

Presentación del Proyecto

Actualmente los productos multimedia han cobrado mayor fuerza ya que cada vez son más usados como medio de aprendizaje. Estos permiten que una misma información se presente de múltiples maneras, tiene infinidad de usos, en diferentes áreas: en medicina, cultura, artes, educación y otros más.

Los estudiantes universitarios, están viviendo en una época donde las tecnologías están marcando un gran avance en el campo del proceso de enseñanza- aprendizaje.

Por esta razón el departamento de informática y sistemas creo el grupo de multimedia E.V.A, como iniciativa que pretende responder a las necesidades de los estudiantes en el proceso de enseñanza- aprendizaje, para dar uso a las aplicaciones y de las aulas TIC.

El desarrollo del proyecto E.V.A. incrementará el crecimiento de las ofertas académicas y servicios de la Facultad de Ciencias y Tecnología de la U.A.J.M.S. a través de los siguientes componentes:

Sistema Multimedia interactivo compuesto de imágenes, sonido, texto, video y animaciones con lo cual se pretende despertar el interés e incrementar la motivación de conocer el contenido de la información de la misma; así ofrecer un nuevo canal de difusión para la emisión de la información de forma más amigable.

Texto Guía de la Materia Calculo II que contempla todo el contenido estructurado en el programa docente, el mismo cuenta con imágenes ilustrativas y actividades por tema.

Por último la adaptación de elementos multimedia a la plataforma web MOODLE en donde los cursos se estructuran por temas, además de contemplar evaluaciones por unidades temáticas avanzadas.

El sistema reforzará los conceptos adquiridos en el aula a través de imágenes, texto, sonido, video y animaciones con el cual se pretende aumentar la motivación en el estudiante para aprender y obtener conocimiento de la materia.

De esta manera se cumplirá los propósitos de la Universidad Autónoma Juan Misael Saracho en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje.

Una vez terminado el desarrollo del proyecto se va a poner a disposición de la Facultad de Ciencias y Tecnología cada uno de los componentes de los que está compuesto este proyecto.

Geometría Analítica del Espacio

1. Espacio Vectorial de Dimensión Tres.[2]

1.1 Vectores linealmente dependientes

Varios vectores libres del plano se dice que son linealmente dependientes si hay una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero, sin que sean cero todos los coeficientes de la combinación lineal.

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Propiedades

- Si varios vectores son linealmente dependientes, entonces al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 = -\frac{a_2}{a_1} \vec{v}_2 - \frac{a_3}{a_1} \vec{v}_3$$

También se cumple el recíproco: si un vector es combinación lineal de otros, entonces todos los vectores son linealmente dependientes.

- Dos vectores son linealmente dependientes si, y sólo si, son paralelos.
- Dos vectores libres $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son linealmente dependientes si sus componentes son proporcionales.

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad (u_1, u_2, u_3) = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3} = k \quad ; \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

Ejemplo [3]

Determinar los valores de k para que sean linealmente dependientes

los vectores $\vec{u} = (3, k, -6)$, $\vec{v} = (-2, 1, k+3)$ y $\vec{w} = (1, k+2, 4)$.

Escribir $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$, siendo k el valor calculado.

Los vectores son linealmente dependientes si el determinante de la matriz que forman es nulo, es decir que el rango de la matriz es menor que 3.

$$\begin{vmatrix} 3 & k & -6 \\ -2 & 1 & k+3 \\ 1 & k+2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$12 + k^2 + 3k + 12k + 24 - (-6 - 8k + 3k^2 + 15k + 18) = 0$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0 \quad k = -2 \quad k = 6$$

$$(3, -2, -6) = a(-2, 1, 1) + b(1, 0, 4)$$

$$(3, -2, -6) = (-2a + b, a, a + 4b)$$

$$\begin{cases} 3 = -2a + b \\ -2 = a \\ -6 = a + 4b \end{cases} \quad a = -2 \quad b = -1$$

$$\vec{u} = -2\vec{v} - \vec{w}$$

1.1.1 Vectores linealmente independientes

Varios vectores libres son **linealmente independientes** si ninguno de ellos puede ser escrito con una **combinación lineal** de los restantes.

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Los vectores linealmente independientes tienen **distinta dirección** y sus componentes no son **proporcionales**.

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ejemplos[2]

1. Estudiar si son linealmente dependientes o independientes los vectores:

$$\vec{u} = (2, 3, 1), \vec{v} = (1, 0, 1), \vec{w} = (0, 3, -1)$$

$$a(2, 3, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 3, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + 3c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$r = 2 \quad n = 3 \quad \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

El sistema tiene infinitas soluciones, por tanto los vectores son linealmente dependientes.

2. Siendo $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 1)$, demostrar que dichos vectores son linealmente independientes y expresa el vector $\vec{m} = (1, 2, 3)$ como combinación lineal de dichos vectores.

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

$$a(1, 0, 1) + b(1, 1, 0) + c(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(a + b, b + c, a + c) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

El sistema admite únicamente la solución trivial:

$$a = 0 \quad b = 0 \quad c = 0$$

Por tanto, los tres vectores son linealmente independientes.

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

$$\vec{m} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

$$(1, 2, 3) = x(1, 0, 1) + y(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$(1, 2, 3) = (x + y, y + z, x + z)$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x + 2y + 2z &= 6 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

Sumamos miembro a miembro las tres ecuaciones y a la ecuación obtenida se le resta cada una de las ecuaciones.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{m} = \vec{u} + 2\vec{w}$$

Concepto (Espacio Vectorial de Dimensión tres)

El espacio generado por un sistema de vectores es el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores.

Si n vectores son independientes, generan el espacio de dimensión n (dimensión en el sentido usual: 0 para un punto, 1 para una recta, 2 para un plano...).

Ejemplo:

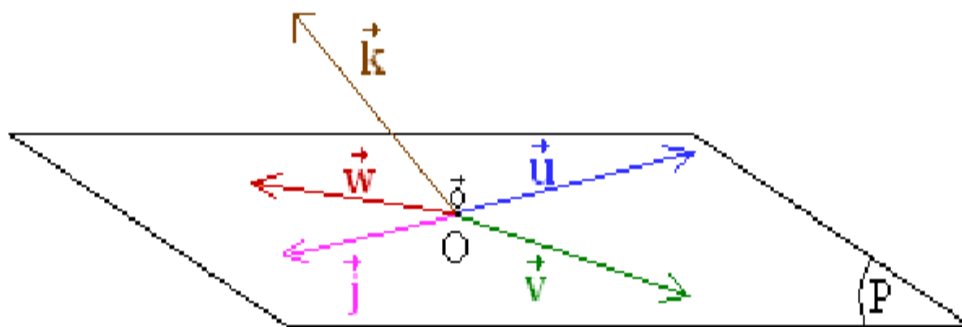


Figura 1

u y j son dependientes por tener la misma dirección (y sentidos opuestos).

u y v son independientes y definen el plano P .

u , v y w son dependientes por estar los tres contenidos en el mismo plano.

u y v y k son independientes por serlo u y v entre sí y no ser k una combinación lineal de ellos o, lo que es lo mismo, por no pertenecer al plano P . Los tres vectores definen el espacio tridimensional.

Los vectores o (vector nulo, cuyas componentes son iguales a cero) y k son dependientes ya que $o = 0 \cdot k$

1.1.2 Vectores en el Espacio Tridimensional. [3]

En un espacio vectorial E un vector u genera un espacio vectorial de dimensión 0 ó 1 , que es $u = \{\text{vectores proporcionales a } u\}$.

Ese espacio u tiene dimensión 0 cuando el vector u es nulo. Dos vectores u y v generan un espacio, u, v que puede tener dimensión 0 , 1 ó 2 dimensión de, u, v cómo son u y v

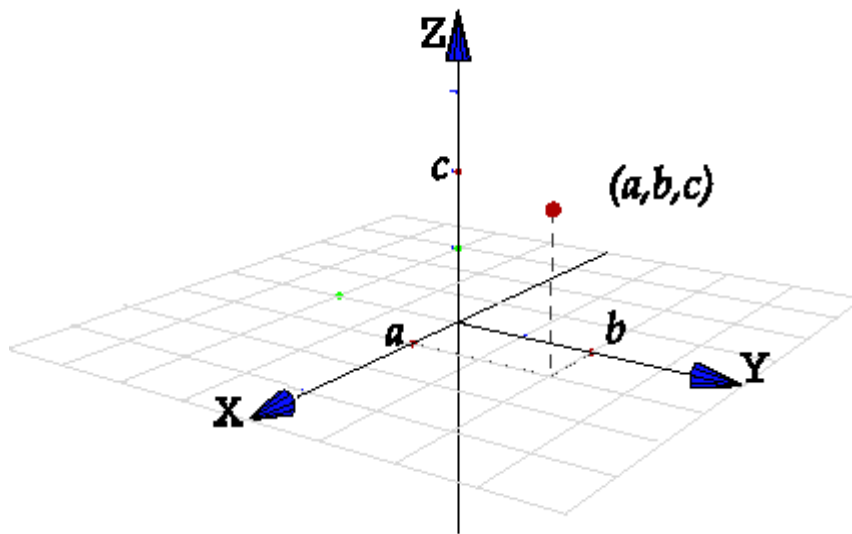
Dimensión	Subespacio de $\mathbb{R}^2$
0	si u y v son nulos los dos
1	si son no nulos y dependientes
2	si son independientes

El espacio $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3 y los únicos subespacios que puede contener deben tener dimensión 0, 1, 2 ó 3.

Dimensión	Subespacio de $\mathbb{R}^3$
0	$\{0\}$
1	rectas que pasan por el origen
2	planos que pasan por el origen
3	$\mathbb{R}^3$

Analógamente, los elementos $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ se asocian con puntos en el espacio tridimensional definido con tres rectas mutuamente perpendiculares. Estas rectas forman los ejes del sistema de coordenadas rectangulares (ejes X , Y y Z).

Figura 2



1.1.3 Paralelismo de Vectores. [3]

Dos vectores con la misma dirección (sus componentes son proporcionales) diremos que son paralelos, independientemente de que tengan igual o diferente sentido, o igual o diferente módulo.

Si consideramos dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con la misma dirección, por lo tanto paralelos, y los situamos con el mismo origen, vemos que podemos pasar de uno al otro multiplicando por un escalar: $\vec{a} = k \vec{b}$ o $\vec{b} = k' \vec{a}$.

Recíprocamente, si $\vec{a} = k \vec{b}$ o $\vec{b} = k' \vec{a}$, los dos vectores tienen la misma dirección y son paralelos. Por lo tanto, la condición de paralelismo de vectores es que se verifique:

$$\vec{a} = k \vec{b} \quad \text{o} \quad \vec{b} = k' \vec{a}$$

Es interesante darse cuenta de que los escalares k y k' son inversos uno del otro.

Si las componentes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son $\vec{a} = (a_1, a_2)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2)$,

Entonces la condición de paralelismo es: $(a_1, a_2) = k(b_1, b_2)$

Es decir

$$a_1 = kb_1$$

$$a_2 = kb_2$$

Aislando la k de las dos igualdades anteriores e igualando el resultado, se obtiene la condición de paralelismo de dos vectores:

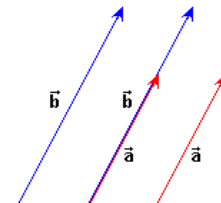


Figura 3

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

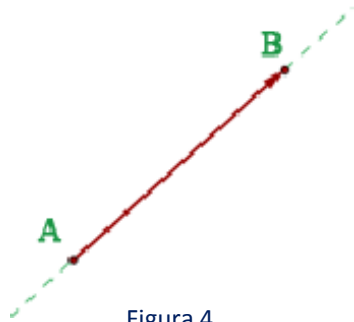


Figura 4

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$$

es decir, las componentes han de ser proporcionales.

1.1.4 Módulo ó Longitud de un Vector. [3]

El módulo del vector es la longitud del segmento AB, se representa por. $\overrightarrow{AB}$. El módulo de un vector es un número siempre

Positivo o cero Módulo de un vector a partir de sus componentes

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \quad |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$\vec{u} = (2, 4) \quad |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Ejemplo: si A= (3,-1,2)

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1 v_1 + \dots + v_n v_n}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 3^2 + (-1)^2 + 2^2 = 14 \geq 0$$

Módulo a partir de las coordenadas de los puntos La longitud de un vector es su norma (módulo). Por tanto, la distancia entre dos puntos A y B es la norma del vector

$$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2)$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \rightarrow \overrightarrow{AB} = B - A.$$

Ejemplo: si A= (1,1) y B= (-1,0)

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\| = \|(1,1) - (-1,0)\| = \|(2,1)\| = \sqrt{5}$$

1.1.5 Producto Interno ó Escalar de Vectores, Propiedades. [3]

El producto escalar de dos vectores se calcula multiplicando coordenada a coordenada y sumando.

Es decir un escalamiento de un vector, por un factor k , se logra multiplicando cada componente por el mismo número real k

Definición

Consideremos el vector $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ y el escalar $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$k \overrightarrow{v} = (k v_1, k v_2, \dots, k v_n)$$

Ejemplo 1

Sea $\overrightarrow{v} = (1; 3; 4)$ entonces $2x \overrightarrow{v} = (2; 6; 8)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}} \right)$$

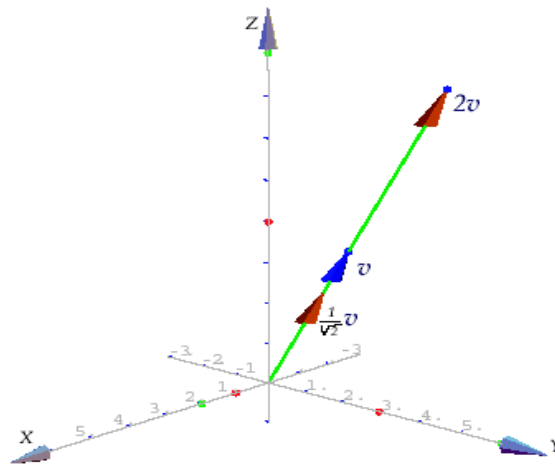


Figura 5

Teorema 1

Consideremos el vector $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\overrightarrow{v} \overrightarrow{w} \overrightarrow{u}$

$$1. \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$$

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

2. $\vec{v} + -\vec{v} = \vec{0}$
3. $0 \vec{v} = \vec{0}$
4. $1 \vec{v} = \vec{v}$
5. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
6. $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$
7. $\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$
8. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
9. $(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v})$

Ejemplo 2

- i:) $(1; 1; 3) + 5(2; 2; 3) + 2(0; 1; 2) = (1; 1; 3) + [5(2; 2; 3) + 2(0; 1; 2)]$
 $= (1; 1; 3) + (10; 12; 19)$
 $= (11; 13; 22)$
- ii:) $(1; 1; 3) + t(2; 2; 3) + s(0; 1; 2) = (1; 1; 3) + [t(2; 2; 3) + s(0; 1; 2)]$
 $= (1; 1; 3) + (2t; 2t + s; 3t + 2s)$
 $= (1+2t; 1 + 2t + s; 3 + 3t + 2s)$

1.1.6 Ortogonalidad ó Perpendicularidad de Vectores. [1]

Dos vectores distintos de cero a y b se llaman perpendiculares u ortogonales si y solamente si su producto escalar es nulo (si el ángulo entre ellos es: $\phi = \pi/2$)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\pi/2) = 0$$

Y de manera inversa si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ entonces $\phi = 0$ así que $\phi = \pi/2$. Se considera que el vector cero “0” es perpendicular a todos los vectores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{0}$$

Ejemplo

Muestre que $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ es perpendicular a $5\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

Solución se tiene puesto que

$$(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = 2(5) + 2(-4) + (-1)(2) = 0$$

Estos vectores son perpendiculares

1.1.7 Ángulo entre dos Vectores. [3]

A partir de la Ley de los cosenos podemos establecer una relación entre el producto punto, normas y ángulos, como se muestra a continuación.

Ley de los cosenos. Si a ; b y c son las longitudes de los lados de un triángulo arbitrario, se tiene la relación

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

Donde θ es el ángulo entre los lados de longitud a y b .

Para visualizar esta ley usando vectores, consideremos el triángulo determinado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, como se muestra en la figura.

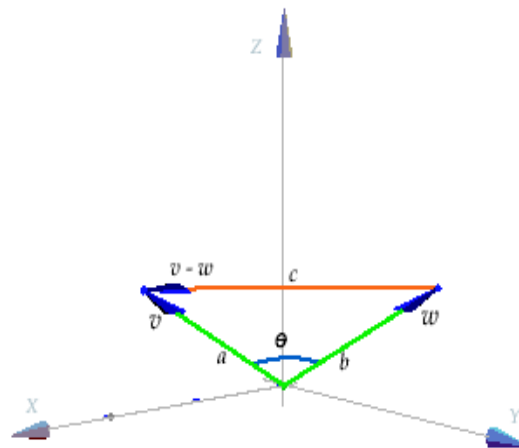


Figura 6

Entonces

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos \theta \quad (*)$$

Ahora, puesto que

$$\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w}$$

Entonces, despejando en (*) obtenemos

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos \theta$$

En el caso del $\mathbb{R}^n$, si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ son vectores no nulos, entonces usando la desigualdad de CauchySchwarz

1.1.8 El Producto Vectorial. [2]

El producto vectorial es una multiplicación entre vectores que da como resultado otro vector ortogonal a ambos. Dado que el resultado es otro vector, se define su módulo, dirección y sentido.

El módulo se calcula como el producto de los módulos de los vectores multiplicado por el seno del ángulo que los separa.

La dirección es sobre la recta ortogonal a ambos vectores, es decir que forma 90 grados con los mismos.

El sentido se calcula con la regla del tirabuzón, imaginando que gira por la recta ortogonal del origen entre uno y otro vector de tal forma que avance. Esto quiere decir que en el producto vectorial importa el orden en que se multiplican los vectores, ya que determina el sentido del vector resultado.

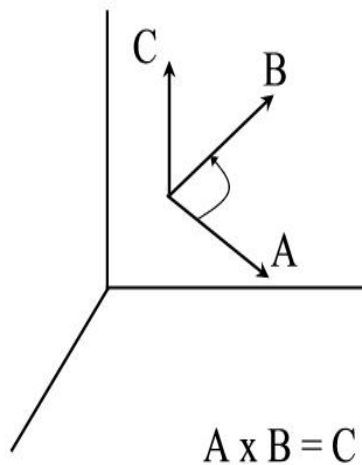
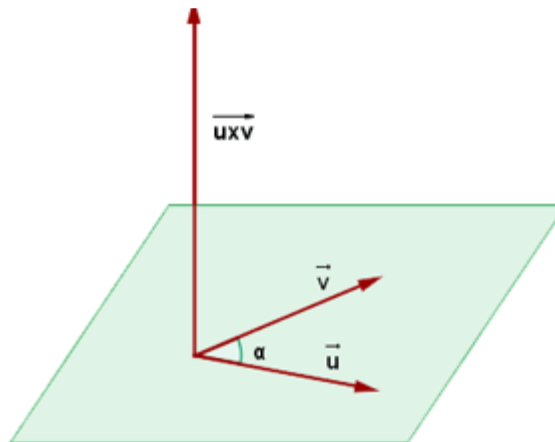


Figura 7



[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

El producto vectorial se puede expresar mediante un determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Ejemplos

Calcular el producto vectorial de los vectores

$$\vec{u} = (1, 2, 3) \text{ y } \vec{v} = (-1, 1, 2).$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= \vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

Dados los vectores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, hallar el **producto vectorial** de dichos vectores. Comprobar que el vector hallado es **ortogonal** a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u} \quad (-2, -2, 4) \cdot (3, -1, 1) = -6 + 2 + 4 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v} \quad (-2, -2, 4) \cdot (1, 1, 1) = -2 - 2 + 4 = 0$$

El producto vectorial de $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

1.1.8.1 Área del paralelogramo[3]

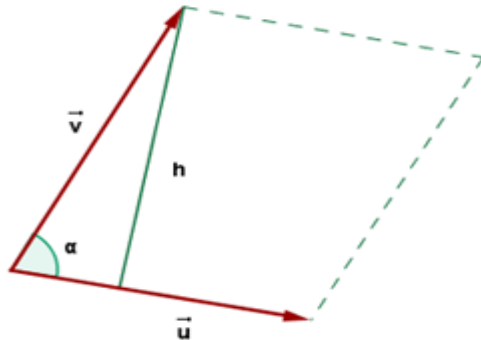


Figura 8

Geométricamente, el **módulo del producto vectorial** de dos vectores coincide con el **área del paralelogramo** que tiene por lados a esos vectores.

$$A = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| |\vec{v}| \sen \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

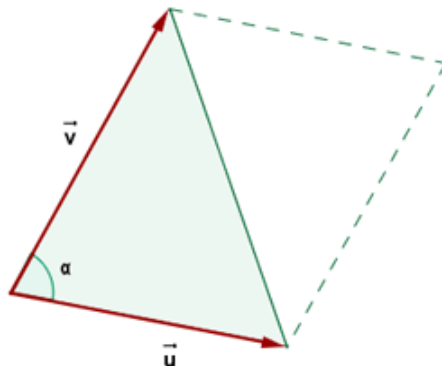
Ejemplo

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294} u^2$$

1.1.8.2 Área de un triángulo[3]



$$A = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}|$$

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

Ejemplo

Determinar el **área del triángulo** cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 3), B(2, -1, 5) y C(-3, 3, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2) \quad \overrightarrow{AC} = (-4, 2, -2)$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{w} = (0, -6, -6)$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ u}^2$$

1.1.8.3 Propiedades del producto vectorial[3]

- Anti conmutativa $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- Homogénea $\lambda (\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda \vec{v})$
- Distributiva $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- El producto vectorial de dos vectores paralelos es igual al vector nulo. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
- El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

1.1.8.4 El módulo de un vector [3]

El módulo de un vector representa su longitud. Se calcula como la raíz cuadrada de la suma de sus componentes elevadas al cuadrado.

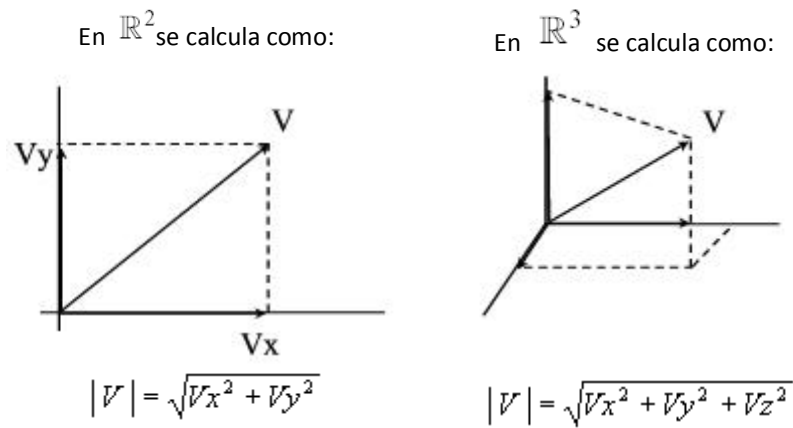


Figura 10

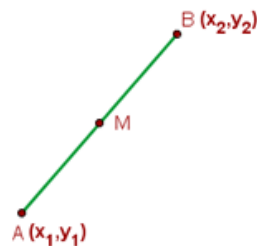
1.1.9 Aplicaciones de los Vectores. [3]

Los vectores nos ayudan a calcular los diferentes componentes en álgebra a encontrar como por ejemplo:

Distancia entre dos puntos

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Coordenadas del punto medio



$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Figura 11

Tres puntos alineados

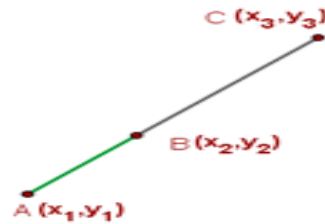


Figura 12

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

Simétrico de un punto



Figura 13

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$$

Coordenadas del baricentro

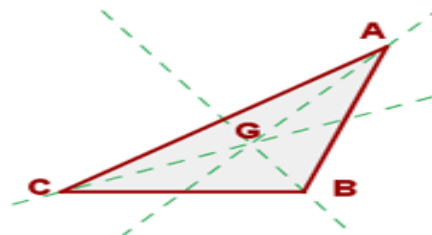


Figura 14

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

División de un segmento

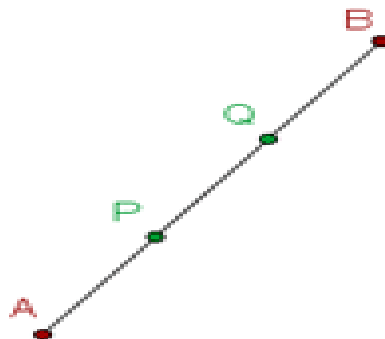


Figura 15

$$\frac{PA}{PB} = r$$

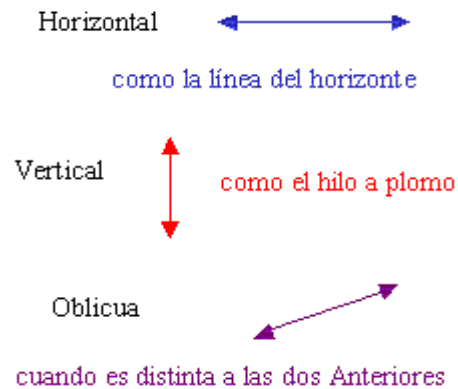
2. Rectas en el Espacio, Ángulos, Cosenos y Números Directores de una Recta. [3]

La unión de infinitos puntos, da origen al otro principio básico de la geometría: La Recta.

La representación más cercana de la recta es un hilo tenso o la marca que deja un lápiz en el papel. Es infinita, porque sus extremos son ilimitados y en ella hay infinitos puntos, la identificaremos con letras minúsculas.

Por ejemplo: A,b,c,m,n...

Una recta puede tener direcciones:



Recordemos que una recta en el plano queda determinada al especificar su pendiente y un punto por donde pasa. En $\mathcal{R}^3$, una recta queda determinada especificando su dirección y uno de sus puntos.

En efecto, sea $u=(a,b,c)$ un vector no nulo en $\mathcal{R}^3$, la dirección de la recta, llamado vector director de la recta; y sea un punto de la recta dado por $P_0=(x_0, y_0, z_0)$. Queremos encontrar la ecuación de la recta, es decir, la ecuación que satisfacen las coordenadas de un pu

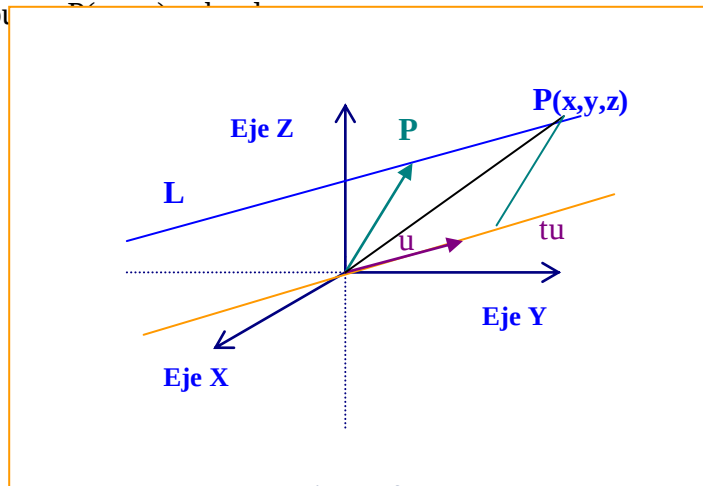


Figura 16

Cosenos directores

Las componentes de un vector unitario en una base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, son el coseno y el seno que forma con el vector $\vec{i}$ de la base.

