMENTO DE

ESTRUCTURAS Y CIENCIAS DE LOS MATERIALES



**“FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO BILINEAL
ISOPARAMÉTRICO, CON APLICACIONES EN PROBLEMAS DE
ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL”**

Por:

MARLENE SULMA QUIROGA ORTEGA

Semestre II 2018

TARIJA-BOLIVIA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA JUAN MISAEL SARACHO
FACULTAD DE CIENCIAS Y TECNOLOGÍA
CARRERA DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE
ESTRUCTURAS Y CIENCIAS DE LOS MATERIALES

**“FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO BILINEAL
ISOPARAMÉTRICO, CON APLICACIONES EN PROBLEMAS DE
ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL”**

Por:

MARLENE SULMA QUIROGA ORTEGA

Proyecto de Grado presentado a consideración de la “UNIVERSIDAD AUTÓNOMA JUAN MSAEL SARACHO”, como requisito para optar el grado académico de Licenciatura en Ingeniería Civil.

Semestre II 2018

TARIJA-BOLIVIA

VºBº

.....
Ing. Arturo Dubravcic A.

DOCENTE GUIA

.....
M.Sc. Ing. Ernesto R. Álvarez
Gozalvez

DECANO

**FACULTAD DE CIENCIA Y
TECNOLOGÍA**

.....
M.Sc. Lic. Elizabeth Castro
Figueroa.

VICEDECANA

**FACULTAD DE CIENCIA Y
TECNOLOGÍA**

TRIBUNAL:

.....
Ing. Oscar Chávez Vargas

.....
Ing. Lowrence Daniel Farfán Gómez.

.....
Ing. Juan Pablo Ayala Y.

El docente y tribunal calificador del presente trabajo, no se solidarizan con los términos, los modos y las expresiones vertidas en el mismo, siendo únicamente responsabilidad de la autora.

DEDICATORIA

El presente trabajo está dedicado a mis padres Delfor Quiroga Hoyos y Delfina Ortega Portal, a mi hermana, por estar siempre a mi lado incondicionalmente, por su apoyo, cariño y sus consejos en los momentos más difíciles

A las personas que estuvieron presente en este proceso por brindarme su amor y amistad en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por haber puesto en mi fe y sabiduría, lo que me fortaleció y me dio perseverancia para poder alcanzar mis objetivos propuestos.

A mi profesor Ing. Eduardo Daniel Farfán Duran por su apoyo, esfuerzo y por proporcionarme sus conocimientos en el desarrollo de este trabajo de investigación.

A los docentes que me transmitieron grandes conocimientos durante este proceso de formación académica.

PENSAMIENTO:

“El verdadero signo de la inteligencia no es el conocimiento, sino la imaginación.”

Albert Einstein

ÍNDICE

CAPITULO I

1. ANTECEDENTES	1
1.1. Problema.....	1
1.2. Objetivo	2
1.2.1. Objetivo General	2
1.2.2. Objetivo Específico.....	2
1.3. Justificación	3
1.3.1. Teórica.....	3
1.3.2. Metodológica	3
1.3.3. Práctica	3
1.4. Alcances	3
1.4.1. Planteamiento.....	3
1.4.2. Hipótesis	4
1.4.3. Alternativas	4
1.4.4. Resultados por lograr.	5

CAPITULO II

2. ESTADO DEL ARTE	6
2.1. Análisis Tensorial.....	6
2.1.1. Componentes de un tensor.....	6
2.1.2. Convenio de suma de Einstein.....	7
2.1.3. Notación indicial.....	7
2.1.4. Operaciones con Tensores.....	12

2.2.	Descripción del Esfuerzo.....	23
2.2.1.	Vector Tensión.	23
2.2.2.	Postulados de Cauchy.....	24
2.2.3.	Componentes del esfuerzo.....	25
2.2.4	Fórmula de Cauchy.	27
2.2.5	Simetría del tensor de esfuerzos.....	29
2.2.6	Componentes principales de esfuerzos y direcciones principales.....	32
2.3.	Descripción de la Deformación.....	37
2.3.1.	Tipos de descripción.....	37
2.3.2.	Definición del tensor de deformación.....	38
2.3.3.	Tensor de deformación en coordenadas cartesianas rectangulares.....	41
2.3.4.	Interpretación geométrica ϵ_{xx}	46
2.3.5.	Interpretación geométrica de ϵ_{xy} o γ_{xy}	48
2.3.6.	Gradiente de Deformación.....	49
2.3.7.	Relación entre tensores de Green y Almansi.	50
2.3.8.	Deformaciones principales ϵ_{ij}	50
2.4.	Ley Generalizada de Hooke.	53
2.4.1.	Constantes de Lamé.....	58
2.5.	Planteamiento del problema Elástico lineal	59
2.5.1.	Ecuaciones de equilibrio interno o ecuación de Cauchy..	59
2.5.2.	Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones infinitesimales..	62
2.5.3.	Ecuación de Navier.....	65
2.5.4.	Ecuación de Beltrami - Michell... ..	67
2.5.5.	Problemas de valores de borde.....	70