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{sen} \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Estas expresiones se llaman cosenos directores de la recta, ya que la segunda puede escribirse como: $\text{sen } \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.

2.1.1. Ecuaciones de una Recta.

Ecuaciones de una Recta $\mathbb{R}^2$

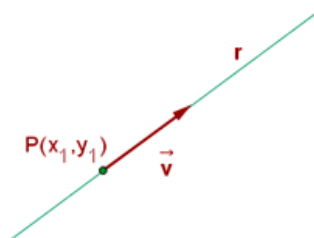


Figura 17

Definimos una recta r como el conjunto de los puntos del plano, alineados con un punto P y con una dirección dada $\vec{v}$.

Ecuación vectorial de la recta

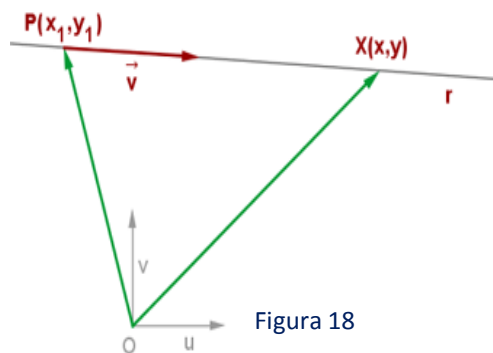


Figura 18

Si $P(x_1, y_1)$ es un punto de la recta r , el vector $\vec{PX}$ tiene igual dirección que $\vec{v}$, luego es igual a $\vec{v}$ multiplicado por un escalar:

$$\vec{PX} = k \cdot \vec{v} \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{PX} = \vec{OX} - \vec{OP} \quad \vec{OX} - \vec{OP} = k \cdot \vec{v}$$

$$\vec{OX} = \vec{OP} + k \cdot \vec{v}$$

$$(x, y) = (x_1, y_1) + k \cdot (v_1, v_2)$$

Ejemplos

Una recta pasa por el punto A(-1, 3) y tiene un vector director $\vec{v} = (2, 5)$. Escribir su ecuación vectorial.

$$(x, y) = (-1, 3) + k \cdot (2, 5)$$

Escribe la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(-2, 5).

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 1, 5 - 2) = (-3, 3)$$

$$(x, y) = (1, 2) + k \cdot (-3, 3)$$

Ecuaciones Paramétrica de la recta

Realizando las operaciones indicadas en la ecuación vectorial se obtiene:

$$(x, y) = (x_1, y_1) + k \cdot (v_1, v_2)$$

$$(x, y) = (x_1 + k \cdot v_1, y_1 + k \cdot v_2)$$

Igualando, obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases}$$

Ejemplos

Una recta pasa por el punto A(-1, 3) y tiene un vector director $\vec{v} = (2, 5)$. Escribir sus ecuaciones paramétricas.

$$\begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 3 + 5k \end{cases}$$

Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(-2, 5). $\overrightarrow{AB} = (-2 - 1, 5 - 2) = (-3, 3)$

$$\begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 2 + 3k \end{cases}$$

2.1.1.1. Ecuación continua de la recta[1]

Si despejamos el parámetro k de las ecuaciones paramétricas e igualamos, obtenemos la ecuación continua de la recta.

$$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases} \quad \begin{aligned} k &= \frac{x - x_1}{v_1} \\ k &= \frac{y - y_1}{v_2} \end{aligned}$$

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Ejemplos

Una recta pasa por el punto A (-1, 3) y tiene un vector director $\vec{v} = (2, 5)$. Escribir su ecuación continua.

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 3}{5}$$

Escribe la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos A (1, 2) y B(-2, 5).

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - 1, 5 - 2) = (-3, 3)$$

$$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 2}{3}$$

2.1.1.2. Ecuación punto-pendiente

Partimos de la ecuación continua la recta, quitamos denominadores y despejamos:

$$(x - x_1) \cdot v_2 = (y - y_1) \cdot v_1$$

$$y - y_1 = \frac{v_2}{v_1} (x - x_1)$$

Como

$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

Se obtiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplos

Calcular la ecuación de la recta que pasan por los puntos A(-2, -3) y B(4,2).

$$m = \frac{2+3}{4+2} = \frac{5}{6}$$

$$y + 3 = \frac{5}{6}(x + 2)$$

Calcular la ecuación de la recta que pasan por A(-2, -3) y tenga una inclinación de 45°.

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$y + 3 = x + 2$$

2.1.1.3. Ecuación general o implícita de la recta

Partimos de la ecuación continua la recta

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$$

Quitamos denominadores:

$$(x - x_1) \cdot v_2 = (y - y_1) \cdot v_1$$

$$v_2 x - v_2 x_1 = v_1 y - v_1 y_1$$

Trasponemos términos:

$$v_2 x - v_1 y + v_1 y_1 - v_2 x_1 = 0$$

Transformamos:

$$A = v_2$$

$$B = -v_1$$

$$C = v_1 y_1 - v_2 x_1$$

Y obtenemos la ecuación general de la recta.

$$Ax + By + C = 0$$

Las componentes del vector director son:

$$\vec{v} = (-B, A)$$

La pendiente de la recta es:

$$m = -\frac{A}{B}$$

Escribe la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(-2, 5).

$$\overrightarrow{AB} = (-2-1, 5-2) = (-3, 3) \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{3}$$

$$x + y - 3 = 0$$

Calcular la ecuación de la que pasa por A (1,5) y tiene como pendiente $m = -2$.

$$y - 5 = -2(x - 1) \quad y - 5 = -2x + 2$$

$$2x + y - 7 = 0$$

2.1.1.4. Ecuación de la recta en forma explícita

Si despejamos y en la ecuación general de la recta, se obtiene la ecuación explícita de la recta:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$y = mx + b$$

El coeficiente de la x es la pendiente, m .

El término independiente, b , se llama ordenada en el origen de una recta, siendo $(0, b)$ el punto de corte con el eje de ordenadas.

Calcular la ecuación en forma explícita de la recta que pasa por A (1,5) y tiene como pendiente $m=-2$.

$$y - 5 = -2(x - 1) \quad y - 5 = -2x + 2$$

$$y = -2x + 7$$

2.1.1.5. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Si los puntos A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2) determina una recta r, el vector director de la recta es:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$$

Cuyos componentes son:

$$v_1 = x_2 - x_1 \quad v_2 = y_2 - y_1$$

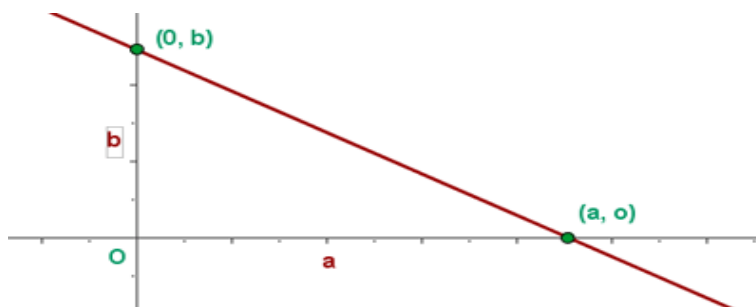
Sustituyendo estos valores en la ecuación continua, obtenemos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1, 2) y B(-2, 5) es:

$$\frac{x - 1}{-2 - 1} = \frac{y - 2}{5 - 2}$$

2.1.1.6. Ecuación canónica o segmentaria [3]



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Figura 19

Hallar la ecuación canónica de la recta que pasa por P(-2, 1) y tiene por vector director $v = (3, -4)$.

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 1}{-4}$$

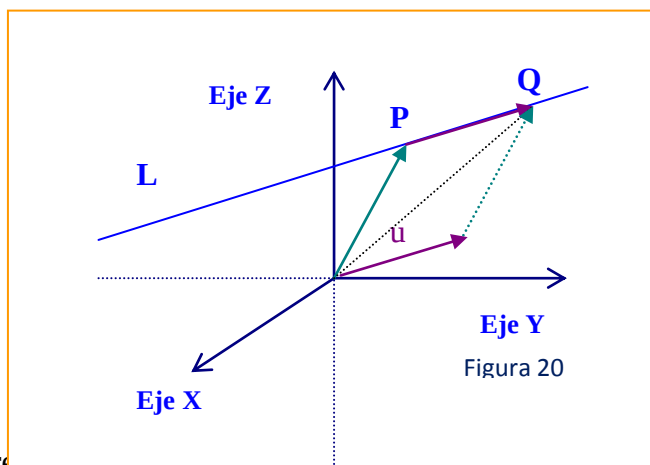
$$-4x - 8 = 3y - 3 \quad 4x + 3y + 5 = 0$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow x = -5/4 = a.$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = -5/3 = b.$$

$$\frac{x}{-\frac{5}{4}} + \frac{y}{-\frac{5}{3}} = 1$$

Ecuaciones de una Recta $\mathbb{R}^3$



La ecuación de la recta que pasa por $P = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector $u = (a, b, c)$ viene dada por las diferentes ecuaciones de la recta.

2.1.1.7. Actividades: [3]

Ejercicio N°1:

Encuentre la ecuación de la recta L que pasa por $P(1,2,-1)$ y es paralela al vector $u = (2,3,-2)$. ¿Está el punto $(2,1,2)$ sobre la recta L? ¿Está el vector $(3,5,-3)$ en la recta L?

(Ver solución)

Ejercicio N°2:

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(2,3,-4)$ y $Q(3,-2,5)$

(Ver solución)

Ejercicio N°3:

Encuentre la ecuación de la recta L que contiene a $(2,3,-2)$ y es paralela a la recta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-5}{2}$$

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

(Ver solución)

Ejercicio N°4:

Encuentre la intersección de las rectas

$$\begin{array}{ll} L_1: x = 1 + t & L_2: x = 17 + 3t \\ y = -3 + 2t & y = 4 + t \\ z = -2 - t & z = -8 - t \end{array}$$

(Ver solución)

Ejercicio N°5:

Encuentre la ecuación de la recta L que pasa por (-2,3,4) y es ortogonal a

$$\begin{array}{ll} L_1: x = 3 - 2t & L_2: x = -2 + 4t \\ y = 4 + 3t & y = 3 - 2t \\ z = -7 + 5t & z = 3 + t \end{array}$$

(Ver solución)

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

Solución1:

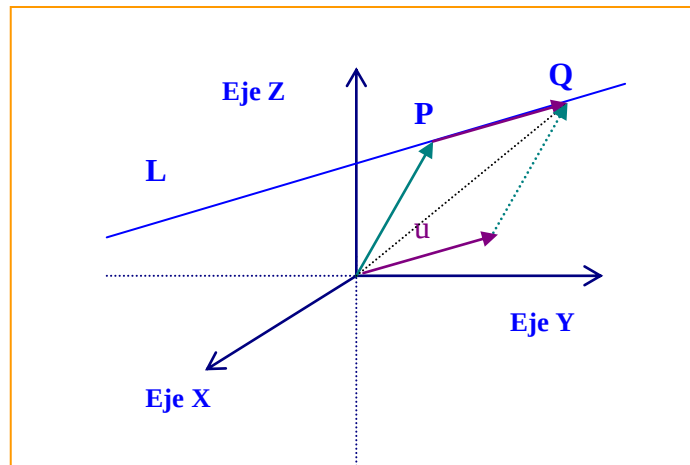
$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= -1 - 2t \text{ para } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$(2,1,3) \in L$ si al sustituir en las ecuaciones anteriores hay algún valor de t que las satisfaga.

$2 = 1 + 2t \Leftrightarrow t = 1/2$ pero para la coordenada y , $1 \neq 2 + 3(1/2)$. Por lo tanto el punto $(2,1,3) \notin L$.

Por otro lado, el punto $(3,5,-3) \in L$, ya que satisface las ecuaciones paramétricas de la recta para el valor del parámetro $t=1$. Sin embargo el vector $v=(3,5,-3)$ no está en L ya que para eso el origen también debería estar en L y no lo está

Solución2:



El vector director de la recta es $u = (3, -2, 5) - (2, 3, -4) = (1, -5, 9)$, de donde la ecuación de la recta viene dada por

$$x = 2 + t$$

$$y = 3 - 5t$$

$$z = -4 + 9t \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Solución3:

Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos, por lo tanto, podemos tomar como vector director de L el mismo vector director de la recta dada que es $(3, 6, 2)$ y así la ecuación de L es

$$x = 2 + 3t; \quad y = 3 + 6t; \quad z = -2 + 2t \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Solución4:

$$L_1: x = 1 + t \quad L_2: x = 17 + 3s$$

$$y = -3 + 2t \quad y = 4 + s$$

$$z = -2 - t \quad z = -8 - s$$

¿Hay valores de t, s para los cuales?

$$1 + t = 17 + 3s$$

$$-3 + 2t = 4 + s$$

$$-2 - t = -8 - s \quad ? \text{ Eso significaría que el sistema:}$$

$$t - 3s = 16$$

$$2t - s = 7$$

$-t + s = -6$ tiene solución. En efecto,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 16 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 16 \\ 0 & 5 & -25 \\ 0 & -2 & 10 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 16 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ de}$$

donde $t=1$, $s=-5$. Por lo tanto el punto de intersección es $(2, -1, -3)$

Solución5:

El vector director de L debe ser ortogonal a las rectas L_1 y L_2 . Por lo tanto debe ser ortogonal a sus vectores directores

$(-2, 3, 5)$ y $(4, -2, 1)$, es decir, el producto vectorial de los dos

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (13, 22, -8) \text{ y la ecuación buscada es}$$

$$L: x = -2 + 13t$$

$$y = 3 + 22t$$

$$z = 4 - 8t$$

2.1.2. Rectas Paralelas. [3]

Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos, es

decir, si éstos son linealmente dependientes.

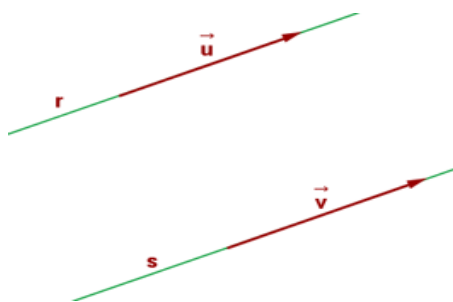


Figura 21

$$\vec{u} = K \cdot \vec{v}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Dos rectas son paralelas si tienen sus pendientes o vectores directores iguales.

$$m_r = m_s$$

Dos rectas son paralelas si los coeficientes de x e y respectivos son proporcionales.

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

Dos rectas son paralelas si forman un ángulo de 0° .

$$r \equiv Ax + By + C = 0 \qquad \vec{v}_r = \vec{v}_s = (-B, A)$$

$$r \parallel s$$

$$s \equiv Ax + By + k = 0 \quad k \in \mathbb{R} \qquad m_r = m_s = -\frac{A}{B} = \frac{v_2}{v_1}$$

Ejemplos

Calcula k para que las rectas $r \equiv x + 2y - 3 = 0$ y $s \equiv x - ky + 4 = 0$, sean paralelas.

$$m_r = -\frac{1}{2} \qquad m_s = \frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{k} \qquad k = -2$$

Calcular una recta paralela a $r \equiv x + 2y + 3 = 0$, que pasen por el punto $A(3,5)$.

$$m_r \parallel m_s$$

$$m_r = m_s = -\frac{1}{2}$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 3) \qquad 2y - 10 = -x + 3$$

$$x + 2y - 13 = 0$$

Hallar la ecuación de la recta paralela a $r \equiv 3x + 2y - 4 = 0$, que pasa por el punto $A(2, 3)$.

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + k = 0 \qquad k = -12$$

$$3x + 2y - 12 = 0$$

La recta $r \equiv 3x + ny - 7 = 0$ pasa por el punto $A(3,2)$ y es paralela a la recta $s \equiv mx + 2y - 13 = 0$. Calcula m y n .

$$A \in r$$

$$3 \cdot 3 + n \cdot 2 - 7 = 0$$

$$n = -1$$

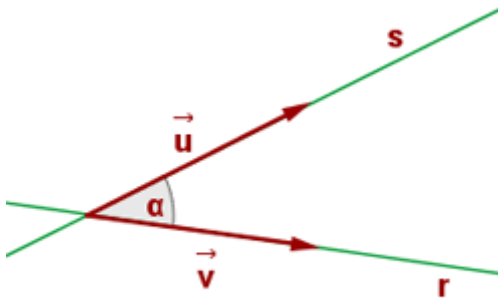
$$r \parallel s$$

$$\frac{3}{m} = \frac{-1}{2}$$

$$m = -6$$

2.1.3. Ángulo entre dos Rectas Perpendiculares. [3]

Ángulo entre dos rectas



Se llama ángulo entre dos rectas al menor de los ángulos que forman éstas. Se pueden obtener a partir de: Sus vectores directores

$$\cos \alpha = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Sus pendientes

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1} \right|$$

Hallar el ángulo que forman las rectas r y s, si sus vectores

directores son: $\vec{u} = (-2, 1)$ y $\vec{v} = (2, -3)$.

$$\cos \alpha = \frac{|(-2, 1) \cdot (2, -3)|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = \frac{|-7|}{\sqrt{65}} = 0.868$$

$$\alpha = 29^\circ 44'$$

Determina el ángulo que forman las rectas $r \equiv x + 3y - 2 = 0$ y $s \equiv 2x - 3y + 5 = 0$.

$$m_r = -\frac{1}{3}$$

$$m_s = \frac{2}{3}$$

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} \right| = 1.2857$$

$$\alpha = 52^{\circ} 8'$$

Dadas las rectas $r \equiv 3x + y - 1 = 0$ y $s \equiv 2x + my - 8 = 0$, determinar m para que formen un ángulo de 45° .

$$\alpha = 45^{\circ}$$

$$\cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{v}_r = (-1, 3)$$

$$\vec{v}_s = (-m, 2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-1 \cdot (-m) + 3 \cdot 2}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{m^2+4}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{m+6}{\sqrt{1+9} \cdot \sqrt{m^2+4}}\right)^2$$

$$\frac{36+12m+m^2}{10(4+m^2)} = \frac{1}{2}$$

$$m_1 = 4$$

$$m^2 - 2m - 4 = 0$$

$$m_2 = -1$$

Rectas perpendiculares [3]

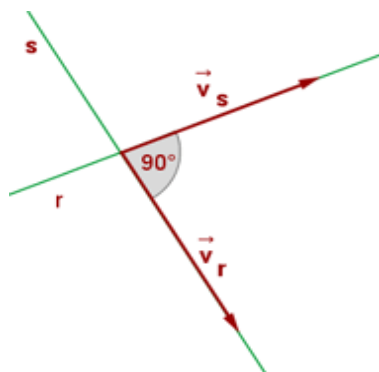


Figura 23

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son perpendiculares.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 0$$

Si dos rectas son perpendiculares tienen sus pendientes inversas y cambiadas de signo.

$$m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$r \equiv Ax + By + C = 0$$

$$\vec{v}_r = (-B, A)$$

$$r \perp s$$

$$s \equiv -Bx + Ay + k = 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v}_s = (A, B)$$

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

Ejemplos

Calcular una recta perpendicular a $r \equiv x + 2y + 3 = 0$, que pasen por el punto A(3,5).

$$m_r \perp m_s$$

$$m_r = -\frac{1}{2} \quad m_s = 2$$

$$y - 5 = 2 \cdot (x - 3)$$

$$2x - y - 1 = 0$$

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $r \equiv 3x - 2y - 1 = 0$, que pasa por el punto A(-2,3).

$$\vec{v} = (-2, -3)$$

$$\vec{n}_v = (3, -2)$$

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y+3}{2}$$

$$2x + 3y + 13 = 0$$

Sean las rectas $r \equiv 3x + 5y - 13 = 0$ y $s \equiv 4x - 3y + 2 = 0$. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de ellas y es perpendicular a la recta $t \equiv 5x - 8y + 12 = 0$

$$\begin{cases} 3x + 5y - 13 = 0 \\ 4x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$P(1, 2) \quad \vec{n}_t = (5, -8)$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{-8}$$

$$8x + 5y - 18 = 0$$

Calcula k para que las rectas $r \equiv x + 2y - 3 = 0$ y $s \equiv x - ky + 4 = 0$, sean perpendiculares.

$$m_r = -\frac{1}{2}$$

$$m_s = \frac{1}{k}$$

$$r \perp s$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{-\frac{1}{k}}$$

$$\frac{1}{2} = k$$

2.1.4. Distancia de un Punto a una Recta. [3]

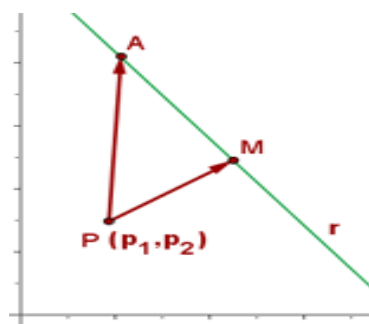


Figura 24

La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento perpendicular a la recta, trazada desde el punto.

$$d(P, r) = |\overline{PM}|$$

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Hallar la distancia del punto $P(2, -1)$ a la recta $r \equiv 3x + 4y = 0$.

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

2.1.4.1. Distancia al origen[1]

$$d(O, r) = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Hallar la distancia al origen de la recta $r \equiv 3x - 4y - 25 = 0$.

$$d(O, r) = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Una recta es paralela a la que tiene por ecuación $r \equiv 5x + 8y - 12 = 0$, y dista 6 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación?

$$r \parallel s$$

$$s \equiv 5x + 8y + D = 0$$

$$d(O, s) = 6 \quad \frac{D}{\sqrt{5^2 + 8^2}} = 6 \quad D = \pm 6\sqrt{89}$$

$$5x + 8y \pm 6\sqrt{89} = 0$$

Una recta es perpendicular a la que tiene por ecuación $r \equiv 5x - 7y + 12 = 0$ y dista 4 unidades del origen. ¿Cuál es su ecuación?

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

$$\begin{aligned}
 r &\perp s \\
 d(O, s) &= 4 & s &\equiv 7x + 5y + D = 0 \\
 \frac{D}{\sqrt{7^2 + 5^2}} &= 4 & D &= \pm 4\sqrt{74} \\
 7x + 5y \pm 4\sqrt{74} &= 0
 \end{aligned}$$

2.1.4.2.

Distancia entre rectas

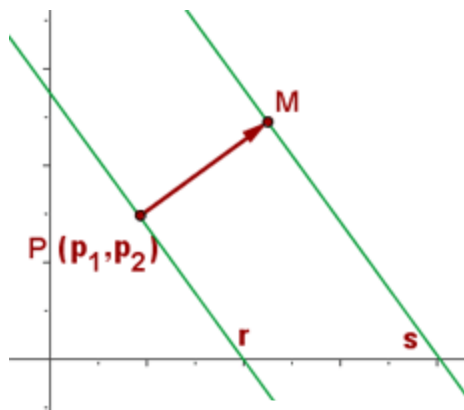


Figura 25

Para hallar la distancia entre dos rectas paralelas, se toma un punto cualquiera, P, de una de ellas y calcular su distancia a la otra recta.

$$d(r, s) = d(P, s)$$

Hallar la distancia entre las rectas: $r \equiv$

$$3x - 4y + 4 = 0 \text{ y } s \equiv 9x - 12y - 4 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{-4} &= \frac{9}{-12} & -36 &= -36 & r &\parallel s \\
 3 \cdot 0 - 4y + 4 &= 0 & y &= 1
 \end{aligned}$$

$$P(0, 1) \in r$$

$$d(P, s) = \frac{|9 \cdot 0 - 12 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{9^2 + 12^2}} = \frac{16}{15}$$

La distancia entre dos rectas también se puede expresar del siguiente modo:

$$d(r, s) = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Calcular la distancia entre las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 + k \end{cases}$$

$$r \equiv x + 3y - 5 = 0$$

$$s \equiv \frac{x+3}{-3} = \frac{y+5}{1}$$

$$s \equiv x + 3y + 18 = 0$$

$$d(r, s) = \frac{|18+5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{23}{\sqrt{10}}$$

3. Planos. [3]

Lo más parecido a este elemento del espacio es una hoja de papel, pero lo diferencia de ésta, el hecho que es ilimitado y no tiene grosor.

El plano es una superficie infinita, formada por infinitos puntos que siguen una misma dirección, es decir, hay rectas que quedan totalmente en ellas.

El plano se identifica con: letras griegas, letras mayúsculas, letras minúsculas y combinación de letras mayúsculas y minúsculas. Por ejemplo: a, b, ABC, ab, Mn...

Las paredes de nuestra casa, el pavimento de las calles, la superficie de una laguna, son representaciones de planos. Es importante saber que en un plano podemos encontrar puntos y rectas, y obtener figuras geométricas.

Hay planos: Horizontal, Vertical y oblicuos.

Una vez conocidas las ideas geométricas, las relacionaremos, para determinar aspectos que son muy importantes de analizar.

PUNTOS Y RECTAS: a) Vamos a determinar un punto en el espacio. ¿Cuántas rectas pueden pasar por él? ¿A cuántas rectas pertenece ese punto?

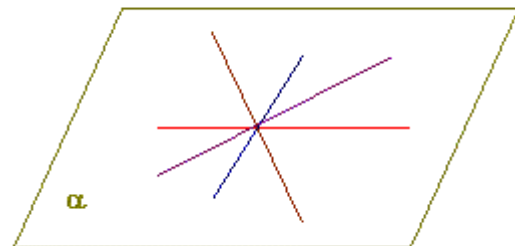
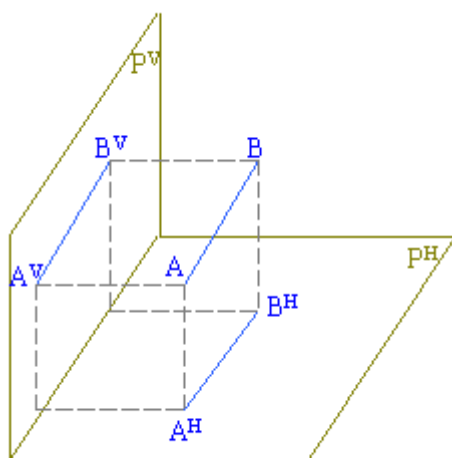


Figura26.- Puntos y Rectas



Como las rectas no tienen grosor, obtenemos un dato fundamental de la geometría “Por un punto del espacio pasan infinitas rectas”.

b) Ahora elegimos dos puntos del espacio. ¿Cuántas rectas unen a esos dos puntos?. Recordemos que ni puntos ni rectas tienen grosor. (Fig. 27)

Conclusión:

“Dos puntos del espacio determinan una sola recta”.

Fig.27.- Dos Puntos forman una Recta

Existen relaciones entre el plano, los puntos y las rectas que pueden llegar a producir interesantes resultados, cuyo análisis nos permite explicarnos varios aspectos de la realidad.

3.1.1. Ecuaciones de un Plano:

3.1.1.1. Ecuación vectorial del plano

Para determinar un plano del espacio se necesita conocer un punto P y un par de vectores que formen una base, es decir, que sean linealmente independientes.

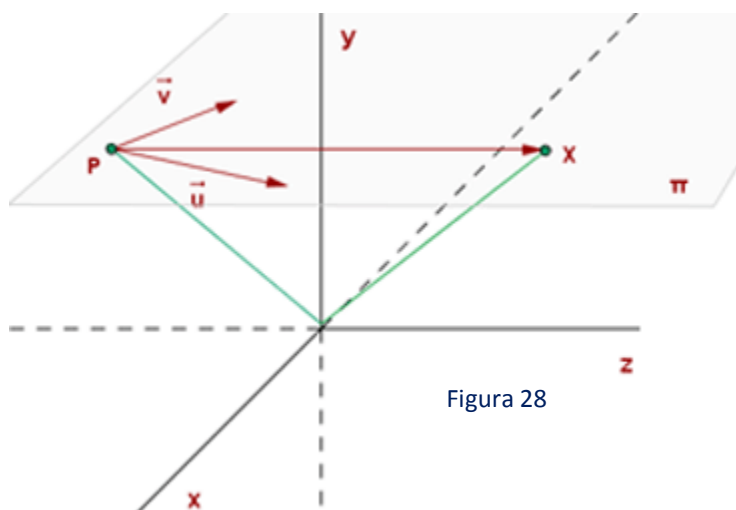


Figura 28

Para que el punto P pertenezca al plano π el vector $\overrightarrow{PX}$ tiene que ser coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir, que dependa linealmente de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

3.1.1.2. Ecuaciones Paramétricas del plano

Si operamos en la ecuación vectorial del plano llegamos a la igualdad:

$$(x, y, z) = (x_0 + u_1 \lambda + v_1 \mu, y_0 + u_2 \lambda + v_2 \mu, z_0 + u_3 \lambda + v_3 \mu)$$

Para que se verifique esta igualdad, se debe cumplir que:

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1 \lambda + v_1 \mu \\ y = y_0 + u_2 \lambda + v_2 \mu \\ z = z_0 + u_3 \lambda + v_3 \mu \end{cases}$$

3.1.1.3. Ecuación general o implícita del plano

Un punto está en el plano π si tiene solución el sistema:

$$x - x_0 = u_1 \lambda + v_1 \mu$$

$$y - y_0 = u_2 \lambda + v_2 \mu$$

$$z - z_0 = u_3 \lambda + v_3 \mu$$

Este sistema tiene que ser compatible determinado en las incógnitas λ y μ . Por tanto el determinante de la matriz ampliada del sistema con la columna de los términos independientes tiene que ser igual a cero.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante obtenemos:

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

Damos los valores:

$$A = \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad B = - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Sustituimos:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Realizamos las operaciones y le damos a D el valor:

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

Obtenemos la ecuación general de plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

3.1.1.4. Ecuación canónica o segmentaria del plano

Sean los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ y $C(0, 0, c)$, la ecuación canónica viene dada por:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad a = \frac{-D}{A} \quad b = \frac{-D}{B} \quad c = \frac{-D}{C}$$

Ejercicios

1. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por el punto $A(1, 1, 1)$ y tiene como vectores directores a

$$\vec{u} = (1, -1, 1) \text{ y } \vec{v} = (2, 3, -1).$$

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 - \lambda + 3\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-1 & -1 & 3 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x + 3y + 5z - 6 = 0$$

2. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por los puntos A(-1, 2, 3) y B(3, 1, 4) y contiene al vector

$$\vec{u} = (0, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (3+1, 1-2, 4-3) = (4, -1, 1)$$

$$\begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda + \mu \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 4 & 0 \\ y-2 & -1 & 0 \\ z-3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x - 4y + 7 = 0$$

3. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano que pasa por los puntos A (-1, 1, -1), B(0, 1, 1) y C(4, -3, 2).

$$\overrightarrow{AB} = (0+1, 1-1, 1+1) = (1, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4+1, -3-1, 2+1) = (5, -4, 3)$$

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda + 5\mu \\ y = 1 - 4\mu \\ z = -1 + 2\lambda + 3\mu \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 5 \\ y-1 & 0 & -4 \\ z+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8x + 7y - 4z - 3 = 0$$

4. Sea π el plano de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + 2\mu \\ z = 4\lambda - 3\mu \end{cases}$$

Se pide comprobar si los puntos A (2, 1, 9/2) y B(0, 9, -1) pertenecen al plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z & 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -5x + 7y + 3z - 9 = 0$$

$$-5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{9}{2} - 9 \neq 0 \quad A \notin \pi$$

$$-5 \cdot 0 + 7 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) - 9 \neq 0 \quad B \notin \pi$$

5. Hallar la ecuación segmentaria del plano que pasa por los puntos A(1, 1, 0), B(1, 0, 1) y C(0, 1, 1).

$$\overrightarrow{AB} = (1-1, 0-1, 1-0) = (0, -1, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 1-1, 1-0) = (-1, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad -x - y - z + 2 = 0$$

Dividiendo por -2 obtenemos la ecuación segmentaria:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$$

6. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2, 0, 1) y contiene a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$

De la ecuación de la recta obtenemos el punto B y el vector $\vec{u}$.

$$B(1, -3, 0) \quad \overrightarrow{AB} = (1-2, -3-0, 0-1) = (-1, -3, -1)$$

$$A(2, 0, 1) \quad \vec{u} = (2, 1, -1) \quad \overrightarrow{AB} = (-1, -3, -1)$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -1 \\ y & 1 & -3 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad 4x - 3y + 5z - 13 = 0$$

7. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1, -2, 4), B(0, 3, 2) y es paralelo a la recta:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

$$A(1, -2, 4) \quad \overrightarrow{AB} = (-1, 5, -2) \quad \vec{u} = (4, 1, 2)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 4 \\ y+2 & 5 & 1 \\ z-4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad 4x - 2y - 7z + 20 = 0$$

8. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$$

Determinar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s .

$$A(-2, 1, -1) \qquad \vec{u} = (3, 2, -1) \qquad \vec{v} = (-2, -2, 3)$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & 3 & -2 \\ y-1 & 2 & -2 \\ z+1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad 4x - 7y - 2z + 13 = 0$$

3.1.2. Planos Paralelos e Intersección de Planos.

El paralelismo entre planos se determinará al comprobar el paralelismo de al menos, dos direcciones distintas de rectas contenidas en dichos planos. Además para que sean paralelos dos planos deben ser paralelas sus proyecciones

EN ACOTADOS DOS PLANOS SERÁN PARALELOS SI Y SÓLO SI LO SON SUS RECTAS DE MÁXIMA PENDIENTE

3.1.2.1. Paralelismo entre plano dado por sus trazas:

En este caso como el plano está definido por sus trazas, el nuevo plano será dado por las rectas características de las trazas (frontales y horizontales).

Ejemplo:

Dado el plano definido por sus trazas y el punto “C”, por “C” trazar un plano paralelo al plano VH.

Solución:

Por el punto “C” se trazan las rectas características paralelas al plano original VH (Fig. 30):

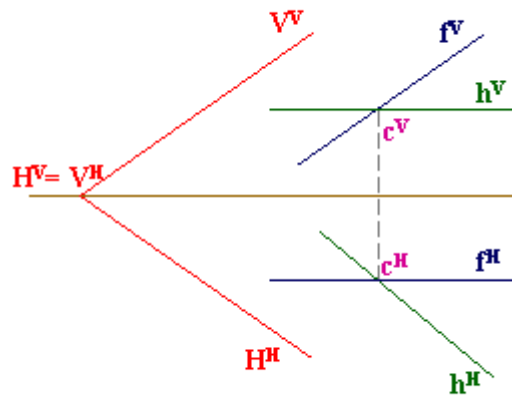


Fig. 30- Paralelismo entre Plano dado por sus Trazas

3.1.3. Distancia de un Punto a un Plano.

La distancia de un punto, P , a un plano, π , es la menor de la distancia desde el punto a los infinitos puntos del plano.

Esta distancia corresponde a la perpendicular trazada desde el punto al plano.

$$P(x_0, y_0, z_0) \quad \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

Hallar la distancia del punto $P(3, 1, -2)$ a los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2y - 3 = 0$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}$$

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

Hallar la distancia del punto $Q(5, 5, 3)$ al plano

$$\pi \equiv (x, y, z) = (0, 0, -4) + (2, 2, -1)\lambda + (-3, 2, 0)\mu.$$

$$\begin{vmatrix} x & 2 & -3 \\ y & 2 & 2 \\ z+4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad 2x + 3y + 10z + 40 = 0$$

$$d(Q, \pi) = \frac{|5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 40|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 10^2}} = \frac{95}{\sqrt{113}}$$

3.1.3.1. Distancia entre planos paralelos

Para calcular la distancia entre dos planos paralelos, se halla la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

También se puede calcular de esta otra forma:

$$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \quad \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

Calcular la distancia entre los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - 2z + 5 = 0$ y

$$\pi_2 \equiv 4x - 2y - 4z + 15 = 0.$$

$$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{5}{15}$$

Los dos planos son paralelos.

Transformamos la ecuación del segundo plano para que los dos planos tengan el mismo vector normal.

$$\pi_2 \equiv 2x - y - 2z + \frac{15}{2} = 0$$

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\left| \frac{15}{2} - 5 \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{6}$$

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

3.1.4. Ángulo entre dos Planos.

El ángulo que forma una recta con un plano es el que forma la recta con su proyección sobre dicho plano. Para determinar la proyección de una recta sobre un plano cualquiera, distinto a los de proyección, trazamos por un punto de la recta una perpendicular al plano y hallamos su intersección con él.

Uniendo este punto con el punto “I” de intersección de la recta dada con el plano también dado, obtenemos la proyección de “r” sobre “P” (Fig. 31):

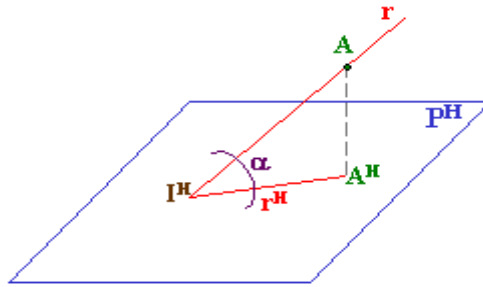


Fig. 31.- Ángulos

3.1.4.1. Ángulo entre planos:

Ejemplo:

Dado el plano definido por sus trazas “VH” y el plano definido por (V’H’), determinar el ángulo entre los planos.

Solución:

- 1.- Se toma un punto arbitrario “P” y se traza una recta “n” perpendicular al plano “VH”.
- 2.- Se traza una recta “s” perpendicular al plano “H” que pase por “P”.
- 3.- El ángulo que forman las rectas “n” y “s” es igual al ángulo entre los planos (Fig. 32):

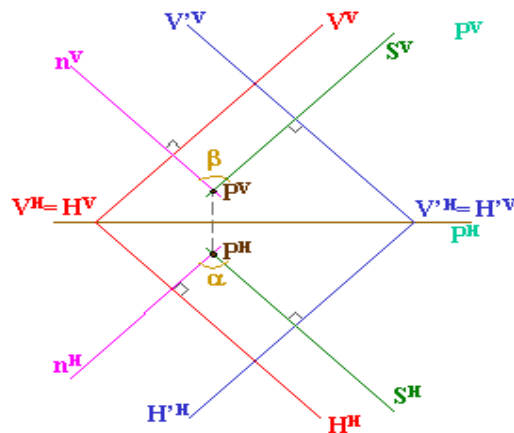


Fig. 32.- Ángulo entre Planos

3.1.5. Ángulo entre Recta y Plano.

Angulo de dos planos

Se entiende por ángulo a formado por dos planos el que forman vectores característicos de ellos v y w , en el caso de que $(v, w) \leq 90^\circ$, o bien $180^\circ - (v, w)$, si $(v, w) > 90^\circ$.

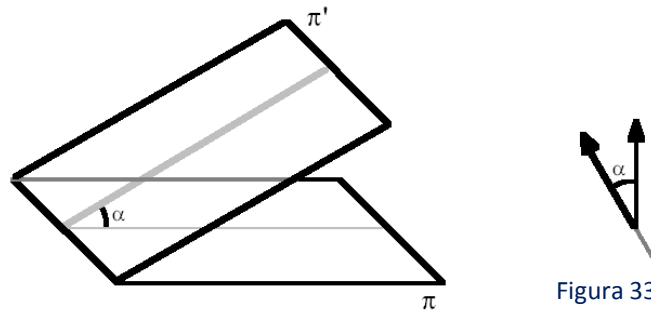


Figura 33

El hecho de que, tanto en un caso como en otro, se tenga $\cos \alpha = |\cos (v, w)|$, nos permitirá concluir que si los planos tienen por ecuaciones:

$$\begin{aligned}\pi: A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 &= 0 \\ \pi': A'_1 x_1 + A'_2 x_2 + A'_3 x_3 + A'_4 &= 0\end{aligned}$$

Entonces:

$$\cos \alpha = \frac{|A_1 A'_1 + A_2 A'_2 + A_3 A'_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} \sqrt{A'^2_1 + A'^2_2 + A'^2_3}}$$

Observa que de lo anterior se desprende que una condición necesaria y suficiente para que los dos planos sean perpendiculares es: $A_1 A'_1 + A_2 A'_2 + A_3 A'_3 = 0$.

Ejemplo:

Dado el plano definido por sus trazas y la recta “b”, determinar el ángulo entre la recta y el plano “VH”.

Solución:

- 1.- Se determina la intersección “I” de la recta “r” con el plano.
- 2.- Se toma un punto cualquiera “D” sobre la recta y se traza una recta “e” perpendicular al plano y que pase por el punto “D”.
- 3.- Se busca el punto de intersección “E” de la recta “e” con el plano “VH”.
- 4.- El ángulo buscado es el que forma la recta “ID” con la recta “IE” (ángulo entre las rectas) (Fig. 34):

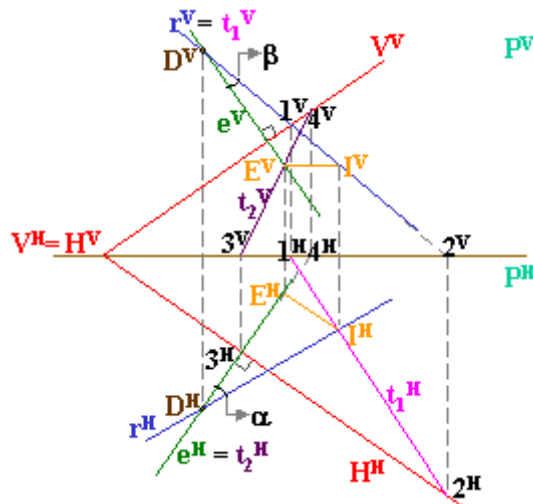


Fig. 34.- Ángulo entre Recta y Plano

3.1.6. Distancia Mínima entre Rectas.

3.1.6.1. Distancia entre dos puntos:

La distancia entre dos puntos se determina por el verdadero tamaño del segmento que ellas forman (Fig. 35):

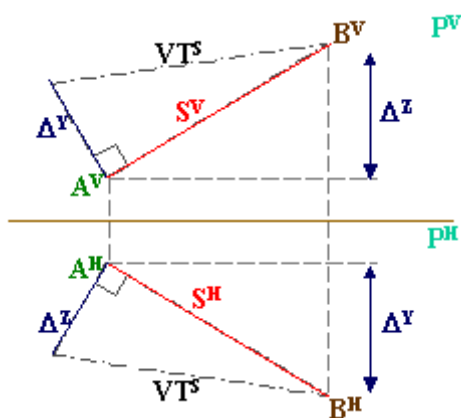


Fig. 35.- Distancia entre Dos Puntos

3.1.6.2. Distancia entre un punto y un plano:

La distancia entre un punto y un plano está definida por el segmento perpendicular (AI), comprendido entre el punto "A" y la intersección "I", de la recta con el plano (Fig. 36):

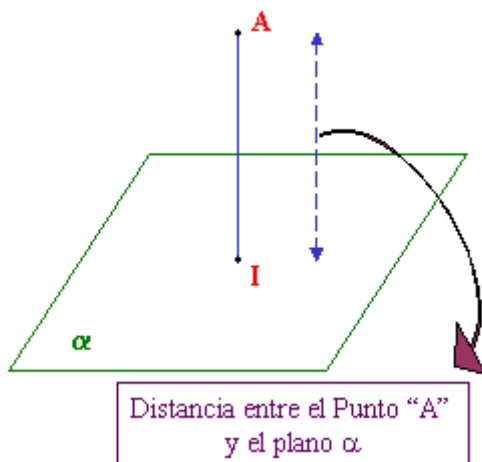


Fig.36- Distancia entre un Punto y un Pano

Ejemplo:

Dado el plano definido por sus trazas “VH” y el punto “E”, determinar la distancia del punto al plano.

Solución:

- 1.- Por el punto “E”, se traza una recta “z” perpendicular al plano “VH”.
- 2.- Se busca la Intersección “I” entre la recta y el plano.
- 3.- El verdadero tamaño de “EI”, será la distancia del punto “E” al plano “VH” (Fig. 37):

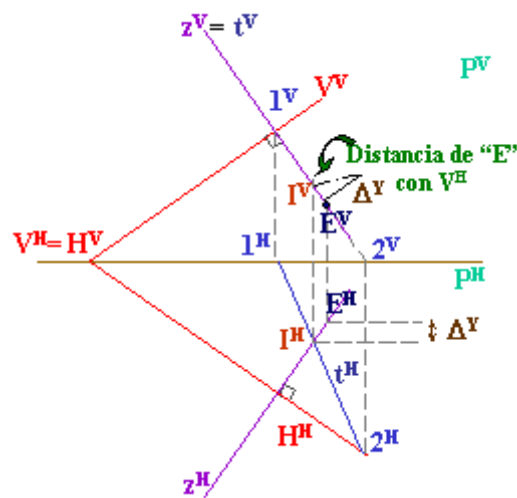


Fig. 37.- Distancia de un Punto a un Plano

3.1.6.3. Distancia entre dos planos paralelos:

Ejemplo:

Dado los planos definidos por sus trazas “VH, □ □”, determinar la distancia entre los planos.

Solución:

- 1.- Se traza una recta cualquiera “d” que sea perpendicular a ambos planos.
- 2.- Se busca las intersecciones (I₁-I₂) de la recta con el plano.
- 3.- La distancia será el verdadero tamaño del segmento (I₁-I₂) (Fig. 38):

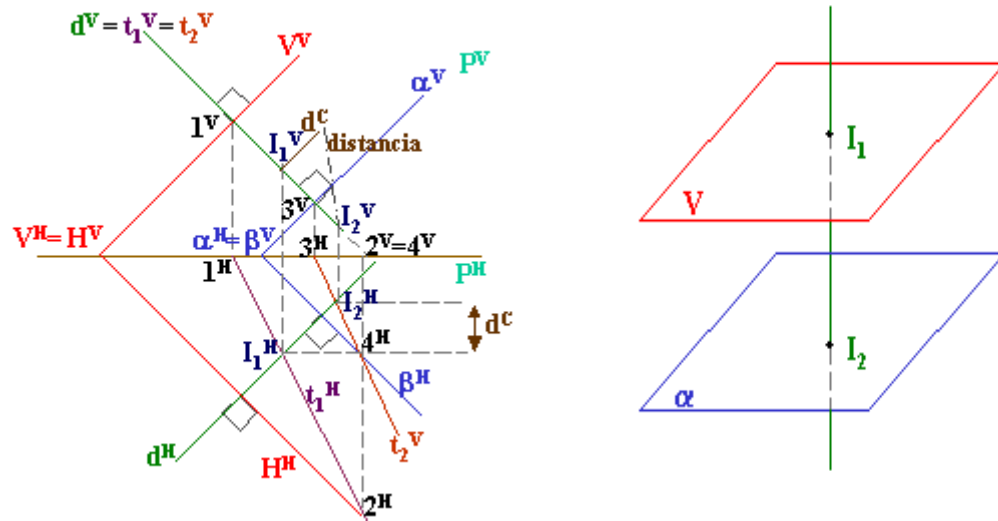
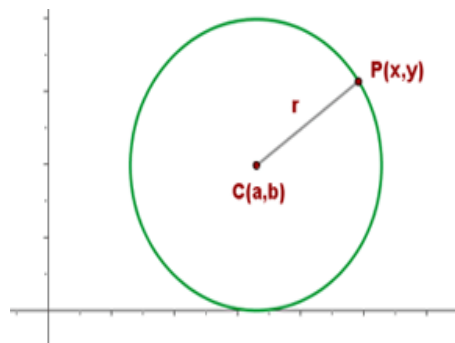


Fig. 38.- Distancia entre dos Planos Paralelos

4. Esfera. [3]



Figura

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

$$d(C, P) = r$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Si desarrollamos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

y realizamos estos cambios:

$$A = -2a \quad B = -2b \quad C = a^2 + b^2 - r^2$$

Obtenemos otra forma de escribir la ecuación:

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Donde el centro es:

$$C\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

y el radio cumple la relación:

$$r^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$$

Para que una expresión del tipo: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ sea una circunferencia debe cumplir que:

Los coeficientes de x^2 e y^2 sean iguales a la unidad. Si tuvieran ambos un mismo coeficiente distinto de 1, podríamos dividir por él todos los términos de la ecuación.

No tenga término en xy .

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C > 0$$

4.2. Ecuación reducida de la circunferencia

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas la ecuación queda reducida a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejercicios

Escribir la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 2.

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

Dada la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$, hallar el centro y el radio.

[1]: Profesores de Matemáticas C.E.I. de C.ceres Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado Cartes)

[2]: CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

[3]: <http://es.wikipedia.org/>

$$-2 = -2a \quad a = 1$$

$$C(1, -2)$$

$$4 = -2b \quad b = -2$$

$$C = a^2 + b^2 - r^2 \quad -4 = 1 + 4 - r^2 \quad r = 3$$

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(2,0), B(2,3), C(1, 3).

Si sustituimos x e y en la ecuación $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ por las coordenadas de los puntos se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 4 + 0 + 2A + 0 + C = 0 \\ 4 + 9 + 2A + 3B + C = 0 \\ 1 + 9 + A + 3B + C = 0 \end{cases}$$

$$A = -3$$

$$B = -3$$

$$C = 2$$

$$x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$$

Indicar si la ecuación: $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$, corresponde a una circunferencia, y en caso afirmativo, calcular el centro y el radio.

1. Como los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos a la unidad, dividimos por 4:

$$x^2 + y^2 - x - 2y - \frac{11}{4} = 0$$

2. No tiene término en xy.

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 - \left(-\frac{11}{4}\right) > 0$$

Es una circunferencia, ya que se cumplen las tres condiciones.

$$-1 = -2a \quad a = \frac{1}{2}$$

$$C\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$-2 = -2b \quad b = 1$$

$$-\frac{11}{4} = \frac{1}{4} + 1 - r^2 \quad r = 2$$

4.3. Actividades

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(2, -3)$ y es tangente al eje de abscisas.

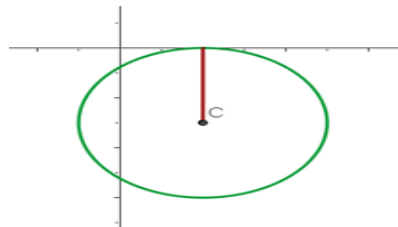


Figura 40

$$\begin{aligned} C(2, -3) \quad s &\equiv y = 0 \\ r = d(C, s) &= 3 \\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 &= 3^2 \end{aligned}$$

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en $(-1, 4)$ y es tangente al eje de ordenadas.

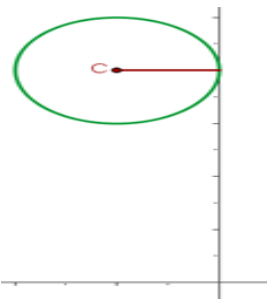


Figura 41

$$\begin{aligned} C(-1, 4) \quad s &\equiv x = 0 \\ r = d(C, s) &= 1 \\ (x + 1)^2 + (y - 4)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $x + 3y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$, y su radio es igual a 5.

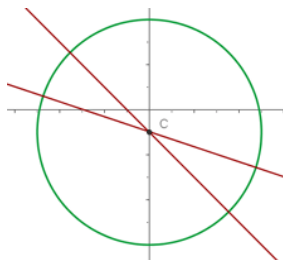


Figura 42

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad C(0, -1) \\ A = -2 \cdot 0 = 0 \quad B = -2 \cdot (-1) = 2 \\ C = 0^2 + (-1)^2 - 5^2 \quad C = -24 \\ x^2 + y^2 + 2y - 24 = 0 \end{aligned}$$

Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica con la ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, y que pasa por el punto $(-3, 4)$.

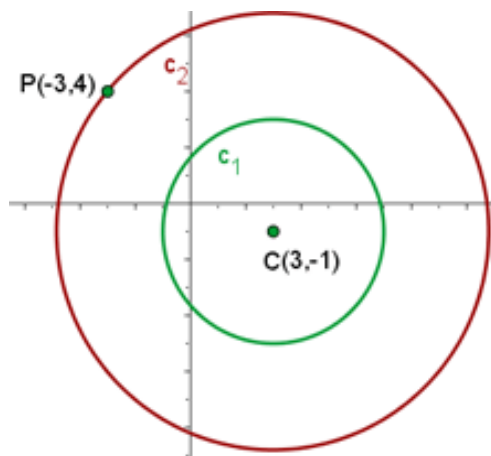


Figura 43

Por ser concéntricas tienen el mismo centro.

$$-6 = -2a \quad a = 3$$

$$2 = -2b \quad b = -1$$

$$C(3, -1) \quad P(-3, 4)$$

$$r = d(P, C) = \sqrt{(3+3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{61}$$

$$A = -6 \quad B = 2$$

$$C = 3^2 + (-1)^2 - (\sqrt{61})^2 = -51$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 51 = 0$$

Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-5, 3)$ y $B(3, 1)$. ¿Cuál es la ecuación de esta circunferencia?