2.6.	Tensor constitutivo del sólido elástico.	72
2.6.1.	Ecuación constitutiva de elasticidad lineal.	72
2.6.2.	Tensor constitutivo elástico.	73
2.6.3.	Ecuación constitutiva de elasticidad lineal en notación de Voigt.	76
2.6.4.	Un plano de simetría elástica.	77
2.6.5.	Material elástico lineal ortótropo.	79
2.6.6.	Material elástico lineal isótropo.	80
2.6.7.	Ecuación constitutiva en notación de Voigt.	81
2.7.	Condición plana de esfuerzos y deformaciones.	83
2.7.1.	Condición plana de esfuerzos.	83
2.7.2.	Condición plana de Deformaciones.	85
2.8.	Métodos Energéticos.	88
2.8.1.	Energía de Deformación.	88
2.8.2.	Trabajo Virtual Externo.	92
2.8.3.	Método de la Energía Potencial Total.	94
2.9.	Cálculo variacional.	97
2.9.1.	Máximos y Mínimos.	97
2.9.2.	Definición de funcional.	97
2.9.3.	Condiciones de Borde.	103
2.10.	Integración numérica.	105
2.10.1.	Fórmulas de integración de Newton-Cotes cerradas.	106
2.10.2.	Fórmulas de Newton-Cotes abiertas.	110
2.10.3.	Fórmulas de Newton-Cotes Compuestas.	111
2.10.4.	Cuadratura de Gauss.	114

2.10.5.	Cuadratura de Gauss-Legendre.....	115
2.10.6	Integración numérica en dominios cuadriláteros.....	116
2.11.	Formulación del elemento finito isoparamétrico.....	118
2.11.1.	Hipótesis de discretización.....	118
2.11.2.	Matriz de funciones de forma.....	120
2.11.3.	Interpolación de coordenadas.....	121
2.11.4.	Matriz de operadores diferenciales.....	122
2.11.5.	Matriz de rigidez del solido elástico... ..	126
2.11.6.	Fuerzas de volumen.....	127
2.11.7.	Fuerzas de superficie.....	128
2.11.8.	Método de los elementos finitos aplicado a la teoría de la elasticidad partiendo de la teoría de los trabajos virtuales.....	129

CAPITULO III

3.	DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN	134
3.1.	Manual básico de Matlab.....	134
3.1.1.	Características básicas.....	134
3.1.1.1.	El espacio de trabajo de Matlab....	134
3.1.1.2.	Simbología matemática.....	136
3.1.2	Vectores y matrices.....	138
3.1.3	Operaciones relacionales y lógicas.....	143
3.1.4	La sentencia for.....	144
3.1.5	Gráficas.....	144
3.2	Estructura y manejo del programa.....	146
3.2.1.	Estructura del Preproceso.....	147

3.2.2	Estructura del Proceso.....	152
3.2.3	Estructura del Postproceso....	161
3.3.	Limitación y Campo de Aplicación del programa...	164
3.3.1.	Limitaciones del programa.....	164
3.3.2.	Campo de Aplicación del Programa.....	165

CAPITULO IV

4.	REQUISITOS PARA LA CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN	167
4.1.	Condición de equilibrio interno.....	167
4.2.	Condición de Continuidad.....	171
4.3.	Condición de Derivabilidad.....	171
4.4.	Condición de Integrabilidad... ..	172
4.5.	Criterios de la Parcela.....	173
4.5.1.	Condición de deformación constante.....	173
4.5.2.	Condición de sólido rígido (deformación nula).....	175

CAPITULO V

5.	EJERCICIOS DE APLICACIÓN	178
5.1.	Ejercicio de aplicación No 1.....	178
5.2.	Ejercicio de aplicación No 2.....	204
5.3.	Ejercicio de aplicación No 3.....	217

CAPITULO VI

6.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	231
6.1.	Conclusiones.....	231
6.2.	Recomendaciones.....	233