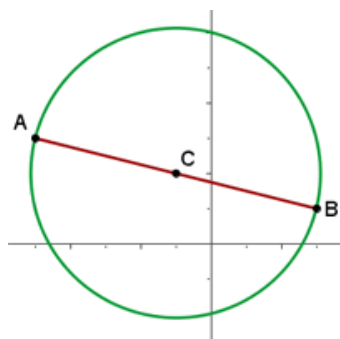


Figura 44

$$r = \frac{1}{2} d(A, B) = \frac{1}{2} \sqrt{(3+5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{17}$$

$$C = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{3+1}{2} \right) = (-1, 2)$$

$$A = -2 \cdot (-1) = 2 \quad B = -2 \cdot 2 = -4$$

$$C = (-1)^2 + 2^2 - (\sqrt{17})^2 = -12$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 12 = 0$$

Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

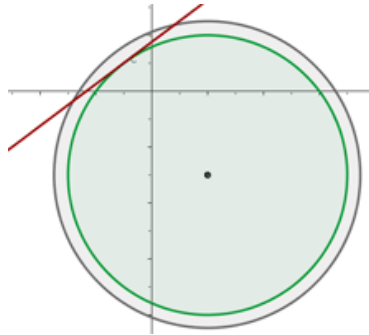


Figura 45

$$\begin{aligned}
 -4 &= -2a & a &= 2 \\
 6 &= -2b & b &= -3 \\
 r &= d(C, s) = \frac{2 \cdot 3 - 4(-3) + 7}{\sqrt{9 + 16}} = 5 \\
 A &= -4 & B &= 6 & C &= 4 + 9 - 25 = -12 \\
 & & & & & x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0
 \end{aligned}$$

 $C(2, -3)$

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)$ y $B(-2,3)$ y tiene su centro sobre la recta: $x + y + 4 = 0$.

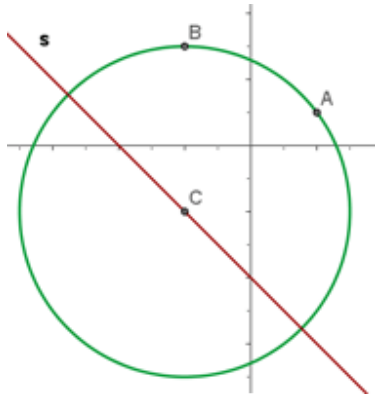


Figura 46

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} (2-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ (-2-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \\ a+b+4=0 \end{cases} \\
 &\begin{cases} (2-a)^2 + (1-b)^2 = (-2-a)^2 + (3-b)^2 \\ a+b+4=0 \end{cases} \\
 &a = -2 \quad b = -2 \quad r = 5 \\
 &x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0
 \end{aligned}$$

Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(0, -3)$, cuyo radio es $\sqrt{5}$ y cuyo centro se halla en la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

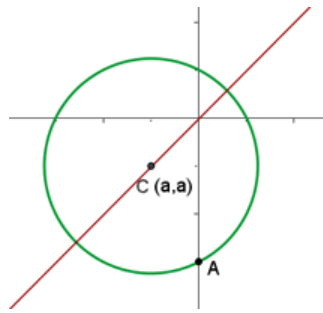


Figura 47

$$(0 - a)^2 + (-3 - b)^2 = 5$$

$$a^2 + b^2 + 6b + 4 = 0$$

$$C \in s \equiv y = x$$

$$a = b$$

$$b^2 + b^2 + 6b + 4 = 0$$

$$b = -1$$

$$C_1(-1, -1)$$

$$A_1 = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$B_1 = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$C_1 = 1 + 1 - 5 = -3$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$$

$$b^2 + 3b + 2 = 0$$

$$b = -2$$

$$C_2(-2, -2)$$

$$A_2 = -2 \cdot (-2) = 4$$

$$B_2 = -2 \cdot (-2) = 4$$

$$C_2 = 4 + 4 - 5 = 3$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$$

Funciones de Varias Variables

1. Función de dos ó más Variables Independientes

1.1 Concepto de Función de dos ó más Variables Independientes [1]

Se dice que una variable z es función de las variables x e y cuando a cada par ordenado de valores (x, y) le corresponde uno y solo un valor determinado de la variable z

Se simboliza $z = f(x, y)$

Dominio de la función

Es el conjunto de pares de valores que pueden tomar las variables x e y para los cuales la función $z = f(x, y)$ está definida

Rango de la función

Es el conjunto de los valores de z que son imágenes de los pares ordenados (x, y) perteneciente al dominio de la función.

Funciones de varias variables independientes

Se dice que la variable " y " es función de las variables $x_1, x_2 \dots x_n$ cuando a cada 'n' ordenada $x_1, x_2 \dots x_n$ de valores de las n variables independientes le corresponde uno y solo un valor determinado de " y " se simboliza:

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n)$$

Ejemplos

1. $f(x, y) = x - y$

Función de dos variables

$f(1, 2) = 1 - 2 = -1$

Sustituya x por 1 y y por 2

$f(2, -1) = 2 - (-1) = 3$

Sustituya x por 2 y y por -1

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calculusm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes (@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CÁLCULO (7 ed.)

$$f(y, x) = y - x$$

Sustituya x por y y $y * y$ por x

$$2. h(x, y, z) = x + y + xz$$

Función de tres variables

$$h(2, 2, -2) = 2 + 2 + 2(-2) = 0$$

Sustituya x por 2, y por 2, y z por -2.

2. Representación Geométrica. [2]

Espacios Vectoriales de Varias Dimensiones.

Un espacio es de n dimensiones, cuando para determinar cada uno de sus puntos hacen falta los valores de n parámetros llamados Coordenadas del Punto y que se representan por $(x_1, x_2 \dots x_n)$.

ESPACIO AFIN

Espacio AFIN de n dimensiones es el espacio entre cuyos puntos y los conjuntos de n números reales cualesquiera $(x_1, x_2 \dots x_n)$ llamados coordenadas del punto, se puede establecer una correspondencia biunívoca.

ESPACIO METRICO

Es un Espacio AFIN en el cual se introduce la manera de medir la distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo.

ESPACIO EUCLIDIANO

Un Espacio es EUCLIDIANO y de dimensión n cuando:

1.- Es AFIN de dimensión n

2.- La distancia entre dos puntos cualesquiera del mismo está definida por:

$$d^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (X'_i - X_i)^2$$

Llamando $d(A, B)$ a la distancia entre los puntos A y B del E^2 se verifica que:

- 1) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
- 2) $d(A, B) = d(B, A)$
- 3) $d(A, C) + d(C, B) \geq d(A, B)$

El espacio Euclidiano de n dimensiones se simboliza con E^n

2.1. Entornos e Intervalos y Dimensiones. [1]

Disco abierto de centro A(a, b) y radio "r"

Es el conjunto de puntos del E^2 tal que :

$$S = \{P(x, y) / (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\} \text{ o sea la } d(P, A) < r$$

Es el caso que sea menor o igual a r se tiene el disco cerrado

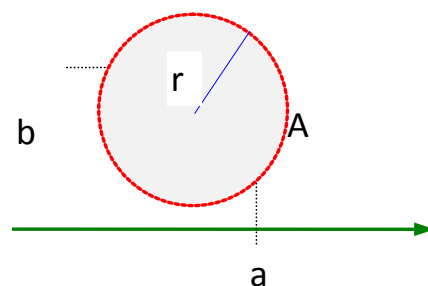


Figura 75

Intervalo rectangular abierto

Es el conjunto de puntos $P(x, y)$ perteneciente al E^2 tal que

$$S = \{P(x, y) / a < x < b \wedge c < y < d\}$$

En el caso de menor o igual se tiene el intervalo rectangular cerrado

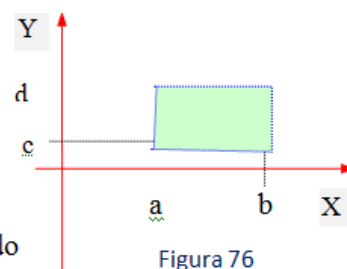


Figura 76

Entorno circular

Entorno circular del punto $A(a, b)$ y radio r es el disco abierto de radio r y centro $A(a, b)$ es decir es el conjunto de puntos del E^2 / $S = \{P(x, y) / (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$ o sea la $d(P, A) < r$. Se simboliza con $N(A, r)$

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CÁLCULO (7 ed.)

Entorno circular reducido

Entorno circular reducido del punto $A(a, b)$ y radio r es el disco abierto de radio r y centro $A(a, b)$ excluyendo el punto $A(a, b)$, es decir es el conjunto de puntos del E^2 tal que : $S = \{ P(x, y) / 0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2 \}$ o sea la $0 < d(P,A) < r$

Se simboliza con $N'(A, r)$

Entorno rectangular

Entorno rectangular del punto $A(a, b)$ y semi-amplitud " d " es el conjunto de puntos $P(x, y)$ del E^2 tales que verifiquen:

$$|x - a| < d$$

$$|y - b| < d$$

Entorno rectangular reducido

Es el mismo que el anterior pero excluyendo el punto $A(a,b)$ es decir es el conjunto de puntos $P(x,y)$ del E^2 tales que

$$0 < |x - a| < d$$

$$0 < |y - b| < d$$

2.2. Punto aislado[3]

Un punto de un conjunto se llama aislado cuando hay algún entorno suyo que no contiene otros puntos del conjunto que el mismo.

Por ejemplo si llamamos Z al conjunto de los números enteros, el conjunto definido por : $S = \{ P(x, y) / x \in Z \wedge y \in Z \}$ está formado solamente por puntos aislados

2.3. Punto interior Un punto perteneciente a un conjunto S se llama "punto interior" de S cuando hay por lo menos un entorno suyo, cuyos puntos todos pertenecen a S .

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CÁLCULO (7 ed.)

2.4. Punto de acumulación

Un punto pertenezca o no a un conjunto S , se llama punto de acumulación de S , cuando en todo entorno reducido suyo hay puntos del conjunto S .

Si definimos a $S = \{P(x, y) / (x)^2 + (y)^2 < 1\}$

Todos los puntos de S son de acumulación y los de la circunferencia $(x)^2 + (y)^2 = 1$ también, ya que si bien no pertenecen a S en todo entorno suyo hay puntos que pertenecen a S

Punto exterior

Un punto no perteneciente a un conjunto S se llama "punto exterior" de S cuando hay por lo menos un entorno suyo, cuyos puntos ninguno pertenecen a S

Punto frontera

Un punto pertenezca o no a un conjunto S , se llama frontera de S si no es exterior ni interior a S , es decir, en todo entorno suyo, hay puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S

Si definimos a $S = \{P(x, y) / (x)^2 + (y)^2 < 1\}$

Los puntos de la circunferencia $(x)^2 + (y)^2 = 1$ son puntos frontera de S ya que en todo entorno suyo hay puntos que pertenecen a S y puntos que no pertenecen a S .

2.5. Conjuntos Abiertos y Cerrados. [1]

Interior de un conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos interiores del conjunto

Exterior de un conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos exteriores del conjunto

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calculusm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CÁLCULO (7 ed.)

Frontera de un conjunto

Es el conjunto formado por todos los puntos fronteras del conjunto

Contorno de un conjunto

Es el conjunto de los puntos no exteriores que son puntos de acumulación de puntos exteriores

Si definimos a $S = \{P(x, y) / (x)^2 + (y)^2 < 1 \wedge y \neq 0\}$

La frontera es la circunferencia $(x)^2 + (y)^2 = 1$ con $y = 0$ mientras que el contorno es solamente

$$(x)^2 + (y)^2 = 1$$

Arco de curva simple de Jordan

Una curva es una función de un solo parámetro

$$x = x(t)$$

$$y = y(t) \quad (\text{relaciones paramétricas de una curva})$$

Los puntos de la curva se obtienen dando valores al parámetro t

En este caso, definimos que $a < t < b$

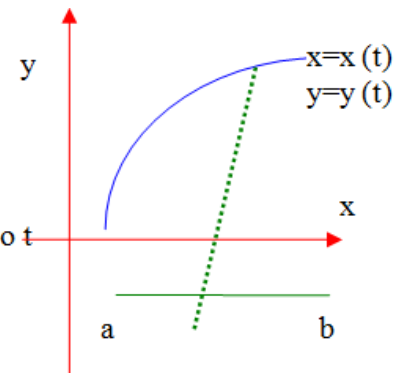
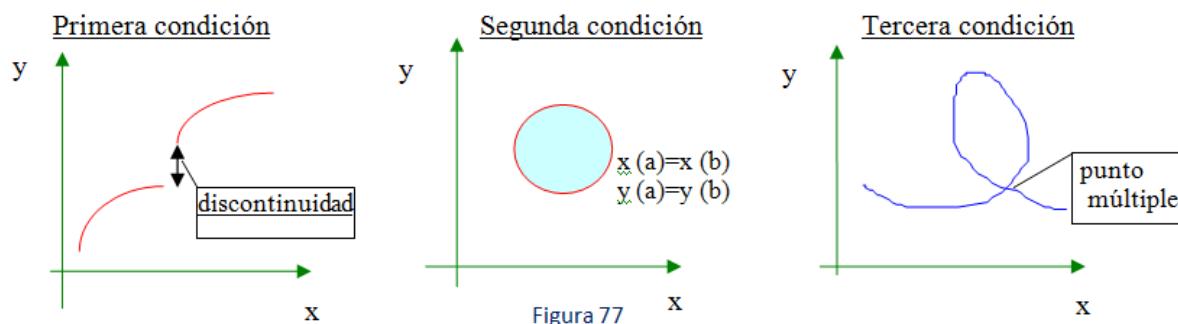


Figura 76 t

Se llama Arco de Curva Simple de Jordan si :

- 1) $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son funciones continuas del parámetro t
- 2) La curva debe ser abierta, los extremos no pueden coincidir, por lo que los puntos extremos $[x(a), y(a)]$ y $[x(b), y(b)]$ no son iguales.
- 3) Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de la curva y los puntos del intervalo $a < t < b$ del parámetro t

Intuitivamente, lo que se pretende es que sea una curva continua (1ra. condición), abierta (2da. condición) y que no tenga puntos múltiples (3ra condición). Es decir que no se presenten las siguientes condiciones.



Conexión de conjuntos

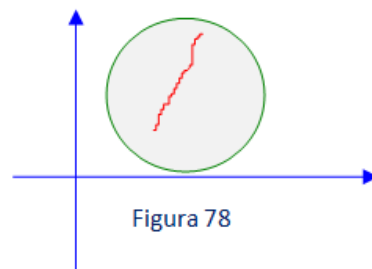
Conjunto conexo

Un conjunto S se llama conexo cuando dos puntos cualesquiera del mismo se pueden unir por un arco de curva simple de Jordan cuyos puntos todos pertenecen al conjunto S .

Conjunto simplemente conexo

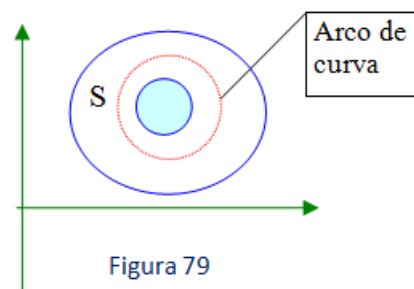
Un conjunto S es simplemente conexo cuando para toda curva simple cerrada de Jordan perteneciente a S la región interior pertenece a S .

Es evidente que para que un conjunto sea simplemente conexo, debe ser conexo, pero no todo conjunto conexo es simplemente conexo



Ejemplo :

Sea $S = \{P(x, y) / r^2 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2\}$



[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes (@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CALCULO (7 ed.)

Este conjunto es conexo, puesto que dos puntos cualesquiera de ellos se puede unir por un arco de curva simple de Jordan cuyos puntos todos pertenecen a S pero no es simplemente conexo pues si se traza una curva cerrada de Jordan de un radio intermedio entre r y R la región interior a la curva cerrada no está totalmente incluida en S .

Este conjunto es doblemente conexo

En general el orden de conexión de un conjunto conexo lo determina el número de curvas que forman su contorno.

1. Funciones. [1]

1.1. Curvas y Superficies de Nivel.

Curvas de nivel

Se define como curva de nivel de una superficie $z = f(x, y)$ a la proyección sobre el plano " x y" de la curva que resulta de interceptar la superficie $z = f(x, y)$ con un plano $z = \text{constante}$ de ecuación $z = k$ paralelo al plano " x y"

Superficie de nivel

Dada una función $U=f(x, y, z)$ se denomina superficie de nivel a las que se obtienen haciendo $f(x, y, z) = k$ siendo k un valor constante y representándolas en el espacio (x y z)

1.2. Actividades. [3]

1. Si en un total de 50 alumnos de primer ingreso, 30 estudian Basic, 25 Pascal y 10 estudian ambos lenguajes. ¿Cuántos alumnos de primer ingreso estudian al menos un lenguaje de computación? R/45. [1]

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calculusm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CALCULO (7 ed.)

2. Una compañía tiene 350 empleados, de los cuales 160 obtuvieron un aumento de salario, 100 fueron promovidos y 60 fueron promovidos y obtuvieron un aumento de salario.[1]

a) ¿Cuántos empleados obtuvieron un aumento pero no fueron promovidos?

R/100.

b) ¿Cuántos empleados fueron promovidos pero no obtuvieron un aumento?

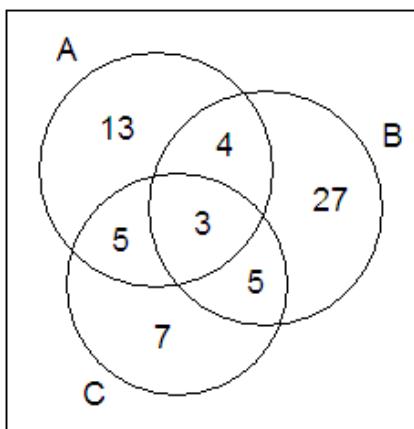
R/40.

c) ¿Cuántos empleados no obtuvieron ni aumento de salarios ni fueron promovidos?

R/150.

3. El diagrama representa un grupo de estudiantes que fueron encuestados y a los cuales se les pidió su opinión respecto de los temas A, B y C.

[1]



Al respecto se desea saber:

a) ¿Número de estudiantes de la muestra? R/64.

b) ¿Número de estudiantes que opinaron del tema B o C? R/51.

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CALCULO (7 ed.)

- c) ¿Cuántos no opinaron? R/0.
- d) ¿Cuántos estudiantes que habían opinado sobre el tema B opinaron sobre los temas A o C? R/12.
- e) ¿Número de estudiantes que opinaron de los temas A y B? R/7.
- f) ¿Cuántos dieron su opinión sólo referente al tema A? R/13.
- g) ¿Cuántos manifestaron su opinión sobre los tres temas? R/3.
- h) ¿Cuántos opinaron sobre el tema C pero no sobre el tema B? R/12.

4. En un grupo de 165 estudiantes, 8 toman cálculo, psicología y computación; 33 toman cálculo y computación; 20 toman cálculo y psicología; 24 toman psicología y computación; 79 están en cálculo; 83 están en psicología y 63 toman computación n.

[2]

- a) ¿Cuántos estudiantes toman exclusivamente psicología? R/47.
- b) ¿Cuántos estudiantes toman solamente dos materias? R/53.
- c) ¿Cuántos estudiantes toman cálculo y computación? R/33.
- d) ¿Cuántos estudiantes toman al menos una de las tres materias? R/156.
- e) ¿Cuántos estudiantes no toman ninguna de estas asignaturas? R/9.

5. En una encuesta realizada a 120 pasajeros, una línea aérea descubrió que a 48 les gustaba el vino (V) con sus alimentos, a 78 les gustaba las bebidas preparadas (P) y a 66 le té helado (T). Además, a 36 les gustaba cualquier par de estas bebidas y a 24 pasajeros les gustaba todo. Encuentre:

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes@Juan Luis Corcobado C.

[3] EL CÁLCULO (7 ed.)

- a) ¿Cuántos pasajeros solamente les gusta el té? R/18.
- b) ¿A cuántos de ellos solamente les gusta el vino con sus alimentos? R/0.
- c) ¿A cuántos de ellos solamente les gusta las bebidas preparadas? R/30.
- d) ¿Cuántos de ellos les gusta al menos 2 de las bebidas para acompañar sus alimentos? R/60.
- e) ¿Cuántos de los pasajeros no beben ni vino. Ni té, ni bebidas preparadas? R/12.

6. Se tienen 3 juegos de video: llamados A, B y C. Un niño juega los tres, 3 niños juegan A o B, 3 niños juegan A o C, 4 niños juegan B o C. Si sabemos que 8 niños juegan el juego A, 12 el juego B y 10 el C, entonces;

[2]

- a) ¿Cuántos niños juegan a lo más los tres juegos? R/21.
- b) ¿Cuántos niños usan los juegos A o B? R/17.
- c) ¿Cuántos usan B o C? R/18.
- d) ¿Cuántos niños juegan sólo el juego C? R/4.
- e) ¿Cuántos niños lo juegan un juego y sólo un juego? R/13.

7. Un profesor tiene dos docenas de libros de introducción a las ciencias de la computación y está interesado en la forma en que tratan los temas: compiladores (A), estructuras de datos (B) e intérpretes (C). Los siguientes datos representan la cantidad de libros que contienen material relativo a estos temas:[1]

$$|A| = 8, |B| = 13, |C| = 13, |A \cap B| = 5, |A \cap C| = 3, |B \cap C| = 6 \text{ y } |A \cap B \cap C| = 2$$

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes (@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CÁLCULO (7 ed.)

Determine:

- a) ¿Cuántos libros incluyen el material de exactamente uno de estos temas?
R/12. b) ¿Cuántos no tratan ninguno de estos temas? R/2.
- c) ¿Cuántos no tienen material sobre compiladores? R/16.
- d) ¿Cuántos libros no tienen material sobre estructuras de datos? R/11.
- e) ¿Cuántos libros tienen al menos dos de estos temas en sus páginas? R/10.
- f) ¿Cuántos de ellos tienen a lo sumo dos de los temas tratados? R/20.

8. Al seleccionar un computador nuevo para su centro de cálculo, el responsable del mismo examina 15 modelos diferentes, considerando: el dispositivo para cinta magnética (A), la terminal para mostrar gráficas (B) y la memoria semiconductora (además de la memoria principal). El número de de computadoras con cualquiera o todas estas características es el siguiente: [2]

$$|A| = |B| = |C| = 6, |A \cap B| = |B \cap C| = 1, |A \cap C| = 2, |A \cap B \cap C| = 0. \text{ Hallar:}$$

- a) ¿Cuántos modelos tienen exactamente una de estas características? R/10.
- b) ¿Cuántos modelos no tiene ninguna de estas características? R/1.
- c) ¿Cuántos modelos de computadores tienen solamente las características de mostrar gráficas? R/4. d) ¿Cuántos modelos tienen solamente dos y solo dos características al mismo tiempo? R/4.

9. Para una muestra de 100 chips lógicos. Sean A, B y C los subconjuntos que tienen los defectos D1, D2 y D3 respectivamente: [2]

$$\text{Si } |A|=23, |B|=26, |C|=30, |A \cap B|=7, |A \cap C|=8, |B \cap C|=10 \text{ y } |A \cap B \cap C|=3,$$

Entonces

- a) ¿cuántos chips de la muestra tienen so´ lo un defecto D1? R/5.
- b) ¿cuánto chips tienen al menos dos defectos? R/28.
- c) ¿cuánto chips tienen a lo sumo 2 defectos? R/45.
- d) ¿cuánto chips no tienen ningún defecto? R/52.

10. Un grupo de primer ingreso de una escuela de ingeniería tiene 300 estudiantes. Se sabe que 180 pueden programar en Pascal, 120 en Fortran, 30 en Apl, 12 en Pascal y Apl, 18 en Fortran y Apl, 12 en Pascal y Fortran y 6 en los tres lenguajes.

Conteste:[2]

- a) ¿Cuántos estudiantes pueden programar exactamente en dos lenguajes?
R/24.
- b) ¿Cuántos estudiantes pueden programar a lo menos en dos lenguajes?
R/30.
- c) ¿Cuántos estudiantes pueden programar a lo sumo en tres lenguajes? R/294.
- d) ¿Cuántos estudiantes de la escuela de ingeniería no saben ninguno de estos tres lenguajes? R/6.

Bibliografía

[1] Grimaldi, Ralph P. Matemáticas Descrita y Combinatoria. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana España, 1997.

[2] Kovacic, Michael L. Matemática, aplicaciones a las ciencias económico-administrativas. Editorial Fondo Educativo Interamericano S.A. México. 1977.

[1] <http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calccsumm8.html>

[2] MATEMÁTICAS ICOU OPCIONES A y B (I.S.B.N. 84-404-6841-5) Juan Luis Corcobado Cartes(@ Juan Luis Corcobado C.)

[3] EL CALCULO (7 ed.)

LÍMITES Y CONTINUEDAD

1. **Límites de una Función** [1] Antes de definir el concepto de límites para funciones de dos o más variables, recordaremos el concepto de límites para funciones de una variable independiente.

1.1. Definición Formal de Límite.

Definición : Dada una función $y = f(x)$ que esté definida en un entorno del punto $x = \alpha$, esta función tiende al límite L cuando x tiende a α , si para cada número positivo ε por pequeño que este sea, es posible hallar otro número positivo δ tal que para todo los valores de x diferentes de α que satisfacen la desigualdad :

$$|x - \alpha| < \delta$$

Se verifica la desigualdad

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

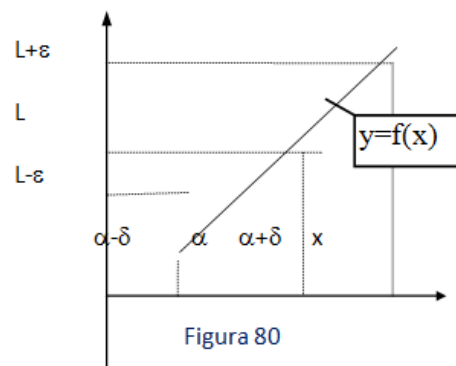
Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = L \Leftrightarrow \exists \varepsilon \wedge \delta = \delta(\varepsilon)$$

De tal forma:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall \quad |x - \alpha| < \delta$$

Esto nos indica que al trazar dos rectas paralelas al eje x que pasen por los puntos $L+\varepsilon$ y $L-\varepsilon$ se encontraran todos los puntos de la curva cuyos valores de x verifican que $|x - \alpha| < \delta$



[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

Limite de funciones de dos variables independientes - Limite Doble

Dada una función de dos variables independientes $z = f(x, y)$ con dominio de definición S y rango T , esta función tiene límite L en el punto $P(\alpha, \beta)$ si para cada número positivo ε arbitrario y tan pequeño como se quiera se puede hallar otro número positivo δ o sea $\delta = \delta(\varepsilon)$ que verifique que todos los puntos del entorno rectangular reducido del punto $P(\alpha, \beta)$ tienen valores de la función cuya diferencia con el valor límite L en valor absoluto sea menor que el valor ε elegido arbitrariamente.

Esta definición nos expresa:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} f(x, y) = L \Leftrightarrow \exists \varepsilon \wedge \delta = \delta(\varepsilon) /$$

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \text{ de } N'(P, \delta)$$

$$\therefore \begin{cases} 0 < |x - \alpha| < \delta \\ 0 < |y - \beta| < \delta \end{cases}$$

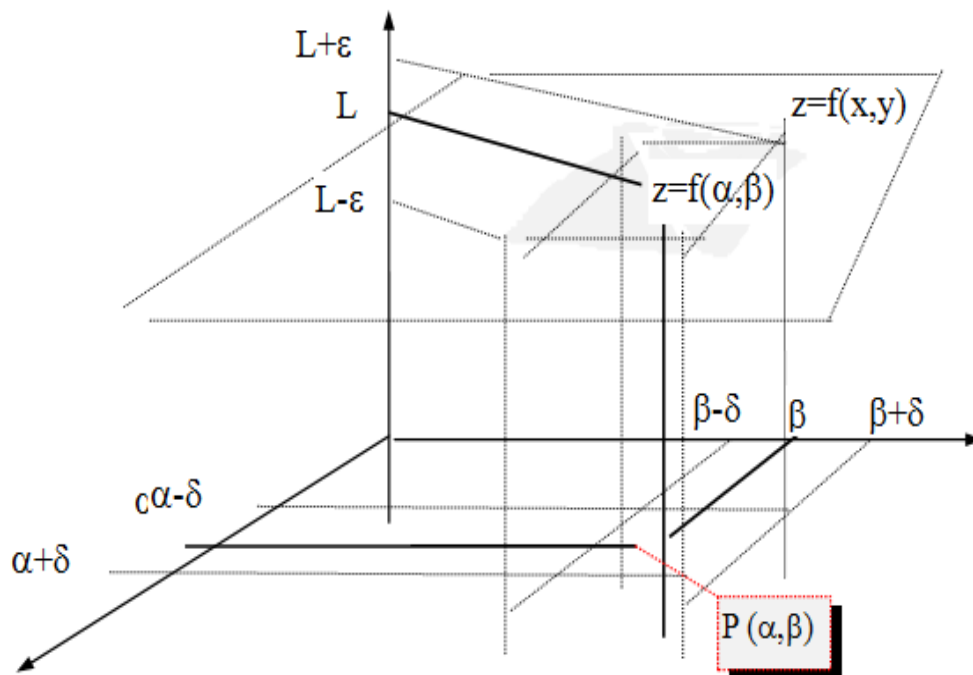


Figura 81

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

Este límite se define como DOBLE o SIMULTANEO dado que se tiende al punto $P(\alpha, \beta)$ según entornos reducidos rectangulares.

También se puede considerar el entorno reducido circular siguiente:

$$0 < (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < \delta^2$$

Si hiciéramos pasar planos paralelos al plano (x, y) por los puntos $L+\epsilon$ y $L-\epsilon$ todos los puntos de la superficie $z = f(x, y)$ que aparecen sombreados en la figura, estarían contenidos entre los planos $z = L+\epsilon$ y $z = L-\epsilon$

1.2 Límites Iterativos ó Sucesivos. [1]

Estos límites no deben interpretarse como límites dobles (en donde las variables tendían simultáneamente), sino como su nombre lo indica, límites que se suceden o se iteran.

Los límites iterados son los siguientes.

$$\lim_{y \rightarrow \beta} \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow \beta} \left[\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow \beta} L(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \lim_{y \rightarrow \beta} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\lim_{y \rightarrow \beta} f(x, y) \right] = \lim_{x \rightarrow \alpha} L(x)$$

Estos límites presuponen la existencia de las funciones

$$L(y) = \left[\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) \right]_y$$

$$L(x) = \left[\lim_{y \rightarrow \beta} f(x, y) \right]$$

En un cierto entorno reducido del punto $P(\alpha, \beta)$

Es decir que primero nos acercamos hacia el valor $x=\alpha$ y la función $z=f(x, y)$ se acerca o se transforma en la función $z=f(\alpha, y)=L(y)$.

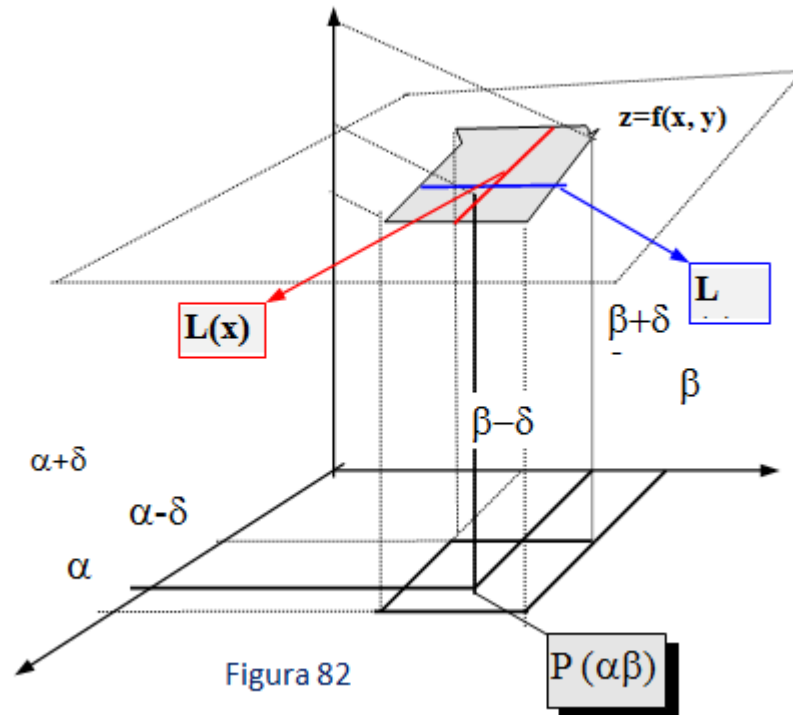
En el otro caso nos acercamos hacia $y = \beta$ y la función $z=f(x, y)$ se acerca o se transforma en la función $z=f(x, \beta)=L(x)$.

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

Por lo tanto dada la función $z=f(x, y)$ se pueden definir tres limites, el limite doble, y los dos limites iterados.



Ejemplos

Dada la función $z = f(x, y) = (x \cdot y) / (x + y)$ hallar los tres limites en el punto P de coordenadas (1,2)

Límite doble

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x \cdot y}{x + y} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

Límites iterados

$$\lim_{y \rightarrow 2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot y}{x + y} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1 \cdot y}{1 + y} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow 2} \frac{x \cdot y}{x + y} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot 2}{x + 2} = \frac{2}{3}$$

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

En este ejemplo los tres límites son iguales. Veamos otro ejemplo:

$$z = f(x, y) = (x + y) / (x - y) \text{ en el punto } P(0,0)$$

Límite doble

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + y}{x - y} = \frac{0 + 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} \quad \nexists \quad (\text{El límite doble no}$$

existe)

Límites iterados

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 + y}{0 - y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{y}{-y} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x + y}{x - y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{x} \right] = 1$$

En este ejemplo vemos que no existe el límite doble y existen los iterados y son diferentes.

Lo que se realizó fue calcular el límite de $z = f(x, y)$ para x tendiendo a α y considerando a la variable y como una constante. Se obtiene así una función de y que la definimos $L(y)$, luego se calcula el límite de $L(y)$ para y tendiendo a β .

En el segundo caso se invierte el orden de las operaciones.

En el último ejemplo vemos que la existencia de los límites iterados de una función no implica la igualdad de los mismos.

[Se Puede Asegurar Que Si Los Límites Iterados Son Distintos, El Límite Doble No Existe.](#)

[RELACION ENTRE LOS LÍMITES DOBLE e ITERADOS](#)

TEOREMA [2]

Veremos a continuación el teorema que relaciona la existencia del límite doble con los iterados.

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

$$\text{Si } \exists \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} f(x, y) = L \wedge \exists \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) = L(y) \forall y \in a \ 0 < |y - \beta| < \delta$$

Entonces se verifica que: $\lim_{y \rightarrow \beta} L(y) = L$

Además si

$$\exists \lim_{y \rightarrow \beta} f(x, y) = L(x) \forall x \in a \ 0 < |x - \alpha| < \delta$$

Entonces se verifica que: $\lim_{x \rightarrow \alpha} L(x) = L$ y por lo tanto los tres límites son iguales.

Demostración:

Por hipótesis tenemos lo siguiente:

Existe el límite doble:

$$\exists \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} f(x, y) = L$$

Y también:

$$\exists \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) = L(y) \forall y \in a \ 0 < |y - \beta| < \delta$$

Por lo tanto por la definición de límite debe verificarse que:

$$|f(x, y) - L(y)| < \varepsilon_1 \quad \forall x \in a \ 0 < |x - \alpha| < \delta$$

Y por la existencia del límite doble debe verificarse que:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \quad \forall (x, y) \in \begin{cases} 0 < |x - \alpha| < \delta \\ 0 < |y - \beta| < \delta \end{cases}$$

Podemos escribir también que

$$L(y) - L = L(y) - f(x, y) + f(x, y) - L$$

Y en valor absoluto será:

$$|L(y) - L| < |L(y) - f(x, y)| + |f(x, y) - L| < \varepsilon_1 + \varepsilon = \varepsilon'$$

Luego $|L(y) - L| < \varepsilon'$ por definición, nos indica que

$$\lim_{y \rightarrow \beta} L(y) = L$$

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

Y por ser

$$L(y) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) \text{ será } \lim_{y \rightarrow \beta} \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x, y) = L$$

De igual manera se demuestra la segunda parte del enunciado.

Este teorema nos asegura que si existe el límite doble y los iterados en un punto todos ellos son iguales.

Puede ocurrir que existan y sean iguales los límites iterados y no exista el límite doble y finalmente que no exista ninguno de ellos.

GENERALIZACION AL $\mathbb{R}^n$

Sea

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(\bar{x}) \text{ una función con dominio } S \in \mathbb{R}^n$$

Y rango

$$T \in \mathbb{R}^1$$

Y sea

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ un punto de acumulación}$$

De

$$S \text{ y } \bar{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ un punto genérico del } \mathbb{R}^n \in S,$$

Se tiene:

$$\lim f(\bar{x}) = L \iff \text{para todo entorno } N(L, \varepsilon) \exists N'(\bar{a}, \delta)$$

Tal que

$$\bar{x} \rightarrow \bar{a}$$

$$\forall \bar{x} \in N'(\bar{a}, \delta) \text{ se verifica que } f(\bar{x}) \in N(L, \varepsilon)$$

1.3 Continuidad. [3]

Dada la función $z = f(x, y)$ con dominio de definición $S \in \mathbb{R}^2$ y un punto $A(\alpha, \beta)$ se dice que la función $z = f(x, y)$ es continua en el punto $A(\alpha, \beta)$ si se cumple la siguiente igualdad:

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow \beta}} f(x, y) = f(\alpha, \beta) \quad (1)$$

Si se considera $x = \alpha + \Delta x$ e $y = \beta + \Delta y$ la ecuación (1) se puede escribir:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y) = f(\alpha, \beta)$$

- sea que pasando al primer miembro $f(\alpha, \beta)$ tendremos :

$$\left[\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y) - f(\alpha, \beta) \right] = 0$$

Lo encerrado entre corchetes, representa el valor de Δz luego

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(\alpha + \Delta x, \beta + \Delta y) - f(\alpha, \beta) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$$

Esto nos indica que una función de dos variables es continua en un punto, cuando su incremento se puede hacer tan pequeño como se quiera con tal de hacer tan pequeños como se quiera los incrementos de las variables independientes.

1.4 Propiedades.

GENERALIZACIÓN

Sea $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\bar{x})$ una función con dominio $S \in \mathbb{R}^n$ y rango $T \in \mathbb{R}^1$

Sea $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un punto genérico de S entonces la función

$y = f(\bar{x})$ es continua en $\bar{x} = \bar{a}$ si se verifica que:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$$

Definición:

La función $y = f(\bar{x})$ es continua en un recinto n - dimensional, si lo es en todos los puntos del mismo.

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matemáticas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLY TRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

-INFINITESIMOS

Una función $z = \varphi(x, y)$ es infinitésima para $(x, y) \rightarrow (a, b)$ si se verifica que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \varphi(x, y) = 0$$

Sean $\varphi(x, y)$ y $\theta(x, y)$ dos infinitésimos en $(x, y) \rightarrow (a, b)$ luego :

Si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{\theta(x, y)} = \alpha$$

Se dice que $\varphi(x, y)$ y $\theta(x, y)$ son infinitésimos del mismo orden.

Cuando $\alpha = 1$ se los denomina infinitésimos equivalentes.

Si es

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{\theta(x, y)} = 0$$

$\varphi(x, y)$ es un infinitésimo de orden superior a $\theta(x, y)$ en el punto (a, b) Si es

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{\theta(x, y)} = \infty$$

$\varphi(x, y)$ es un infinitésimo de orden inferior a $\theta(x, y)$ en el punto (a, b)

Como infinitésimo de comparación se emplea la siguiente expresión:

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Luego se puede comparar $\varphi(x, y)$ con ρ y decir que $\varphi(x, y)$ es un infinitésimo de orden p si se verifica que :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{\varphi(x, y)}{\rho^p} = \alpha \neq 0$$

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/maticas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

Para generalizar a funciones de n variables tendremos:

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \varphi(\bar{x}) = 0 \quad \text{luego } \varphi(\bar{x}) \text{ es infinitesimal para } (\bar{x}) \rightarrow (\bar{a})$$

Se toma como infinitésimo de comparación a

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$$

1.5 Actividades

1) Dado el siguiente ejercicio resolver:

Calcule los siguientes límites:

$$a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ para}$$

$$a.1) f(x) = x^3$$

$$a.2) f(x) = \sqrt{x}, \text{ para } x > 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ con } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & , \text{ si } x \neq 1 \\ 1 & , \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

Solución

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/maticas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

a.1)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 \text{ (para } h \neq 0)$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \star$$

a.2)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$\frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \text{ (pues } x > 0)$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \star$$

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ con } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & , \text{ si } x \neq 1 \\ 1 & , \text{ si } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Sabemos que: } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ahora, si $a = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ y $b = 1$, entonces $a^3 = x$ y $b^3 = 1$. Reemplazando en la expresión anterior,

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = (\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + (\sqrt[3]{x})(1) + 1^2) \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = (\sqrt[3]{x} - 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)}{(\sqrt[3]{x}-1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1}$$

$$\text{Así, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3} \star$$

2) Dado el siguiente ejercicio resolver:

Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{ax+b} & , 0 < x < 1 \\ -5b & , x \geq 1 \end{cases}$$

Obtenga las constantes a y b de modo que f sea continua, y grafique esta función.

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/maticas_en_movimiento/matematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

Solución

Para $x < 0$, $f(x)$ es continua, pues es una función constante ($f(x) = 1$)

Para $0 < x < 1$, $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ es continua, excepto posiblemente en el punto x_0 tal que $ax_0 + b = 0$ ó $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Para $x > 1$, $f(x) = -5b$ es continua, pues es una función constante.

Analicemos la continuidad en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{b}$$

Para que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ exista los límites laterales deben ser iguales. Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 1 = \frac{1}{b} \Rightarrow b = 1$$

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+1} \quad (\text{pues } b = 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-5b) = -5b = -5 \quad (\text{pues } b = 1)$$

Así,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a+1} = -5 \Rightarrow 1 = -5a - 5 \Rightarrow a = -\frac{6}{5}$$

[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

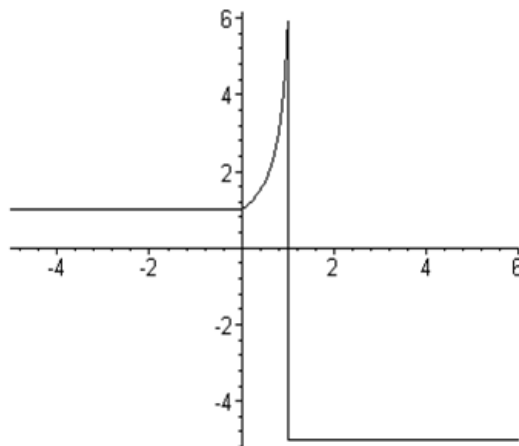
Así,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \frac{1}{a+1} = -5 \Rightarrow 1 = -5a - 5 \Rightarrow a = -\frac{6}{5}$$

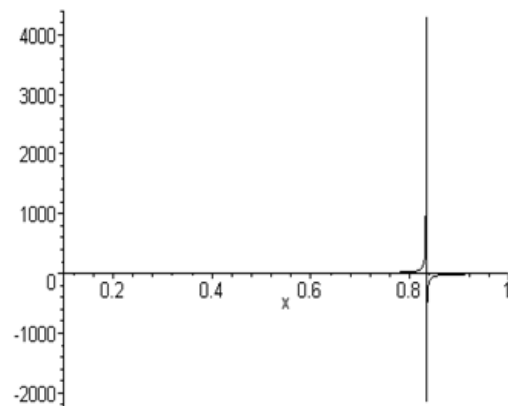
Finalmente, se observa que $x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{-\frac{6}{5}} = \frac{5}{6} \in (0, 1)$, por tanto debemos excluirlo del intervalo; así la función continua en todos los reales excepto en $x_0 = \frac{5}{6}$ es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ \frac{1}{-\frac{6}{5}x+1} & , 0 < x < 1, x \neq \frac{5}{6} \\ -5 & , x \geq 1 \end{cases}$$

El gráfico de la función $f(x)$ es:



En el intervalo $(0, 1)$ la gráfica es:



[1] http://docentes.uacj.mx/sterraza/matematicas_en_movimiento/mathematica.html

[2] CALCULUS EARLYTRANSCENDENTALS (SIXTH EDITION) JAMES STEWART (McMASTER UNIVERSITY)

[3] <http://es.wikipedia.org/>

DERIVADA PARCIAL

1. Derivadas Parciales. [1]

En matemática, una derivada parcial de una función de diversas variables es su derivada respecto a una de esas variables manteniendo las otras, constantes. Las derivadas parciales son útiles en cálculo vectorial y geometría diferencial.

La derivada parcial de una función f respecto a la variable x se representa con cualquiera de las siguientes notaciones equivalentes:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f'_x$$

(Donde ∂ es la letra 'd' redondeada, conocida como la 'd de Jacobi')

Cuando una magnitud A es función de diversas variables ($x, y, z, \dots$), es decir:

$$A = f(x, y, z, \dots)$$

Al realizar esta derivada obtenemos la pendiente de dicha función A paralela al eje de la incógnita respecto a la cual se ha hecho la derivada.

Analíticamente el gradiente de una función es la máxima pendiente de dicha función en la dirección que se elija. Mientras visto desde el álgebra lineal, la dirección del gradiente nos indica hacia donde hay mayor variación en la función.

Introducción

Supón que f es una función de más de una variable, es decir una función real de variable vectorial. Para el caso,

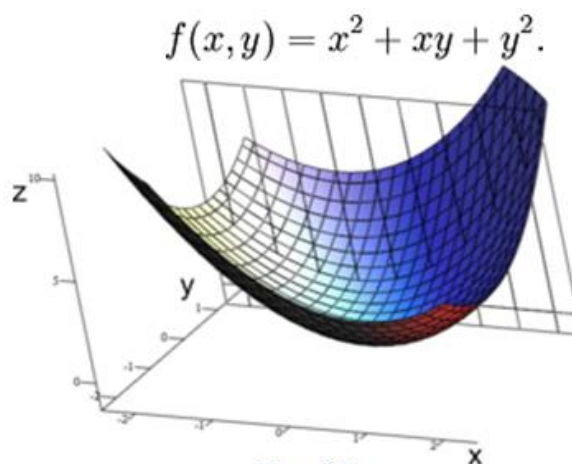


Figura 83

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Un gráfico de $z = x^2 + x*y + y^2$. Queremos encontrar la derivada parcial en $(1, 1, 3)$ que deja a y constante; la correspondiente línea tangente es paralela al eje x .

Es difícil describir la derivada de tal función, ya que existe un número infinito de líneas tangentes en cada punto de su superficie. La derivación parcial es el acto de elegir una de esas líneas y encontrar su pendiente. Generalmente, las líneas que más interesan son aquellas que son paralelas al eje x , y aquellas que son paralelas al eje y .

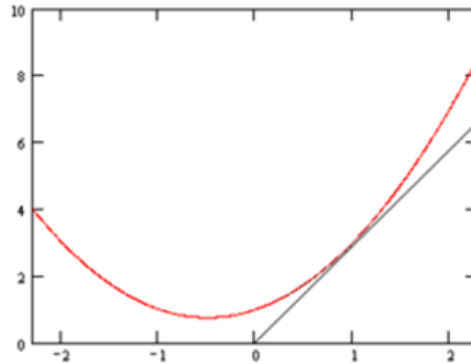


Figura 84

Este es un corte del gráfico a la derecha de $y = 1$.

Una buena manera de encontrar los valores para esas líneas paralelas es la de tratar las otras variables como constantes mientras se deja a variar sólo una. Por ejemplo, para encontrar la línea tangente de la función de arriba en $(1, 1, 3)$ que es paralela al eje x , tratamos a la variable y como constante. El gráfico de la función y el plano $y = 1$ son mostrados a la derecha. A la izquierda, vemos cómo se ve la función, en el plano $y = 1$. Encontrando la línea tangente en este gráfico, descubrimos que la pendiente de la línea tangente de f en $(1, 1, 3)$ que es paralela al eje x es tres. Que escribimos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3$$

En el punto $(1, 1, 3)$,

O como "La derivada parcial de z con respecto a x en $(1, 1, 3)$ es 3."

Ejemplos

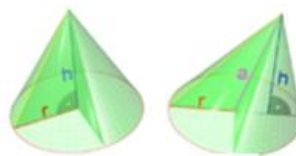


Figura 85

El volumen de un cono depende de la altura (h) y el radio (r)

*Considera el volumen V de un cono; Éste depende de la altura h del cono y su radio r de acuerdo con la fórmula

$$V = F(r, h) = \frac{r^2 h \pi}{3}$$

Las derivadas parciales de V respecto a r y h son:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2rh\pi}{3}, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{r^2\pi}{3}$$

- Otro ejemplo, dada la función

$$F(x, y) = 3x^3y + 2x^2y^2 - 7y$$

La derivada parcial de F respecto de x es:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 9x^2y + 4xy^2 - 7y$$

Mientras que con respecto de y es:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^3 + 4x^2y - 7$$

Notación

Para el siguiente ejemplo, f será una función de x e y.

- Derivadas parciales de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \partial_x f$$

Derivadas parciales (dobles) de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = \partial_{xx} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = \partial_{yy} f,$$

Derivadas cruzadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = \partial_{xy} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \partial_{yx} f,$$

Definición formal

Como las derivadas en una variable, las derivadas parciales están definidas como el límite. Donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Definimos derivada parcial de f en el punto $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ con respecto a la i -ésima variable x_i como:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Incluso si todas las derivadas parciales existen en el punto a , la función no necesariamente es continua en ese punto. Sin embargo, si todas las derivadas parciales existen alrededor de a y son continuas, entonces la función no sólo es continua sino además diferenciable cerca de a . En este caso, f es una función C^1 .

Derivadas parciales de orden superior

A su vez, la derivada parcial $\partial_{x_i} f$ puede verse como otra función definida en U y derivarse parcialmente. Si todas sus derivadas parciales existen y son continuas, llamamos a f una función C^2 ; en este caso, las derivadas parciales (llamadas cruzadas) pueden ser intercambiadas por el teorema de Clairaut también conocido como teorema de Schwartz.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

En $\mathbb{R}^2$, si se cumple lo ya dicho, se asegura que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} = f_{yx}$$

1.1. Derivación Implícita. [2]

Una función $y(x)$ se llama implícita cuando está definida de la forma $F(x, y) = 0$ en lugar de la habitual.

Por ejemplo, puede probarse que la siguiente ecuación define una función implícita en cierta región de $\mathbb{R}^2$ entre las variables x e y :

$$y^3 + y^2 + 5xy + x^2 + x + y = 0$$

Diferenciación

Para poder derivar una función implícita se usa la Regla de la cadena, en el caso de la variable independiente no hay problema ya que se deriva directamente, para la

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

variable dependiente se considera como una función que a su vez está en función de la variable independiente:

Dada una función $F(x, y)$, implícita, si queremos calcular la derivada de y respecto de x : $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Si consideramos $y = f(x)$ es una función en términos de la variable independiente x y $G(y)$ es una función en términos de la variable dependiente y , dado que $y = f(x)$, entonces para obtener la derivada:

$$D_x(G(y)) = D_x(G(f(x))) = G'(x)(f'(x))$$

Ejemplo

Obtener la derivada de:

$$6x^2y + 5y^3 + 3x^2 = 12 - x^2y^2$$

El término $6x^2y$ Se puede considerar que son dos funciones, $6x^2$ y y por lo que se derivara como un producto:

$$D_x(6x^2y) = (12x) \cdot y + (6x^2) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

El término $5y^3$ se deriva como:

$$D_x(5y^3) = 15y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

El término $3x^2$ se deriva de forma normal como:

$$D_x(3x^2) = 6x$$

El valor constante 12, que no depende ni de x ni de y , tiene por derivada 0, como corresponde a un valor constante.

$$D_x(12) = 0$$

Para el término x^2y^2 se puede considerar como un producto y se deriva como:

$$D_x(x^2y^2) = 2xy^2 + x^2 \cdot \left(2y \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

Al unir todos los términos se obtiene:

$$12xy + 6x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 15y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 6x = -2xy^2 - 2x^2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

Ordenando

$$6x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 15y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 2x^2y \cdot \frac{dy}{dx} = -12xy - 6x - 2xy^2$$

Agrupando los valores se obtiene:

$$(6x^2 + 15y^2 + 2x^2y) \cdot \frac{dy}{dx} = -(12xy + 6x + 2xy^2)$$

Finalmente despejando $\frac{dy}{dx}$ se obtiene la derivada de la función implícita:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12xy + 6x + 2xy^2}{6x^2 + 15y^2 + 2x^2y}$$

Diferenciación

Para poder derivar una función implícita se usa la Regla de la cadena, en el caso de la variable independiente no hay problema ya que se deriva directamente, para la variable dependiente se considera como una función que a su vez está en función de la variable independiente:

Dada una función $F(x, y)$, implícita, si queremos calcular la derivada de y respecto de x :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Si consideramos $y = f(x)$ es una función en términos de la variable independiente x y $G(y)$ es una función en términos de la variable dependiente y , dado que $y = f(x)$, entonces para obtener la derivada:

$$D_x(G(y)) = D_x(G(f(x))) = G'(x)(f'(x))$$

Derivación implícita y derivada de la función inversa

Recordemos el concepto fundamental de función: es una regla en que un número y es obtenido de otro número x . Esta relación usualmente se expresa como

$$y = f(x)$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Sin embargo, una dependencia funcional se puede describir también sin necesidad de resolver la fórmula de dependencia de una variable respecto de la otra, y esta es de la forma

$$F(x, y) = 0$$

Donde F describe las "operatorias matemáticas" entre x e y de tal forma que el resultado es cero. Por ejemplo

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación define implícitamente y como función de x, o viceversa, aún cuando pueden surgir problemas de interpretación en la ambigüedad de los signos, en efecto si despejamos y obtenemos

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

En este caso, se elige "arbitrariamente" un signo, para que efectivamente sea una función. En cualquier caso se puede obtener la derivada dy / dx de la relación (1). Para esto se deriva cada miembro de la ecuación (1) respecto de x, donde evidentemente la derivada del segundo miembro es cero, esto es

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 1) = 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

De modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (2)$$

Luego si hemos decidido en (1) que

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

La derivada en (2) queda como

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Observemos que perfectamente de la relación (1) podemos obtener la derivada dx / dy . Esto es

$$(x^2 + y^2 - 1) = 2x \frac{dx}{dy} + 2y = 0$$

Despejando dx / dy obtenemos

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \quad (3)$$

Observemos que de las derivadas en (2) y (3) se concluye que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (4)$$

Esta última relación nos indica que las "diferenciales" dx y dy pueden ser tratadas con el álgebra de los números reales, y la extensión que podemos hacer de (4) es la siguiente, Si $y = f(x)$ es una función que admite función inversa en un dominio determinado, esto es que existe la función $x = f^{-1}(y)$, entonces

$$\frac{d f(x)}{d x} = \frac{1}{\frac{d f^{-1}(y)}{d y}}$$

Que es equivalente a

$$\frac{d f^{-1}(y)}{d y} = \frac{1}{\frac{d f(x)}{d x}}$$

La demostración es bastante sencilla. Tenemos que

$$y = f(x) \Rightarrow y - f(x) = 0$$

Derivando implícitamente la última ecuación, nos queda

$$\frac{d}{d y}(y - f(x)) = 1 - f'(x) \frac{d x}{d y} = 0$$

Despejando dx / dy , obtenemos

$$\frac{d x}{d y} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{d y}{d x}}$$

Ejercicio

Encontrar dy / dx y dx / dy de la relación implícita

$$y^2 + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x^2} + 3 = 0$$

1.2. Derivadas Direccionales. [2]

Consideremos en primer término el caso de una función $Z=f(x; y)$ de dos variables independientes.