BIBLIOGRAFIA	235
ANEXOS	236

SIMBOLOGÍA

N°_{CT}	Número de componentes de un Vector.
P	Índices libres.
d	Dimensión o rango.
$x_i = x_1, x_2, x_3$	Sistema de Coordenadas.
a	Escalar
b_i	Vector
M_{ij}	Matriz
δ_{ij}	Delta de Kronecker o operador de sustitución.
ε_{ijk}	Símbolo de permutación.
e_i, e_j, e_k, e_n	Vectores base.
$i, j, k, l \dots, n$	Índices
\otimes	Producto tensorial o producto externo.
$: , \dots$	Producto doblemente contraído.
$f_{,i}$	Derivada de f respecto x_i
I_{ij}	Tensor identidad de segundo orden.
$\theta_1, \theta_2, \theta_3$	Sistema de coordenadas generales.
ds	Longitud en un sistema de coordenadas.
g_{km}	Componentes del tensor simétrico.
r, θ, z	Sistema de coordenadas cilíndricas.
S	Superficie.
S_u	Especifican los desplazamientos

S_σ	Especifican las tensiones superficiales
n	Vector normal al plano.
T_i^n	Vector Tensión.
σ_{ki}	Componente de esfuerzo.
k	Indica el plano donde actúa la fuerza.
i	Indica la componente de la fuerza.
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	Esfuerzos normales.
$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$	Esfuerzos tangenciales o de corte.
σ_{ij}	Tensor de esfuerzos.
dV	Diferencial de Volumen.
F_{V1}	Fuerzas por unidad de Volumen.
F_{S1}	Fuerza de Superficie.
n_1, n_2, n_3	Vector o cosenos directores.
n_j	Vector normal a la superficie.
σ_{ij}^T	Matriz transpuesta de componentes de esfuerzos.
I_1, I_2, I_3	Invariantes del tensor de esfuerzos.
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Esfuerzos principales.
n_1, n_2, n_3	Vectores principales.
a_{ij}	Tensor métrico para el sistema de coordenadas a_i .
E_{ij}	Tensor de deformación de Green.
e_{ij}	Tensor de deformación de Almansi.
ε_{ij}	Matriz de deformaciones infinitesimales.
γ_{xy}	Ángulo de rotación o deformación angular $\gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}$

ε_{xx}	Deformación longitudinal $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$.
F_{ij}	Gradiente de deformación.
F_{ij}^{-1}	Gradiente de deformación inverso
ε_j^n	Vector deformación.
G	Módulo de corte.
ν	Coefficiente de Poisson.
E	Módulo de elasticidad.
λ	Constante de Lamé.
X_i	Fuerza de Volumen.
Δ^2	Operador Laplaciano.
e	Divergencia.
θ	Esfuerzos normales
$\hat{u}_{\varepsilon_{ij}}$	Densidad de energía de deformación.
C_{ijkl}	Tensor Constitutivo Elástico.
C_{ijkl}^{-1}	Inversa del Tensor Constitutivo.
\dot{U}	Energía interna por unidad de tiempo.
P_{def}	Potencia deformativa.
Q	Calor.
P_{int}	Potencia interna.
V_i	Velocidad.
\dot{K}	Potencia cinética.
\dot{U}_o	Densidad de energía de deformación.

\overline{U}_0	Densidad de energía Complementaria.
U_0	Densidad de energía de deformación de las fuerzas internas.
SW_{virt}	Trabajo Virtual.
u_i	Campo de desplazamientos.
V	Energía potencial de las cargas externas.
Π	Energía total del sistema.
$\delta^{(1)}\Pi$	Principio de estacionalidad de la energía total.
I	Funcional
x	Variable independiente.
y, y'	Variable dependiente.
ε	Parámetro pequeño.
$\eta(x)$	Función diferenciable.
$f_n(x)$	Función de aproximación de $f(x)$.
$E_n(f)$	Error de aproximación.
$I(f)$	Funcional dado.
$I_n(f)$	Funcional de aproximación.
α_i	Coefficiente de Curvatura.
x_i	Nodos de Curvatura.
$K_{ij}^{(e)}$	Matriz de Rigidez.
ξ, η	Coordenadas naturales.
n_p, n_q	Número de puntos de integración.
W_p, W_q	Pesos correspondientes.

- $\Omega^{(e)}$ Dominio del elemento.
- $a^{(e)}\{u_1v_1, \dots, u_4v_4\}$ Vector de desplazamientos nodales.
- N_1, N_2, N_3, N_4 Funciones de forma.
- $[N]$ Matriz de funciones de forma.
- $\{u\}$ Vector de desplazamientos.
- $[B]$ Matriz de operadores diferenciales.
- $J^{(e)}$ Matriz Jacobiano.
- $l^{(e)}$ Contorno cargado del elemento.
- $f_{bi}^{(e)}$ Fuerzas de Volumen.
- $f_{si}^{(e)}$ Fuerzas de Superficie.
- $f^{(e)}$ Fuerza total en el elemento.
- σ Esfuerzo normal.
- τ Esfuerzo tangencial.
- β Ángulo que la tangente al contorno forma con el eje x.
- $\{\delta a\}^T$ Desplazamientos virtuales.
- $\{f\}$ Vector de fuerzas.