Hemos definido las derivadas de $f(x; y)$ en un punto $(x_0; y_0)$ cuando el punto $(x; y)$ tiende a $(x_0; y_0)$ paralelamente al eje x .

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$$

y cuando el punto $(x; y)$ tiende al $(x_0; y_0)$ paralelamente al eje y :

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}$$

Ahora vamos a definir la derivada de $z = f(x; y)$ en una dirección cualquiera ρ , determinada por sus cosenos directores; $\cos \alpha_1$; $\cos \alpha_2$.

Si $z = f(x; y)$ es diferenciable en el punto $(x_0; y_0)$; considerando un incremento en la dirección de ρ su incremento parcial, se puede escribir:

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

$$\Delta \rho f = f_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y + \xi_1 \cdot \Delta x + \xi_2 \cdot \Delta y$$

donde $\xi_1 \wedge \xi_2 \rightarrow 0$ con $\Delta x \wedge \Delta y \rightarrow 0$ Dividiendo por $\Delta \rho$ se tiene:

$$\frac{\Delta \rho f}{\Delta \rho} = f_x(x_0; y_0) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \rho} + f_y(x_0; y_0) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \rho} + \xi_1 \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \rho} + \xi_2 \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \rho}$$

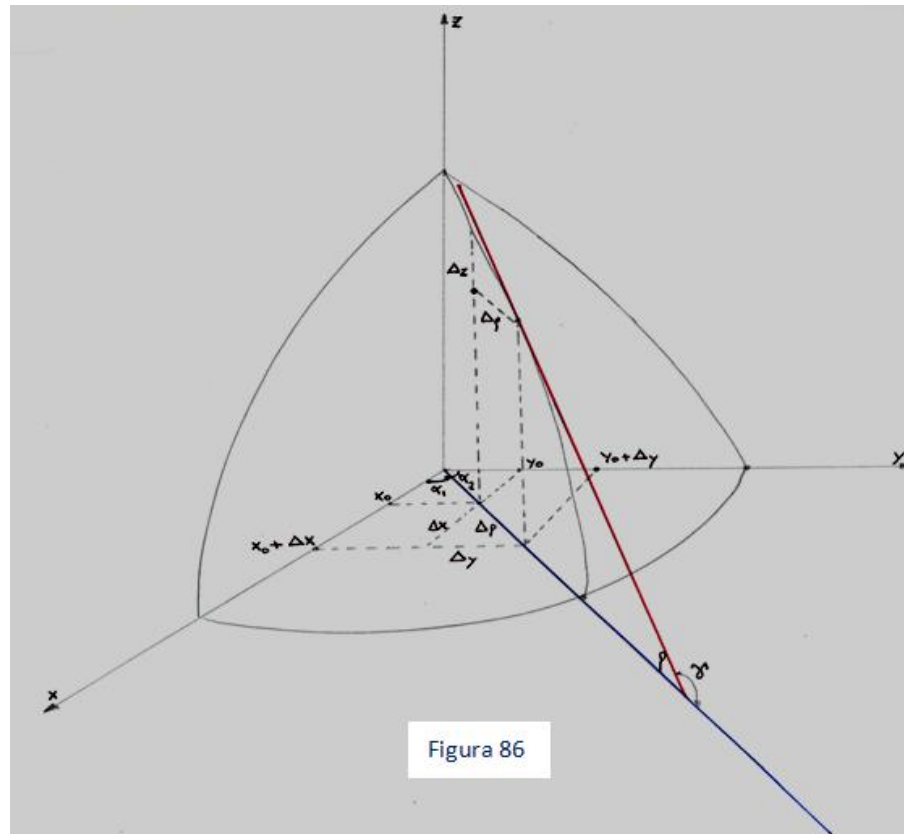


Figura 86

Pero

$$\frac{\Delta x}{\Delta \rho} = \cos \alpha_1; \frac{\Delta y}{\Delta \rho} = \cos \alpha_2$$

Luego

$$\frac{\Delta \rho f}{\Delta \rho} = f_x(x_0; y_0) \cdot \cos \alpha_1 + f_y(x_0; y_0) \cdot \cos \alpha_2 + \xi_1 \cdot \cos \alpha_1 + \xi_2 \cdot \cos \alpha_2$$

En el lím $\Delta \rho \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho f}{\Delta \rho} = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} [f_x \cos \alpha_1 + f_y \cos \alpha_2 + \xi_1 \cdot \cos \alpha_1 + \xi_2 \cdot \cos \alpha_2]$$

Cuando $\Delta \rho \rightarrow 0$; Δx y $\Delta y \rightarrow 0$ por lo tanto $\xi_1 \wedge \xi_2 \rightarrow 0$ luego:

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho f}{\Delta \rho} = \frac{\partial f}{\partial \rho} = f_x \cos \alpha_1 + f_y \cos \alpha_2 \quad \text{en } (x_0; y_0)$$

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial \rho} = f_x(x_0; y_0) \cos \alpha_1 + f_y \cos \alpha_2$$

Demostraremos que las derivadas parciales de $f(x,y)$ respecto de x e y son casos particulares de las derivadas direccionales. En efecto si $\alpha_1 = 0$ será

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} \text{ luego:}$$

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial \rho} = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = f_x(x_0; y_0) \cdot \cos 0^\circ + f_y(x_0; y_0) \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial \rho} = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} = f_x(x_0; y_0) \cdot 1 + f_y(x_0; y_0) \cdot 0 = f_x(x_0; y_0)$$

Haciendo $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ será $\alpha_2 = 0$ luego:

$$\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial \rho} = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} = f_x(x_0; y_0) \cdot 0 + f_y(x_0; y_0) \cdot 1 = f_y(x_0; y_0)$$

Para n variables: $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \cos \alpha_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \cos \alpha_n$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_i$$

1.3. Diferencial Total. [2]

En matemática, el diferencial total de una función real de varias variables reales corresponde a una combinación lineal de diferenciales cuyos componentes (coeficientes) son los del gradiente de la función.

Formalmente el diferencial total de una función es una 1-forma o forma pfaffiana y puede ser tratada rigurosamente como un elemento de un espacio vectorial de dimensión n , donde n es el número de variables dependientes de la función.

Por ejemplo, si $z = z(x, y)$ una función diferenciable entonces el diferencial total de z es:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2)$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Representación

En cálculo diferencial, el diferencial total de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se puede representar de la siguiente manera:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

donde f es una función $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Se suele usar el símbolo df y se puede abreviar como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

1.4. Derivada Sustancial. [1]

Debido a que generalmente adoptamos la descripción euleriana la derivada ordinaria $\partial\phi/\partial t$ ya no representa toda la variación por unidad de tiempo de una determinada propiedad del fluido ϕ siguiendo a la partícula fluida. Esto se debe al movimiento del fluido. Para reflejar esta variación usaremos la derivada sustancial (o derivada siguiendo a la partícula fluida). La derivada sustancial o derivada material se define como el operador:

$$\frac{D}{Dt}(\star) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial(\star)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\star)$$

Donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del fluido. El primer término representa la variación de la propiedad en un punto fijo del espacio y por ello se la denomina derivada local, mientras que el segundo representa la variación de la propiedad asociado al cambio de posición de la partícula fluida, y se la denomina derivada convectiva. Este es el procedimiento que sigue José de Echegarai para demostrar la derivada material. Véase una demostración de cómo llegar a una derivada material. Tomando las coordenadas de Euler como:

$$\mathbf{v} = v_x(x, y, z, t)\hat{\mathbf{i}} + v_y(x, y, z, t)\hat{\mathbf{j}} + v_z(x, y, z, t)\hat{\mathbf{k}}.$$

Calcularemos la aceleración para estas coordenadas:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Desarrollamos cada derivada total de cada componente, así podremos seguir un desarrollo fácil de recordar:

$$\frac{Dv_x}{Dt}i = \frac{\partial v_x}{\partial t}i + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}i + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}i + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}i$$

$$\frac{Dv_y}{Dt}j = \frac{\partial v_y}{\partial t}j + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}j + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}j + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}j$$

$$\frac{Dv_z}{Dt}k = \frac{\partial v_z}{\partial t}k + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x}k + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y}k + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}k$$

Si sumamos término a términos y sacamos factor común nos damos cuenta de que podemos factorizar bastante:

$$\frac{dvelocidad}{dt} = \frac{\partial(ui + vj + wk)}{\partial t} + u \frac{\partial(ui + vj + wk)}{\partial x} + v \frac{\partial(ui + vj + wk)}{\partial y} + w \frac{\partial(ui + vj + wk)}{\partial z}$$

$$\frac{dvelocidad}{dt} = \frac{\partial velocidad}{\partial t} + \left[u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right] v = \frac{\partial velocidad}{\partial t} + (velocidad \cdot \nabla) velocidad$$

Vemos que la parte de las derivadas parciales espaciales se pueden escribir como:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla$$

Si ahora sustituimos velocidad por $(\star)$ obtenemos formalmente la expresión de la derivada material:

$$\frac{d}{dt}(\star) = \frac{\partial(\star)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\star)$$

2. Diferenciales [1]

Recordemos el concepto de diferenciabilidad para funciones de una variable independiente; $y = f(x)$.

Definición: la función $y = f(x)$ es diferenciable en un punto x si está definida en un entorno del punto x y su incremento $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$\Delta y = A \cdot \Delta x + \xi \cdot \Delta x = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ donde $\xi \cdot \Delta x = o(\Delta x)$ es un infinitésimo de orden superior a Δx , es decir que $\xi \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ implica $\xi \cdot \Delta x = o(\Delta x)$.

Se llama diferencial de la función a la parte lineal en Δx o sea $dy = A \cdot \Delta x$.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

A depende de x pero no de Δx . Veamos que representa A:

de $\Delta y = A \cdot \Delta x + \xi \cdot \Delta x = (A + \xi) \Delta x$ o sea que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \xi$ en el límite para $\Delta x \rightarrow 0$

será: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \xi) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi = A + 0$ ya que A no depende de Δx

y $\xi \rightarrow 0$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ o sea $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'_{(x)} = y' = \frac{dy}{dx}$ o sea

$$dy = f'_{(x)} \cdot \Delta x$$

Gráficamente vemos que $dy = \text{tg} \alpha \cdot \Delta x$ pero la $\text{tg} \alpha$ representa la derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x, luego $dy = f'(x) \Delta x$. Si $y = x \therefore$
 $dy = d(x) = 1 \cdot \Delta x$ es decir: $dx = \Delta x$.

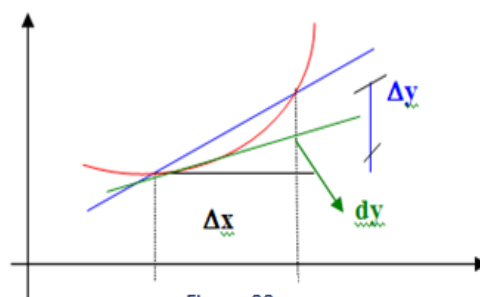


Figura 88

Consideremos una función de dos variables $Z = f(x; y)$.

Definición:

Una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto (x, y) , si está definida en un entorno del punto (x, y) y su incremento total $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ se puede expresar como

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \xi_1 \cdot \Delta x + \xi_2 \cdot \Delta y \quad (1) \text{ donde } \xi_1 \wedge \xi_2 \rightarrow 0$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0 \wedge \Delta y \rightarrow 0$ respectivamente.

Siendo $df(x, y) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$ Determinemos ahora cuánto valen A y B.

Como $\Delta x \wedge \Delta y$ son independientes, podemos hacer $\Delta y = 0$, con lo cual obtenemos el incremento parcial de la función respecto de x.

$$\Delta_x f = A \Delta x + \xi_1 \Delta x = (A + \xi_1) \Delta x \text{ de donde}$$

$$\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \xi_1 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \xi_1 = A$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} = f_x(x; y) = Z_x(x; y)$$

Hacemos ahora $\Delta x = 0$ con lo cual obtenemos el incremento parcial de la función cuando se incrementa la variable y, es decir:

$$\Delta y f = B \Delta y + \xi_2 \Delta y = (B + \xi_2) \Delta y$$

$$\frac{\Delta y f}{\Delta y} = B + \xi_2 \therefore \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y f}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} B + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \xi_2 = B \quad o$$

sea:

$$B = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} = f_y(x; y) = Z_y(x; y)$$

Reemplazando los valores en (1) tendremos:

$$\Delta f = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \cdot \Delta y + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y$$

$$\boxed{df(x, y) = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \cdot \Delta y} \quad (2)$$

En particular cuando $Z = f(x; y) = x \therefore dz = dx = 1 \cdot \Delta x$ y cuando $Z = f(x; y) = y \therefore dz = dy = 1 \cdot \Delta y$ o sea:

$$\boxed{df(x, y) = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \cdot dy = Z_x \cdot dx + Z_y \cdot dy = f_x(x; y) \cdot dx + f_y(x; y) \cdot dy} \quad (3)$$

Las expresiones (2) y (3) reciben el nombre de “Expresión analítica de la diferencial”.

Es muy importante observar que $z = f(x, y)$ depende de las variables x e y mientras que su diferencial $df = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$ depende de cuatro: x ; y ; dx ; dy

Por lo tanto para calcular la diferencial de una función en un punto, no solo es necesario dar las coordenadas del punto (x, y) , sino también el valor de los incrementos $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$. Consideremos ahora una función de tres variables independientes $u = f(x; y; z)$.

Definición:

Se dice que $u = f(x; y; z)$ es diferenciable en un punto $P(x; y; z)$ si está definida en un entorno del punto citado y su incremento total $\Delta f = \Delta u = f(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - f(x; y; z)$ se puede expresar:

$$\boxed{\Delta f(x, y, z) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + \xi_1 \cdot \Delta x + \xi_2 \cdot \Delta y + \xi_3 \cdot \Delta z}$$

donde A , B y C dependen del punto (x, y, z) pero no de Δx ; Δy y Δz y ξ_1 ; ξ_2 ; $\xi_3 \rightarrow 0$

con Δx ; Δy , $\Delta z \rightarrow 0$ respectivamente.

Se llama diferencial total de la función a $df = du = A.\Delta x + B.\Delta y + C.\Delta z$

Se demuestra que

$$A = \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial x}; B = \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial y}; C = \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial z} \text{ o sea:}$$

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial x} .dx + \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial y} .dy + \frac{\partial f(x; y; z)}{\partial z} .dz$$

Diferencial de una función de n variable.

Si $y=f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ es diferenciable en un punto; si está definida en un entorno del punto y su incremento total se puede expresar:

$$\Delta y = A_1.\Delta x_1 + A_2.\Delta x_2 + \dots + A_n.\Delta x_n + \xi_1.\Delta x_1 + \dots + \xi_n.\Delta x_n$$

en donde la diferencial de la función será:

$dy = A_1.\Delta x_1 + A_2.\Delta x_2 + \dots + A_n.\Delta x_n$ con A_i dependiendo de las coordenadas del punto pero no de los Δx_i y los $\xi_i \rightarrow 0$ con $\Delta x_i \rightarrow 0$ respectivamente.

$$A_i = \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\partial x_i} \quad \text{luego :} \quad dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} .dx_i$$

Relación entre la diferenciabilidad, derivabilidad y continuidad.

Demostraremos dos teoremas que relacionan la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de una función en un punto. Haremos la demostración para una función de dos variables independientes.

Teorema 1

Si una función $z=f(x; y)$ es diferenciable en un punto (x, y) entonces es continua y derivable en ese punto.

Demostración:

Por ser diferenciable la función; su incremento total se puede expresar:

$$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + \xi_1.\Delta x + \xi_2.\Delta y \quad (4) \quad \text{siendo}$$

$$A = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \wedge B = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}$$

Por lo tanto al existir las derivadas parciales primeras la función es derivable con lo que se demuestra la primera parte del teorema.

En (4) vemos que si $\Delta x \rightarrow 0 \wedge \Delta y \rightarrow 0 \Delta f \rightarrow 0$ o sea que $z=f(x; y)$ es continua en $(x; y)$ ya que su incremento $\Delta f \rightarrow 0$ cuando tienden a cero los incrementos de las variables independientes. Con esto queda demostrado este teorema.

El recíproco de este teorema no es cierto, es decir que no basta que una función sea continua y derivable en un punto, para garantizar que sea diferenciable.

A continuación demostraremos un teorema que expresa las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea diferenciable.

Teorema 2

Si una función $z = f(x; y)$ es continua y derivable y tiene sus derivadas parciales continuas en un entorno del punto $P(x; y)$, entonces es diferenciable en dicho punto.

Demostración:

El incremento total de la función es:

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

Si sumamos y restamos al segundo miembro $f(x + \Delta x; y)$ será:

$$\Delta f = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x + \Delta x; y) + f(x + \Delta x; y) - f(x; y) \quad \text{Aplicando}$$

Lagrange

$$\Delta f = \Delta y \cdot f_y(x + \Delta x; y + \theta \cdot \Delta y) + \Delta x \cdot f_x(x + \theta' \cdot \Delta x; y) \quad (5) \quad \text{donde:}$$

$$\begin{cases} 0 < \theta < 1 \\ 0 < \theta' < 1 \end{cases}$$

Pero por hipótesis $f_y \wedge f_x$ son continuas en $x; y$ y por lo tanto se puede escribir:

$$f_y(x + \Delta x; y + \theta \cdot \Delta y) = f_y(x; y) + \xi_2$$

Con $\xi_2 \rightarrow 0$ si $\Delta y \rightarrow 0$

$$f_x(x + \theta' \cdot \Delta x; y) = f_x(x; y) + \xi_1$$

Con $\xi_1 \rightarrow 0$ si $\Delta x \rightarrow 0$

Reemplazando en (5) será:

$$\Delta f = [f_x(x; y) + \xi_1] \cdot \Delta x + [f_y(x; y) + \xi_2] \cdot \Delta y \Rightarrow$$

$$\Delta f = f_x(x; y) \cdot \Delta x + f_y(x; y) \cdot \Delta y + \xi_1 \cdot \Delta x + \xi_2 \cdot \Delta y$$

Pero esto último nos indica que la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en $P(x, y)$ con lo cual queda demostrado el teorema.

Convención:

Llamaremos:

C^0 al conjunto de funciones continuas.

C^1 al conjunto de funciones cuyas derivadas primeras existen y son continuas.

C^2 al conjunto de funciones cuyas derivadas segundas existen y son continuas.

C^r al conjunto de funciones cuyas derivadas de orden r existen y son continuas.

Diferenciales Sucesivas

Consideremos el caso de funciones de dos variables:

$$df = f_x(x; y) \cdot dx + f_y(x; y) \cdot dy \quad \text{en la cual } df \text{ depende de } x; y; dx; dy.$$

Si damos valores fijos a dx y dy la diferencial dependerá únicamente de x e y , y considerada como una función de estas dos variables, podrá tener a su vez una diferencial que llamaremos diferencial segunda, la que indicamos por

$$d^2f = d[df]$$

Podemos extender estos conceptos a funciones de 2 variables, para el caso de diferenciales de orden n , lo que indicaremos por:

$$d^3f = d[d^2f] = d[d(df)]; d^4f = d[d^3f] \dots d^n f = d[d^{n-1}f]$$

Si $f(x; y) \in C^2$ existirá la diferencial segunda (teorema 2).

Por haber supuestos fijos $\Delta x = dx \wedge \Delta y = dy$ será:

$$\begin{aligned} d^2f(x, y) &= d[df(x, y)] = d[f_x(x; y).dx + f_y(x; y).dy] = \\ &= d[f_x(x; y).dx] + d[f_y(x; y).dy] \end{aligned}$$

y por se $dx = \text{cte}$ y $dy = \text{cte}$ será:

$$\begin{aligned} d^2f(x, y) &= \{d[f_x(x; y)]\}.dx + \{d[f_y(x; y)]\}.dy = \\ &= f_{xx}(x; y).dx.dx + f_{xy}(x; y).dy.dx + f_{yx}(x; y).dx.dy + f_{yy}(x; y).dy.dy \end{aligned}$$

$$d^2f(x, y) = f_{xx}.dx^2 + 2f_{xy}.dx.dy + f_{yy}.dy^2$$

Llamaremos “operador diferenciación” a la expresión $d = \frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy$

Podemos calcular su cuadrado en forma simbólica:

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}.dx.dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.dy^2$$

Aplicando el operador diferenciación a una función $f(x; y)$ obtenemos:

$$df(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy\right).f(x; y) = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}.dx + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}.dy$$

La diferencial primera se obtiene aplicando el operador diferenciación a la función $f(x; y)$.

Aplicando ahora el operador al cuadrado, obtendremos la diferencial segunda:

$$d^2f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy\right)^2.f(x; y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}.dx.dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.dy^2 \quad \text{Si}$$

$f(x; y) \in C^3$ existirá la diferencial tercera; y de la misma forma anterior se verá que d^3f se obtiene aplicando el operador diferenciación elevado al cubo:

$$d^3f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy\right)^3.f(x; y) = \frac{\partial^3}{\partial x^3}.dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}.dx^2.dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}.dx.dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}.dy^3$$

En general si $f(x; y) \in C^k$ será:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x} .dx + \frac{\partial}{\partial y} .dy \right)^k .f(x; y)$$

Para Funciones de Tres Variables.

Sea $u = f(x; y; z)$ la $du = \frac{\partial f}{\partial x} .dx + \frac{\partial f}{\partial y} .dy + \frac{\partial f}{\partial z} .dz$ el operador

diferenciación será: $d = \frac{\partial}{\partial x} .dx + \frac{\partial}{\partial y} .dy + \frac{\partial}{\partial z} .dz$

Suponiendo $u \Rightarrow \in C^k$ será:

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x} .dx + \frac{\partial}{\partial y} .dy + \frac{\partial}{\partial z} .dz \right)^k .f(x; y; z)$$

Para n variables será: $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$

$$d = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} .dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} .dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} .dx_n \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} .dx_i$$

Si $f(x_1; x_2; \dots; x_n) \in C^k$ será:

$$d^k f(\bar{x}) = \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} .dx_i \right]^k .f(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

2.1. Funciones Diferenciables.

El concepto de función diferenciable es una generalización para el cálculo en varias variables del concepto más simple de función derivable. En esencia una función diferenciable admite derivadas parciales en cualquier dirección y puede aproximarse al menos hasta primer orden por una aplicación afín.

La formulación rigurosa de esta idea intuitiva sin embargo es algo más complicada y requiere de conocimientos de álgebra lineal. Debe notarse que aunque una función de varias variables admita derivadas parciales según cada una de sus variables no necesariamente eso implica que sea una función diferenciable.

Definición

Una función de varias variables se dirá diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^N$ si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, siendo Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^N$, si existe una aplicación lineal Λ que cumpla:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \Lambda(h) + \theta(h)$$

Donde $\theta(h)$ cumple que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\theta(h)\|}{\|h\|} = 0$$

o sea $\theta(h)$ tiende a cero "más rápido" que función lineal, cuando h tiende a 0. Necesariamente la aplicación lineal Λ es la única cosa que se ve más claramente si adoptamos como definición de función derivable aquella para la cual se cumple que exista una aplicación lineal tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \Lambda(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Visualización Geométrica

Para fijar ideas, usando una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo gráfico sería una "sábana". La función es diferenciable si la "sábana" no está "quebrada" en los puntos donde es diferenciable, o sea la función es "suave" en todos los puntos de su dominio, existiendo la matriz jacobiana o derivada en esos puntos.

Ejemplos

De función diferenciable

La función $f(x, y)$ es diferenciable, puesto que existen las derivadas parciales en un entorno de cualquier punto y son continuas en él:

$$f(x, y) = e^{x+y}$$

De función derivable no-diferenciable

En cambio la función $g(x, y)$ es continua, admite derivadas según las variables x e y , e incluso derivadas direccionales, sin embargo no es diferenciable en $(0,0)$:

$$g(x, y) = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

De función no-derivable y no-diferenciable

La función $h(x, y)$ no es diferenciable en $(0,0)$ puesto que no es continua en ese punto a pesar de que existen derivadas parciales de cualquier orden en el punto $(0,0)$:

$$h(x, y) = \frac{xy^2}{x^4 + y^4}$$

Hasta ahora hemos estudiado la derivabilidad de las funciones compuestas. A continuación estudiaremos la diferenciable de funciones compuestas. Por comodidad y simplicidad estudiaremos el caso de una función de n variables que a su vez dependen de dos variables, aunque los resultados obtenidos tengan validez general. Enunciemos el siguiente:

Teorema

" Si $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es diferenciable en las x_j ($j=1, 2, \dots, n$) como función de n variables y las funciones $x_j=x_j(u, v)$ son a su vez diferenciables en u ; v como funciones de dos variables, entonces la función $y=F(u, v)$ dada por $y=f[x_1(u, v), x_2(u, v), \dots, x_n(u, v)]$ es diferenciable en u, v "

Demostración: Por hipótesis f es diferenciable; podemos escribir entonces su incremento total de la siguiente manera:

$$\Delta y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j + \sum_{j=1}^n \delta_j \Delta x_j \dots (1)$$

Donde los δ_j tienden a cero cuando los incrementos Δx_j tienden a cero. También por hipótesis, las funciones $x_j = x_j(u, v)$ son diferenciables respecto de u, v ; por lo tanto sus incrementos totales se pueden expresar como:

$$\Delta x_j = \frac{\partial x_j}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x_j}{\partial v} \Delta v + \varepsilon_j \Delta u + \varphi_j \Delta v \dots (2)$$

Donde ε_j ; φ_j tienden a cero cuando Δu ; Δv tienden a cero.

Reemplazando (2) en (1), obtenemos

$$\Delta y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x_j}{\partial v} \Delta v + \varepsilon_j \Delta u + \varphi_j \Delta v \right) + \sum_{j=1}^n \delta_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x_j}{\partial v} \Delta v + \varepsilon_j \Delta u + \varphi_j \Delta v \right)$$

Desarrollando, factorizando y ordenando, resulta:

$$\Delta y = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u} \right) \Delta u + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial v} \right) \Delta v + \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \varepsilon_j + \frac{\partial x_j}{\partial u} \delta_j + \delta_j \varepsilon_j \right) \right] \Delta u + \\ + \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi_j + \frac{\partial x_j}{\partial v} \delta_j + \delta_j \varphi_j \right) \right] \Delta v$$

Llamando $\varepsilon; \varphi$ al primero y segundo corchete, respectivamente, se ve que, cuando $\Delta u, \Delta v$ tienden a cero juntamente con $\varepsilon_j, \varphi_j, \delta_j$, también lo hacen ε, φ y podemos escribir:

$$\Delta y = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u} \right) \Delta u + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial v} \right) \Delta v + \varepsilon \Delta u + \varphi \Delta v \dots (3)$$

Expresión que agrupándola de otro modo puede ser escrita:

$$\Delta y = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x_j}{\partial v} \Delta v \right) + \varepsilon \Delta u + \varphi \Delta v \dots (4)$$

Tanto en la (3) como en la (4) ε, φ tienden a cero cuando $\Delta u, \Delta v$ hacen lo propio, como hemos visto.

La expresión (3) nos indica que y es diferenciable como función de u y de v , puesto que ninguno de los paréntesis depende de Δu ó Δv ; por lo cual queda demostrado el teorema.

De la expresión (4) deducimos:

$$dy = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x_j}{\partial v} \Delta v \right)$$

Que expresa el " Principio de la invariabilidad de la forma diferencial de primer orden " o " Principio de Cauchy ".

Por otra parte, teniendo en cuenta las fórmulas de derivación de funciones compuestas, vemos que:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} \quad ; \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}$$

Que reemplazadas en la (3), despreciando los infinitésimos de orden superior; vale decir, tomando el infinitesimo principal, resulta:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

En términos generales podemos expresar que "Una función diferenciable de funciones diferenciables, es Diferenciable"

3. Plano Tangente a una Superficie. [2]

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA DIFERENCIAL TOTAL PLANO TANGENTE

Si en lugar de considerar la diferencial de la función consideramos la siguiente expresión:

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

Obtenemos la ecuación de un plano llamado plano tangente a la superficie en $x_0; y_0$.

Geométricamente se caracteriza por el hecho que en el entorno de $(x_0; y_0)$ las ordenadas de z de dicho plano difieren de las de la superficie en un infinitésimo de orden superior a $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

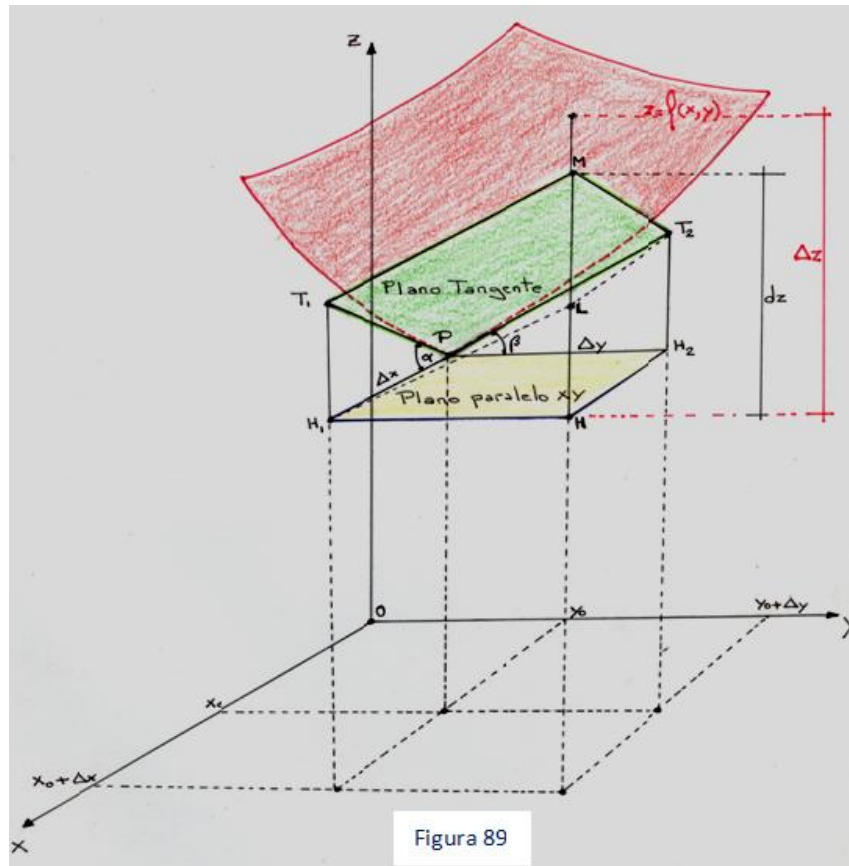
Es muy importante que quede claramente establecido lo siguiente:

1) La condición necesaria y suficiente para que la superficie $z=f(x;y)$ admita plano tangente en un punto es que sea diferenciable en ese punto.

2) La expresión analítica de la diferencial en el punto se convierte en la ecuación incremental

$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$ Del plano tangente sustituyendo las diferenciales por los incrementos.

3) El plano tangente, contiene las rectas tangentes a todas las curvas planas o alabeadas de la superficie que pasen por el punto considerado y admitan tangente en él.



$HM=HL+LM$ siendo $HL=H_2T_2$ y $LM = H_1T_1$ luego $HM = H_2T_2 + H_1T_1$.

$$\frac{H_2 \cdot T_2}{P \cdot H_2} = \text{Tg}(\beta) = \frac{H_2 \cdot T_2}{dy} \therefore H_2 \cdot T_2 = \text{Tg}(\beta) \cdot dy$$

$$H_2 \cdot T_2 = \text{Tg}(\beta) \cdot dy = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot dy$$

$$\frac{H_1 \cdot T_1}{H_1 \cdot P} = \text{Tg}(\alpha) dx = \frac{H_1 \cdot T_1}{dx} \therefore H_1 \cdot T_1 = \text{Tg}(\alpha) \cdot dx$$

$$H_1 T_1 = \text{Tg}(\alpha) \cdot dx = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot dx$$

$$HM = \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot dy = dz$$

4. Sentido Geométrico de las Derivadas Parciales y de la Diferencial Total.

4.1. Gradiente de la Función. [2]

El **gradiente** normalmente denota una dirección en el espacio según la cual se aprecia una variación de una determinada propiedad o magnitud física.

En otros contextos se usa informalmente gradiente, para indicar la existencia de gradualidad o variación gradual en determinado aspecto, no necesariamente relacionado con la distribución física de una determinada magnitud o propiedad.

Definición

El gradiente de un campo escalar, que sea diferenciable en el entorno de un punto, es un vector definido como el único que permite hallar la derivada direccional en cualquier dirección como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = (\text{grad} \phi) \cdot \hat{n}$$

siendo $\hat{n}$ un vector unitario y $\partial \phi / \partial n$ la derivada direccional de ϕ en la dirección de $\hat{n}$, que informa de la tasa de variación del campo escalar al desplazarnos según esta dirección:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{r} - \epsilon \hat{n}) - \phi(\vec{r})}{\epsilon}$$

Una forma equivalente de definir el gradiente es como el único vector que, multiplicado por cualquier desplazamiento infinitesimal, da el diferencial del campo escalar:

$$d\phi = \phi(\vec{r} + d\vec{r}) - \phi(\vec{r}) = \nabla \phi \cdot d\vec{r}$$

Con la definición anterior, el gradiente está caracterizado de forma unívoca. El gradiente se expresa alternativamente mediante el uso del operador nabla:

$$\text{grad} \phi = \nabla \phi$$

Interpretación del Gradiente

De forma geométrica el gradiente es un vector que se encuentra normal a una superficie o curva en el espacio a la cual se le está estudiando, en un punto cualquiera, llámese (x, y) , (x, y, z) , $(\text{tiempo}, \text{temperatura})$ etcétera. Algunos ejemplos son:

- Considere una habitación en la cual la temperatura se define a través de un campo escalar, de tal manera que en cualquier punto (x, y, z) , la temperatura es

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

$\phi(x, y, z)$. Asumiremos que la temperatura no varía con respecto al tiempo. Siendo esto así, para cada punto de la habitación, el gradiente en ese punto nos dará la dirección en la cual se calienta más rápido. La magnitud del gradiente nos dirá cuán rápido se calienta en esa dirección.

- Considere una montaña en la cual su altura en el punto (x, y) se define como $H(x, y)$. El gradiente de H en ese punto estará en la dirección para la que hay un mayor grado de inclinación. La magnitud del gradiente nos mostrará cuán empinada se encuentra la pendiente.

Aproximación lineal de una función

El gradiente de una función f definida de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ caracteriza la mejor aproximación lineal de la función en un punto particular x_0 en $\mathbb{R}^n$. Se expresa así:

$$g(x) = f(x_0) + (\nabla_x f(x_0))^T (x - x_0)$$

donde $\nabla_x f(x_0)$ es el gradiente evaluado en x_0 .

Propiedades

El gradiente verifica que:

- Es ortogonal a las superficies equiescalares, definidas por $\phi = \text{cte} \dots$
- Apunta en la dirección en que la derivada direccional es máxima.
- Su módulo es igual a esta derivada direccional máxima.
- Se anula en los puntos estacionarios (máximos, mínimos y puntos de silla)
- El campo formado por el gradiente en cada punto es siempre irrotacional, esto es,

$$\nabla \times (\nabla \phi) \equiv \vec{0}$$

Expresión en diferentes sistemas de coordenadas

A partir de su definición puede hallarse su expresión en diferentes sistemas de coordenadas.

En coordenadas cartesianas, su expresión es simplemente

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{z}$$

En un sistema de coordenadas ortogonales, el gradiente requiere los factores de escala, mediante la expresión

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial q_1} \hat{q}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial q_2} \hat{q}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial q_3} \hat{q}_3$$

Para coordenadas cilíndricas ($h_\rho = h_z = 1$, $h_\varphi = \rho$) resulta

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \hat{z}$$

y para coordenadas esféricas ($h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r \sin\theta$)

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \hat{\varphi}$$

Gradiente de un campo vectorial

En un espacio euclídeo, el concepto de gradiente también puede extenderse al caso de un campo vectorial, siendo el gradiente de $\vec{F}$ un tensor que da el diferencial del campo al realizar un desplazamiento

$$d\vec{F} = \vec{F}(\vec{r} + d\vec{r}) - \vec{F}(\vec{r}) = (\nabla\vec{F}) \cdot d\vec{r}$$

Este tensor podrá representarse por una matriz 3×3 , que en coordenadas cartesianas está formada por las tres derivadas parciales de las tres componentes del campo vectorial.

Ejemplo

Dada la función $f(x,y,z) = 2x + 3y^2 - \sin(z)$ su vector gradiente es:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2, 6y, -\cos(z)).$$

Funciones escalares reales

La derivada direccional de una función $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sobre un vector unitario $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ es la función definida por este límite:

$$D_{\vec{v}}f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{v}) - f(\vec{x})}{h}.$$

Si la función es diferenciable, puede ser escrita en término de su gradiente ∇f

$$D_{\vec{v}}f = \nabla f \cdot \vec{v}$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar o producto punto entre vectores.

Demostración

El caso más sencillo de la derivada direccional se da en el espacio tridimensional. Supongase que se tiene una función diferenciable $z = f(x, y)$. La derivada direccional según la dirección de un vector $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ sería:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + v_x h, y + v_y h) - f(x, y)}{h} \\ D_{\mathbf{v}}f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + v_x h, y + v_y h) - f(x, y + v_y h) + f(x, y + v_y h) - f(x, y)}{h} \\ D_{\mathbf{v}}f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + v_x h, y + v_y h) - f(x, y + v_y h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + v_y h) - f(x, y)}{h} \end{aligned}$$

El primero de estos límites puede calcularse mediante el cambio $h' = v_x h$ lo cual lleva, por ser diferenciable la función¹ f , a:

$$\lim_{h' \rightarrow 0} \frac{f(x + h', y + v_y h' / v_x) - f(x, y + v_y h' / v_x)}{h' / v_x} = \lim_{h' \rightarrow 0} v_x \frac{\partial f(x, y + v_y h' / v_x)}{\partial x} = v_x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

Procediendo análogamente para el otro límite se tiene que:

$$D_{\mathbf{v}}f = v_x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + v_y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Resultado que trivialmente coincide con el producto escalar del gradiente por el vector $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$:

$$(\nabla f) \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \cdot (v_x, v_y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} v_x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} v_y = D_{\mathbf{v}}f$$

Campos vectoriales

El concepto de derivada direccional se puede generalizar a funciones de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, del tipo:

$$\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

En este caso la derivada direccional de modo idéntico a como se hacía con funciones de una variable:

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{h}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Una diferencia con el caso de funciones de reales de una variable es que la existencia de derivadas direccionales según todas las direcciones no implica necesariamente que una función sea diferenciable. Si la función es diferenciable resulta que la aplicación:

$$\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}\mathbf{F}$$

Es lineal y se cumple además es expresable en términos del jacobiano:

$$D_{\mathbf{v}}\mathbf{F} = (D\mathbf{F})\mathbf{v}$$

La derivada funcional, definida como derivada de Gâteaux, es de hecho una derivada direccional definida en general sobre un espacio vectorial de funciones.

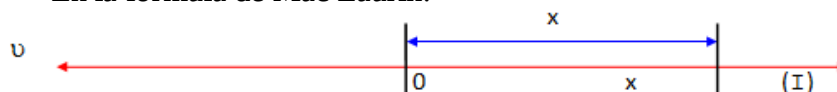
5. Fórmula de Taylor. [1]

FORMULA DE TAYLOR PARA UNA FUNCION $f(x)$

La fórmula de Mac Laurin para funciones que hemos visto, está desarrollada alrededor de $x = 0$, esto es, considerando los valores de $f(x)$ y de $f(x)^{(n)}$ en $x = 0$. Es evidente que se podrían tener fórmulas similares alrededor de cualquier punto $x = a$ conveniente, es decir, en un entorno $\mathcal{U}$ de $x = a$.

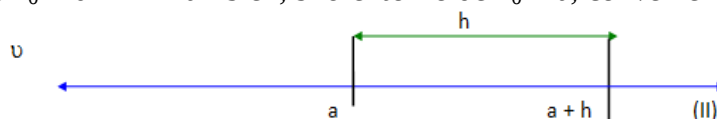
Gráficamente:

En la fórmula de Mac Laurin:



$\mathcal{U}$ Entorno de $x_0 = 0$

También, si $\mathcal{U}$ entorno de $x_0 = a$, convenientemente:



Entonces, según (I) y (II), reemplacemos en la fórmula de Mac Laurin para $f(x)$ indicada antes:

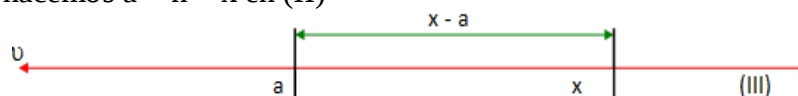
el punto “0” por el punto “a”, el punto “x” por el punto “a + h”, la “longitud” “x” “h”

y resultará así la Fórmula de TAYLOR para $f(x)$ siguiente.

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} \cdot h^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot h^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot h^n + T_n(a+h) \quad \forall x$$

$\in \mathcal{U}$ entorno abierto de $x = a$.

Ahora, si hacemos $a+h = x$ en (II)



Tendremos, haciendo los cambios respectivos según (III) y teniendo en cuenta (II)

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + T_n(x)$$

$\forall x \in \mathcal{U}$, entorno abierto de $x_0 = a$

Lo anterior es otra presentación de la fórmula de Taylor para $f(x)$.

EXPRESION DEL RESTO EN LA FORMULA DE TAYLOR

Es obvio que para que una $f(x)$ pueda expresarse mediante la fórmula de Taylor o de Mac Laurin, debe ser derivable por lo menos hasta el orden “n” en un entorno abierto de $x = a$ o bien de $x = 0$, respectivamente. Supongamos, ahora, que $f(x)$ es derivable hasta el orden “n + 1” en un entorno abierto de $x = a$ y encontremos una expresión para el término complementario $T_n(x)$.

Como por la fórmula de Taylor para $f(x)$ es:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + T_n(x)$$

Resultará que:

$$T_n(x) = f(x) - f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

es derivable hasta el orden (n + 1) en $\mathcal{U}$. Además:

$$T_n(a) = f(a) - f(a) - 0 - 0 - \dots - 0 = 0 \quad \text{Ahora:}$$

$$T_n'(x) = f'(x) - f'(a) - \frac{f''(a)}{1!} (x-a) - \frac{f'''(a)}{2!} (x-a)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1}$$

$$T_n'(a) = f'(a) - f'(a) - 0 - 0 - \dots - 0 = 0 \quad \text{También:}$$

$$T_n''(x) = f''(x) - f''(a) - \frac{f'''(a)}{1!} (x-a) - \dots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!} (x-a)^{n-2}$$

$$T_n''(a) = f''(a) - f''(a) - 0 - 0 - \dots - 0 = 0$$

.....
Finalmente:

$$T_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a)$$

$$T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a) = 0$$

y así:

$$T_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) \quad (\text{I})$$

Por lo tanto, $T_n(x)$ es una función derivable hasta el orden (n + 1) en un entorno $\mathcal{U}$ de $x = a$, tal que se anula conjuntamente con sus “n” primeras derivadas en $x = a$.

Por ello, podemos utilizar la Fórmula generalizada de Lagrange , y entonces:

$$T_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} T_n^{(n+1)}(\xi) \quad \text{con } a < \xi < x \text{ o bien } x < \xi < a$$

Pero:

$T_n^{(n+1)}(\xi) = f_n^{(n+1)}(\xi)$ por (I) en consecuencia

$$T_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f_n^{(n+1)}(\xi)$$

con $a < \xi < x$ o bien $x < \xi < a$, que es la expresión de Lagrange para el término complementario.

Entonces, reemplazando en la fórmula de Taylor para $f(x)$, obtendremos:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$\forall x \in \mathcal{U}$, con $a < \xi < x$ o bien $x < \xi < a$, que es la llamada Fórmula de Taylor con la expresión de Lagrange para el resto.

Observaremos que también podemos escribir: $\xi = a + \theta h$, con $0 < \theta < 1$ y $h = x - a$.

Finalmente, si hacemos $a = 0$ en la anterior expresión de $f(x)$, tendremos la Fórmula de Mac Laurin con la expresión de Lagrange para el término complementario: $\forall x \in \mathcal{U}$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot (x)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x)^n + \frac{(x)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$$

con $0 < \theta < 1$, pues hemos tomado $\xi = \theta x$

FORMULAS DE TAYLOR Y MAC LAURIN PARA FUNCIONES DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

Dada una función $z = f(x, y)$ que sea diferenciable hasta el orden $(n+1)$ en un entorno abierto $\mathcal{U}$ del punto $A(a, b)$, trataremos de aproximar el valor de la función $f(x, y)$ en todo punto $B(a+h, b+k)$ de dicho entorno $\mathcal{U}$ mediante un polinomio en “h” y “k”, en menos de un término complementario T_n .

Sean, entonces, $A(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{U}$ entorno abierto, circular o rectangular, de $A(a, b)$, $z = f(x, y)$ una función diferenciable hasta el orden $(n+1)$ en $\mathcal{U}$ y $B(a+h, b+k) \in \mathcal{U}$.

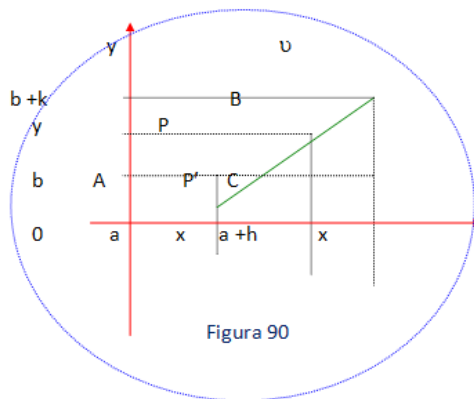


Figura 90

Sea $P(x, y)$ un punto variable sobre el segmento de recta $AB \subset v$.
Los triángulos $AP'P$ y ACB son semejantes, ver figura anterior.

Entonces, tendremos:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AP'}{AC} = \frac{P'P}{CB} = t, \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} t = 0 &\Rightarrow AP = 0 \Rightarrow P \equiv A \\ t = 1 &\Rightarrow AP = AB \Rightarrow P \equiv B \end{aligned} \quad \text{volviendo a (1), resulta que es:}$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \frac{AP'}{AC} = \frac{x - a}{h} \\ t = \frac{P'P}{CB} = \frac{y - b}{k} \end{array} \right.$$

y resolviendo esto en “x” e “y”, obtendremos:

$$\left| \begin{array}{l} x = a + h \cdot t = x(t) \\ \text{para } t \in [0,1] \quad (\text{ecuaciones paramétricas del segmento de recta } AB) \\ y = b + k \cdot t = y(t) \end{array} \right.$$

Así, para $P(x, y)$ variable sobre AB , resultará $z = f(x, y) = f[x(t), y(t)] = F(t)$, con $t \in [0,1]$, función compuesta de la variable “t”.

Por otra parte, como $z = f(x, y)$ es diferenciable hasta el orden $(n + 1)$ y $x(t)$, $y(t)$ son derivables (son lineales), resulta que $F(t) = f[x(t), y(t)]$ es derivable hasta el orden $(n + 1)$. Entonces, usando la fórmula de Mac Laurin para $F(t)$:

$$F(t) = F(0) + F'(0) t + \frac{F''(0)}{2!} t^2 + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} t^n + \frac{F^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1} \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

Haciendo $t = 1$ en lo anterior, tenemos:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \quad (2) \quad \text{con } 0 < \theta < 1$$

Ahora, analizando (2) observamos que:

$$F(1) = f(a + h \cdot 1, b + k \cdot 1) = f(a + h, b + k)$$

$$F(0) = f(a + h \cdot 0, b + k \cdot 0) = f(a, b)$$

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{df[x(t), y(t)]}{dt} = \frac{\partial f[x(t), y(t)]}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f[x(t), y(t)]}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{df[x(t), y(t)]}{dt} = \frac{\partial f[x(t), y(t)]}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f[x(t), y(t)]}{\partial y} \cdot k$$

$$F'(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right] f(a + h.t, b + k.t) = df(a + h.t, b + k.t) = H[x(t), y(t)]$$

$$F'(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right] f(a, b) = df(a, b)$$

$$F''(t) = \frac{dF'(t)}{dt} = \frac{dH[x(t), y(t)]}{dt} \quad (\text{por lo visto cuando obtuvimos } F'(t))$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right] H[x(t), y(t)] = \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right] f(a + h.t, b + k.t) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right]^2 f(a + h.t, b + k.t) \end{aligned}$$

$$F''(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right]^2 f(a, b) = d^2 f(a, b)$$

$$F^n(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right]^n f(a, b) = d^n f(a, b)$$

$$F^{n+1}(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right]^{n+1} f(a + h.t, b + k.t) = d^{n+1} f(a + h.t, b + k.t)$$

$$F^{n+1}(0) = \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right]^{n+1} f(a + h.0, b + k.0) = d^{n+1} f(a + h.0, b + k.0)$$

Y haciendo los reemplazos correspondientes en (2), llegaremos a:

$$\boxed{f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right] f(a, b) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right]^2 f(a, b) + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right]^n f(a, b) + \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right]^{n+1} f(a + \theta h, b + \theta k)}$$

(3) con $0 < \theta < 1$

Si en (3), pasamos al primer miembro el primer término del segundo miembro, y teniendo en cuenta que $f(a+h, b+k) - f(a, b) = \Delta z$, podremos escribir:

$$\Delta z = \frac{df(a, b)}{1!} + \frac{d^2 f(a, b)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(a, b)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(a + \theta.h, b + \theta.k)}{(n+1)!}$$

(4) , con $0 < \theta < 1$

Si ahora hacemos en (3) $h = x - a$, $k = y - b$, resultará que $x = a + h$, $y = b + k$; Luego, haciendo los correspondientes reemplazos en (3), se tendrá $\forall (x, y) \in \cup$ entorno de $A(a, b)$:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right] f(a, b) + \dots + \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right]^n f(a, b) + \frac{1}{n+1!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b) \right]^{n+1} f[a + \theta(x-a), b + \theta(y-b)] \quad (5)$$

(3), (4) y (5) constituyen tres presentaciones diferentes de la Fórmula de Taylor para una función de dos variables independientes $z = f(x, y)$. Finalmente, si en la fórmula de Taylor (5) hacemos $(a, b) = (0, 0)$, o sea que la desarrollamos a $f(x, y)$ en un entorno del origen $(0, 0)$, resulta la Fórmula de Mac Laurin para una función de dos variables independientes $z = f(x, y)$.

6. Actividades.

1) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{\ln^4 5x}{2x^{\frac{2}{3}}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{\ln^4 5x}{2x^{\frac{2}{3}}} & \ln^4 5x &= \ln 4 \cdot \ln 2x \cdot 3 \\ y' &= \frac{5}{4 \cdot 5x} \cdot \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{x} & \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} &= \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{5}{4 \cdot 5x} \cdot \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{x} & \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} &= \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{5}{4 \cdot 5x} \cdot \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{x} & \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} &= \frac{5}{2x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned}$$

2) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \frac{3^5 x^2}{x^2 + 1} \quad \text{b) } y = 3^x \cdot \cos(x^2 + 1)$$

Solución:

$$\text{a) } y' = \frac{5 \cdot 3^{5x} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} - 3^{5x} \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} \cdot 3^{5x}$$

$$\text{b) } y' = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos(x^2 + 1) - 3^x \cdot \sin(x^2 + 1) \cdot 2x = 3^x \cdot [\ln 3 \cdot \cos(x^2 + 1) - 2x \cdot \sin(x^2 + 1)]$$

3) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{a) } y = \frac{\ln(1 + e^x)}{1 + e^x} \quad \text{b) } y = \sqrt{3 \cos x^3 + 1}$$

Solución:

$$\text{a) } y = \ln(1 + e^x) \quad y' = \frac{e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot \frac{1 + e^x}{1 + e^x} = \frac{e^x (1 + e^x)}{(1 + e^x)^2} = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

$$\text{b) } y = \frac{\sin(x^3 + 1)}{\sqrt{3 \cos^2(x^3 + 1)}} \quad y' = \frac{\cos(x^3 + 1) \cdot 3x^2}{\sqrt{3 \cos^2(x^3 + 1)}} - \frac{\sin(x^3 + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cos^2(x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2 \cos(x^3 + 1) \sin(x^3 + 1) \cdot 3x^2)}{3 \cos^2(x^3 + 1)}$$

4) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{5 \cdot \arctg 2x}{1}$ b) $y = \sqrt[3]{x^5}$

Solución:

a) $y' = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{5}{2x}$

b) $y' = \frac{5x^4}{3x^5} = \frac{5}{3x}$

5) Aplica la derivación logarítmica para derivar $y = x^{\cos x}$

Solución:

$f(x) = x^{\cos x}$

$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln x$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{x} \cdot 1$

$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{\cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{x} \right)$

APLICACIÓN DE LA DERIVADA PARCIAL

1. Funciones Implícitas [1]

Funciones implícita de una variable independiente:

Definición: Se considera que “y” es función implícita de la variable independiente “x”, cuando está establecida indirectamente mediante una ecuación del tipo:

$$F(x; y) = 0$$

Consideremos la expresión: $F(x; y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$, que es la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y radio “a”.

La forma explícita, $y = f(x)$ o bien $x = g(y)$ de la precedente función es:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \text{ o } x = \sqrt{a^2 - y^2}, \text{ respectivamente en ciertos convenientes dominios.}$$

En muchos casos, dada la ecuación $F(x, y) = 0$, es posible pasar de la forma implícita a la forma explícita $y = f(x)$ mediante procedimientos puramente algebraicos (como se ha realizado en el ejemplo dado). Pero existen también casos en que ello no es posible.

Por ello trataremos de resolver el problema de determinar las propiedades de una función $y = f(x)$ definida implícitamente por $F(x; y) = 0$, sin necesidad de pasar a la forma explícita. No debe pensarse que toda expresión de la forma $F(x; y) = 0$ determina una función $y = f(x)$ o $x = g(y)$. Es fácil dar ejemplos de funciones

$F(x; y)$ que igualadas a cero no determinan soluciones en términos de una variable.

Así por ejemplo, sea la función $x^2 + y^2 = 0$ solo se satisface para el punto $x = 0; y = 0$, y no existe por lo tanto función $y = f(x)$

Otro ejemplo más drástico aún es el siguiente: $F(x; y) = x^2 + y^2 + 1$, que al igualar a cero, resulta que no hay ningún valor real ni de “x” ni de “y” que satisfaga la expresión precedente.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

Se comprende entonces la necesidad de hallar condiciones bajo las cuales la expresión $F(x; y) = 0$ define una función $y = f(x)$ o $x = g(y)$ y cuáles son las propiedades de éstas, en relación con las propiedades de $F(x; y) = 0$

Antes de dar el teorema de existencia, haremos algunas consideraciones de carácter geométrico intuitivo.

La ecuación $F(x; y) = 0$ resulta equivalente al sistema siguiente: $\begin{cases} z = F(x; y) \\ z = 0 \end{cases}$, cuya

solución es la curva en que la superficie $z = F(x; y)$ es interceptada por el plano $z = 0$ (plano $x y$).

Cuando esta curva de intersección exista, o en otras palabras, cuando la superficie $z = F(x; y)$ corte realmente al plano $(x; y)$ dicha curva de intersección será el gráfico en el plano (x, y) de una función $y = f(x)$ expresión explícita de $F(x; y) = 0$.

Vale decir que cuando $F(x; y) = 0$ define una función $y = f(x)$, se verifica: $F(x; y) = F[x; f(x)] = 0$.

En relación con las posiciones relativas de la superficie $z = F(x, y)$ y el plano coordenado (x, y) analicemos las distintas situaciones geométricas que pueden presentarse:

Una primera posibilidad es que la superficie $z = F(x; y)$ y el plano (xy) no tengan puntos en común, por ejemplo el ya citado: $z = F(x; y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$.

En tal caso es obvio que no existe curva de intersección con el plano $(x y)$ y por lo tanto no existe solución $y = f(x)$ ni $x = g(y)$.

Por ello, se hace necesario considerar solo aquellos casos en que haya por lo menos un punto (x_0, y_0) que satisfaga la ecuación $F(x; y) = 0$. Estos valores (x_0, y_0) constituyen la llamada “solución inicial” de $F(x, y) = 0$

Si existe una solución inicial (x_0, y_0) , geoméricamente restan dos posibilidades

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

1. Que el plano tangente a la superficie $z = F(x; y)$ en el punto $P_0(x, y, 0)$ sea horizontal.
2. Que el plano tangente a la misma superficie en el punto considerado No sea horizontal.

Si el plano tangente a la superficie en $P_0(x, y, 0)$ es horizontal, es fácil dar ejemplos que muestran que la solución $y = f(x)$ ó $x = g(y)$ puede o no existir.

Así, $F(x; y) = x^2 + y^2 = 0$ tiene la solución inicial, siendo horizontal el plano tangente correspondiente a dicho punto (es el mismo plano (x, y) como se ve aplicando la ecuación del plano tangente:

$$z - z_0 = F_x(x_0; y_0)(x - x_0) + F_y(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Pero $F(x; y) = x^2 + y^2 = 0$ no define ninguna función $y = f(x)$ ni $x = g(y)$

Por otra parte, es completamente posible que la ecuación $F(x; y) = 0$ tenga una solución $y = f(x)$ o bien $x = g(y)$, aún cuando el plano tangente en $P(x_0, y_0, 0)$ sea horizontal. Como ejemplo $F(x; y) = (y - 2x)^2 = 0$, de la cual se deduce la función explícita $y = 2x$ o bien la función $x = y/2$.

Por ello, en el caso excepcional de plano tangente horizontal correspondiente a la solución inicial, no podemos hacer ninguna afirmación de carácter general.

La posibilidad restante es que para la solución inicial (x_0, y_0) , el plano tangente no sea horizontal.

La intuición nos muestra entonces que la superficie $z = F(x; y)$ no puede “doblar” tan rápidamente, lo suficiente como para eludir cortar al plano x, y en las proximidades de $P_0(x, y, 0)$ en una bien definida curva de intersección, y que esta porción de la curva en las vecindades de $(x_0; y_0, 0)$ puede ser descrita por funciones $y = f(x)$ o $x = g(y)$.

El hecho que el plano tangente en $P_0(x, y, 0)$ no sea horizontal equivale a establecer que $F_x(x_0; y_0)$ y $F_y(x_0; y_0)$ no son nulas simultáneamente. (Recordar la ecuación del plano tangente).

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

Recapitulando, resulta que hemos llegado, mediante consideraciones puramente intuitivas de carácter geométrico, a la conclusión que sí:

- 1) Existe una solución inicial (x_0, y_0) de $F(x, y) = 0$
- 2) Existe plano tangente a la superficie $z = F(x, y)$ en (x_0, y_0) , (F es diferenciable en (x_0, y_0))
- 3) El plano tangente en $(x_0, y_0, 0)$ no es horizontal para lo cual basta que por lo menos una de las derivadas parciales F_x o F_y no sea nula en (x_0, y_0) , entonces existe curva de intersección de la superficie $z = F(x, y)$ con el plano coordenado $z = 0$ en las proximidades de $(x_0, y_0, 0)$ y en consecuencia $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$ o bien $x = g(y)$.

Los resultados obtenidos de manera geométrica intuitiva los discutiremos a continuación en forma analítica rigurosa.

TEOREMA I

De existencia, unicidad, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de funciones definidas en forma implícita

Sea $z = F(x, y)$ una función de dos variables que satisfaga las siguientes condiciones:

1. $F(x_0; y_0) = 0$ (existe solución inicial), para algún punto $P(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
2. $F_x(x; y)$ y $F_y(x; y)$ existen y son continuas, lo cual asegura la Diferenciabilidad de $F(x; y)$ como función de dos variables y por lo tanto la existencia del plano tangente a la superficie $z = F(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, 0)$.
3. $F_y(x_0; y_0) \neq 0$, lo cual asegura que el plano tangente en $(x_0, y_0, 0)$ no es horizontal, entonces es posible determinar un entorno rectangular que contenga al punto $P(x_0; y_0)$:
$$\begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ y_1 < y < y_2 \end{cases}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

tal que para cada x perteneciente al intervalo de la recta real (x_1, x_2) , la ecuación $F(x, y) = 0$ determina uniformemente un valor $y = f(x)$, perteneciente al intervalo real (y_1, y_2) cumpliéndose $F[x; f(x)] = 0 \quad \forall \quad x \in (x_1, x_2)$. La función $y = f(x)$ satisface la ecuación $y_0 = f(x_0)$. Además $y = f(x)$ es continua y diferenciable y su derivada y diferencial son respectivamente:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x; y)}{F_y(x; y)} \quad , \quad dy = -\frac{F_x(x; y)}{F_y(x; y)} \cdot dx \quad , \quad \text{en todo punto en que}$$

$$F_y(x, y) \neq 0.$$

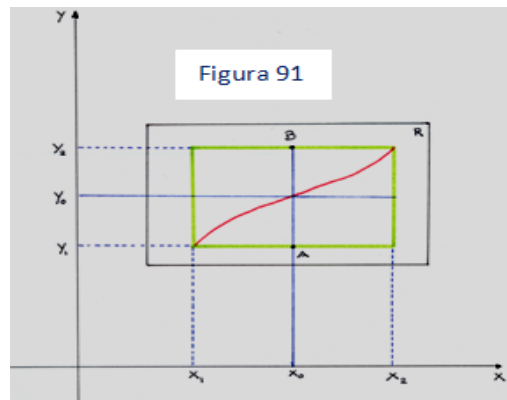
Demostración:

El plan de demostración es el siguiente:

- a) Existencia y unicidad
- b) Continuidad
- c) Derivabilidad y Diferenciabilidad

a) Existencia y unicidad.

Estableceremos un rectángulo $x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$ en el cual la ecuación $F(x; y) = 0$ determina una única función $y = f(x)$; pero se debe aclarar que no vamos a tratar de encontrar el mayor rectángulo de este tipo, solo debemos demostrar que ese rectángulo existe. Ver Figura 91



[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

Como por hipótesis $F_y(x; y)$ es continua y, $F_y(x_0; y_0) \neq 0$ podemos encontrar un rectángulo R que contiene a $P(x_0; y_0)$ que sea lo necesariamente pequeño como para que en todo R la función $F_y(x; y) = z_y$ sea diferente de cero y por lo tanto tenga siempre el mismo signo.

Sin perder generalidad podemos suponer que este signo es positivo.

Si no fuera así, reemplazaríamos F por $-F$, para lo cual también vale $-F(x_0; y_0) = 0$, o sea $F_y(x; y) > 0 \quad \forall (x; y) \in R$ (1)

Por (1), en cada segmento $x = \text{cte.}$ (paralelo al eje y) contenido en R ; la función $z = f(x, y)$ considerada como función de y solamente ($x = \text{cte.}$) es monótona creciente en sentido estricto. Consideremos en particular $x = x_0$. Como $F(x_0; y_0) = 0$, y por ser monótona estrictamente creciente la función $z = F(x_0, y)$, existirá un punto $A(x_0; y_1)$, $y_1 < y_0$ tal que el valor de F en A es negativo; $F(x_0; y_1) < 0$ y existirá un punto B tal que $F(x_0; y_2) > 0$.

Pero por la continuidad de $z = F(x, y)$ se deduce que $z = F(x, y)$ será negativa no solo en A , sino en todo un entorno de A , en particular, a lo largo de un segmento $y = y_1$ que contenga a ' A ' y esté contenido en R y $z = F(x, y)$ será positiva no solo en B , sino en todo un entorno de B , en particular, a lo largo de un segmento $y = y_2$ que contenga B y este contenido en R .

Ahora elegimos el intervalo $x_1 < x < x_2$ lo suficientemente pequeño como para

que:
$$\begin{cases} F(x; y_1) < 0 \\ F(x; y_2) > 0 \end{cases} \quad \forall x / x_1 < x < x_2$$
 Supongamos que fijamos x en cualquier

valor del intervalo $x_1 < x < x_2$, y que y aumenta desde y_1 hasta y_2 . Como

$F_y(x; y) > 0$, $z = F(x, y)$ crece estrictamente continua y monótonamente desde un valor negativo $F(x; y_1) < 0$, hasta un valor positivo $F(x; y_2) > 0$, y no puede nunca tener el mismo valor para dos puntos de igual abscisa x .

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

Entonces, para cada valor de x del intervalo $x_1 < x < x_2$, existe un valor de y unívocamente determinado para el cual $F(x; y) = 0$ con $y_1 < y < y_2$. Luego, este valor de y es función de x : $y = f(x)$. Hemos probado así la existencia y unicidad de la función $y = f(x)$ que es solución de $F(x, y) = 0$ en el rectángulo $x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$.

Nota: Es evidente el papel primordial desempeñado en la demostración por la hipótesis $F_y(x_0; y_0) \neq 0$, que nos asegura que el plano tangente en $(x_0, y_0, 0)$ no es horizontal.

b) Continuidad de $y = f(x)$.

Queremos demostrar que $y = f(x)$ es continua en el rectángulo $x_1 < x < x_2$; $y_1 < y < y_2$.

Demostraremos primeramente la continuidad de la función $y = f(x)$ en un punto $(x_0; y_0)$ que satisface la ecuación $y_0 = f(x_0)$.

Para ello, debe demostrarse que dado un $\xi > 0$ arbitrario, es posible hallar otro número positivo $\delta = \delta(\xi)$ tal que: $|f(x) - f(x_0)| < \xi$ para $|x - x_0| < \delta$.

De igual forma que en el punto anterior, se demuestra que existe unívocamente $y = f(x)$ / $F(x, y) = 0$ en el rectángulo $y_0 - \xi < y < y_0 + \xi$; $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, donde δ se ha elegido en función de ξ tal como antes elegimos el intervalo $x_1 < x < x_2$, en función del $y_1 < y < y_2$.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

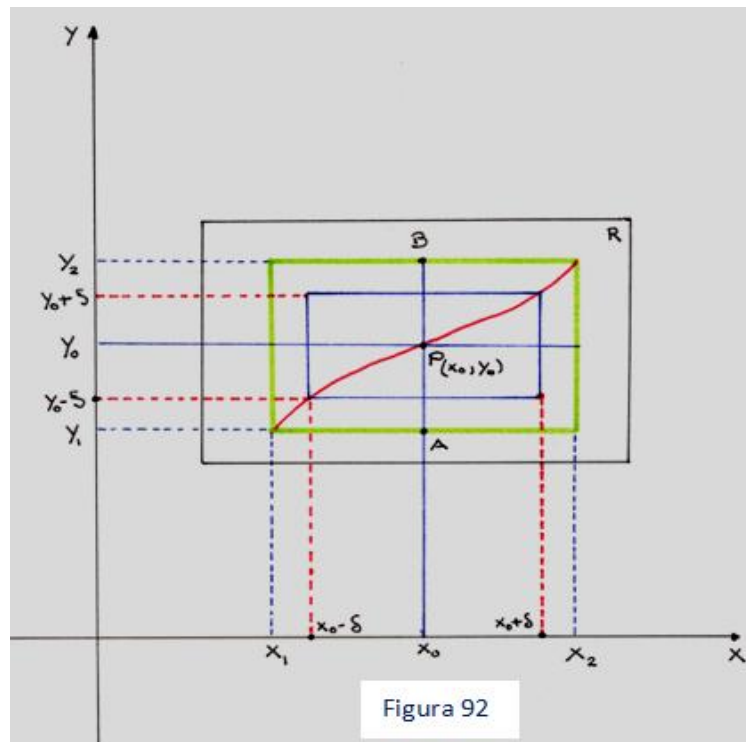


Figura 92

$$\begin{aligned} y_0 - \xi < y < y_0 + \xi \\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} |y - y_0| < \xi \\ |x - x_0| < \delta \end{aligned} \quad \text{Pero} \quad \begin{aligned} y_0 &= f(x_0) \\ y &= f(x) \end{aligned} \quad \text{luego}$$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &< \xi, \\ |x - x_0| &< \delta. \end{aligned}$$

Esto último nos indica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, que nos determina la continuidad de $y = f(x)$ en x_0 .

Como este razonamiento puede aplicarse a cualquier punto del intervalo $x_1 < x < x_2$, queda probada la continuidad de $y = f(x)$ en todo este último intervalo.

c) Derivabilidad de $y = f(x)$.

Por la hipótesis segunda, que implica la diferenciabilidad de $z = F(x, y)$, podemos escribir:

$$\Delta z = \Delta F = F(x + h; y + k) - F(x; y) = h \cdot F_x(x; y) + k \cdot F_y(x; y) + \xi_1 \cdot h + \xi_2 \cdot k,$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

donde $\xi_1 \wedge \xi_2 \rightarrow 0$, con $h \wedge k \rightarrow 0$. (2)

Ahora, para $y = f(x)$, entre h y k no existe independencia.

Así, es $y+k = f(x+h)$, $\therefore k = f(x+h) - y = f(x+h) - f(x)$. (3)

Suponemos también que los puntos (x,y) ; $(x+h, y+k)$ pertenecen al rectángulo donde $y=f(x)$ esta definida en forma implícita por $F(x,y)=0$. Entonces es

$F(x;y) = 0$; $F(x+h; y+k) = 0$. Luego:

$0 = h.F_x + k.F_y + \xi_1.h + \xi_2.k$ Dividiendo por $h.F_y$ lo anterior, tenemos

$$0 = \frac{h.F_x}{h.F_y} + \frac{k.F_y}{h.F_y} + \frac{\xi_1.h}{h.F_y} + \frac{\xi_2.k}{h.F_y}, \text{ esto es}$$

$$0 = \frac{F_x}{F_y} + \frac{k}{h} + \frac{\varepsilon_1}{F_y} + \frac{k.\varepsilon_2}{h.F_y} = \frac{F_x}{F_y} + \frac{k}{h} \left[1 + \frac{\varepsilon_2}{F_y} \right] + \frac{\varepsilon_1}{F_y}, \quad \text{y tomando límite para}$$

$h \rightarrow 0$ será:

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} + \frac{k}{h} \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{F_y} \right) + \frac{\varepsilon_1}{F_y} \right] = \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h}, \text{ por (3) y (2) y la}$$

continuidad de $f(x)$. $\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$, o sea

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \text{ en } (x,y) / F_y(x,y) \neq 0. (4)$$

De (4) se deduce que $dy = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.dx$, esto es

$F_x(x,y).dx + F_y(x,y).dy = 0$. Resultado que se hubiera obtenido diferenciando

$F(x,y)=0$ como función de dos variables

2. Funciones Implícitas de n variable independiente. [2]

Aquí establecemos condiciones bajo las cuales una expresión de la forma

$F(x_1; x_2; \dots; x_n; y) = 0$ define IMPLICITAMENTE una función

$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ de n variables independientes.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

El teorema estudiado para funciones implícitas de una variable independiente se extiende naturalmente para funciones implícitas de n variables independientes. Como en este caso la demostración es similar a la ya vista, solo se enunciará el correspondiente teorema y se mostrará cómo se obtienen las formulas que figuran en él.

TEOREMA II

Sea $F(x_1; x_2; \dots; x_n; y) = 0$ una función de $n+1$ variables que satisface las siguientes condiciones:

1º) $F(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) = 0$ (existe solución inicial) para algún punto $P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

2º) $F_{x_1}; F_{x_2}; \dots; F_{x_n}; F_y$ existen y son continuas (lo que asegura la Diferenciabilidad de F),

3º) $F_y(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0) \neq 0$,

entonces es posible determinar un entorno que contenga al punto $P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0)$:

$$\begin{cases} x_i^1 < x_i < x_i^2 \\ y_1 < y < y_2 \end{cases} \quad i = 1; 2; 3; \dots; n, \text{ tal que en cada punto del entorno}$$

$$x_i^1 < x_i < x_i^2, i = 1, 2, \dots, n$$

la expresión $F(x_1; x_2; \dots; x_n; y) = 0$ determina un valor $y = f(x_1; x_2; \dots; x_n) \in (y_1, y_2)$ que es único.

En el último entorno mencionado se cumple que:

$$F[x_1; x_2; \dots; x_n; f(x_1; x_2; \dots; x_n)] = 0. \text{ Además: } y_0 = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \text{ y la función}$$

$y = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ es continua, diferenciable y sus derivadas parciales están dadas por:

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = -\frac{F_{x_k}(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n; y)}{F_y(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n; y)} \quad \forall \quad k=1,2,\dots,n, \text{ en todo punto en que}$$

$$F_y(x_1, \dots, x_n, y) \neq 0.$$

Para obtener esta fórmula partimos de la diferencial de una función de n variables

$$y = f(x_1, \dots, x_n) : \quad dy = A_1 \cdot dx_1 + A_2 \cdot dx_2 + \dots + A_n \cdot dx_n, \quad \text{donde es}$$

$$A_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \quad (5)$$

Por otra parte, como $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$, es diferenciable, podemos escribir:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot dx_n + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = 0$$

Despejando dy en todo punto en que es $F_y(x_1, \dots, x_n, y) \neq 0$, será:

$$dy = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \cdot dx_1 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \cdot dx_2 - \dots - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \cdot dx_n$$

Comparando esta última expresión con (5) será: $A_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ para $i =$

1,2,3,...,n.

3. Derivadas y diferenciales sucesivas de funciones implícitas [3]

Por comodidad trabajaremos con una expresión de dos variables: $F(x; y) = 0$ que suponemos cumple las condiciones del teorema 1 visto para definir $y=f(x)$, ya que la generalización es inmediata.

Hemos visto que $\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{F_x(x; y)}{F_y(x; y)}$ en donde $y = f(x)$, o sea

$F_x(x; y) + y' \cdot F_y(x; y) = 0$. Derivando esta última expresión con respecto a “ x ” será:

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \left[\frac{\partial F_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \right] \cdot y' + F_y \cdot \frac{dy'}{dx} = 0 ,$$

$$\therefore F_{xx} + F_{xy} \cdot y' + [F_{yx} + F_{yy} \cdot y'] \cdot y' + F_y \cdot y'' = 0 , \quad (6)$$

$$\therefore y'' = \frac{-F_{xx} - F_{xy} \cdot y' - F_{yx} \cdot y' - F_{yy} \cdot y'^2}{F_y} = \frac{-F_{xx} - 2F_{xy} \cdot y' - F_{yy} \cdot y'^2}{F_y}$$

Si deseamos calcular y''' debemos derivar (6) respecto de x , y proceder como antes.

Lo mismo hacemos para las derivadas de orden superior.

Para calcular las diferenciales sucesivas partimos de: $F_x(x; y) \cdot dx + F_y(x; y) \cdot dy = 0$ y

diferenciamos esa expresión teniendo en cuenta que $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} d[F_x \cdot dx + F_y \cdot dy] &= d[F_x(x; y) \cdot dx] + d[F_y(x; y) \cdot dy] = \\ &= d[F_x(x; y)]dx + d[F_y(x; y)]dy + F_y(x; y) \cdot d[dy] = \\ &= [F_{xx} \cdot dx + F_{xy} \cdot dy]dx + [F_{yx} \cdot dx + F_{yy} \cdot dy]dy + F_y(x; y) \cdot d^2y = \\ &= F_{xx} \cdot dx^2 + 2F_{xy} \cdot dx \cdot dy + F_{yy} \cdot dy^2 + F_y \cdot d^2y = \quad (7) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right]^2 \cdot F(x; y) + F_y \cdot d^2y = 0, \\ \therefore d^2y &= - \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial}{\partial y} \cdot dy \right]^2 \cdot F(x; y)}{F_y(x; y)} \end{aligned}$$

Para calcular d^3y se diferencia (7) y luego se despeja d^3y . Para calcular las diferenciales de orden superior de $y=f(x)$ se procede en forma análoga a la anterior.

4. Sistemas De Funciones Implícitas. [3]

Se trata de investigar, condiciones bajo las cuales un sistema de la forma:

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2) = 0 \\ F_2(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2) = 0 \end{cases} \quad \text{Determina una solución dada por un sistema de funciones}$$

explícitas: $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ y_2 = f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{cases}$ y cuáles son las propiedades de la

solución, en relación con las propiedades de $F_1 \wedge F_2$.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

Definiremos primeramente el término JACOBIANO o DETERMINANTE FUNCIONAL.

Si $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$ son dos funciones continuas de las variables independientes x, y ; siendo sus derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial y}$ también continuas, la expresión:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \text{Recibe el nombre de Jacobiano o}$$

determinante funcional de u, v con respecto a x e y , y generalmente se denota con alguna de las siguientes expresiones:

$$J = J \frac{(u, v)}{(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \quad \text{Para funciones de } n \text{ variables:}$$

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ u_2 = u_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{-----} \\ u_n = u_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad \text{Es} \quad J \frac{(u_1, u_2, \dots, u_n)}{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

TEOREMA III

Si $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2) \wedge F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2)$ son dos funciones de $n+2$ variables, que cumplen las siguientes condiciones:

$$1^\circ) \begin{cases} F_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0) = 0 \\ F_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0) = 0 \end{cases} \quad \text{para algún punto } P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_1^0, y_2^0) \in \mathbb{R}^{n+2}$$

2º) $F_1 \wedge F_2$ admiten derivadas parciales de primer orden continuas en un entorno del punto P , lo que asegura la Diferenciabilidad de $F_1 \wedge F_2$ como función de $n+2$ variables.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

$$3^o) J_P = \left(\frac{\partial(F_1; F_2)}{\partial(y_1; y_2)} \right)_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}_P \neq 0,$$

Entonces se puede determinar un entorno que contenga al punto P (del espacio R^{n+2})

$$\begin{cases} x_J^1 < x_J < x_J^2 \\ y_1^1 < y_1 < y_1^2 \\ y_2^1 < y_2 < y_2^2 \end{cases} \quad J = 1, 2, \dots, n \text{ en el cual } \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, y_2) = 0 \end{cases} \quad (A)$$

Determina una solución: $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (B) \quad \text{y solo una.}$

$$\text{Se cumple que: } \begin{cases} y_1^0 = f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \\ y_2^0 = f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0), \end{cases}$$

$$\text{y que: } \begin{cases} F_1[x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n)] = 0 \\ F_2[x_1, x_2, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n)] = 0 \end{cases} \text{ en el entorno mencionado,}$$

siendo las funciones dadas en (B) continuas, diferenciables e independientes.

Demostración:

Partimos de la hipótesis $J_P \neq 0$, o sea $\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \neq 0$ en P.

Para que esto se cumpla, las cuatro derivadas no pueden ser simultáneamente nulas en

P, entonces sin perder generalidad suponemos que es: $\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \neq 0$ en P (C).

Ahora consideremos la ecuación $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2) = 0$ (D).

Pero las hipótesis 1 y 2 de este teorema, junto con (C) nos aseguran (Teorema II) que

de (D) se deduce: $y_1 = g(x_1; x_2; \dots; x_n; y_2)$ (E), función única continua y

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

diferenciable, cuya derivada respecto de y_2 es: $\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}$ en P.

(F)

Además se cumple que es $y_1^0 = g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_2^0)$. (E)

Si reemplazamos (E) en la expresión de F_2 se tiene:

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2) = F_2[x_1, x_2, \dots, g(x_1, \dots, x_n, y_2), y_2] = G[x_1, x_2, \dots, x_n, y_2]$$

cuya derivada respecto a y_2 (como función compuesta) será:

$$\frac{\partial G}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial y_2}.$$

Como $x_1; x_2; \dots; x_n$ no dependen de y_2 , serán: $\frac{\partial x_i}{\partial y_2} = 0$, por lo tanto: en

$P'(x_1^0, \dots, x_n^0, y_2^0)$ es

$$\frac{\partial G}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}. \text{ Pero por (F): } \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}}, \text{ y reemplazando esta}$$

expresión en la anterior, queda :

$$\frac{\partial G}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} \left[\frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \right]$$

$$\therefore \frac{\partial G}{\partial y_2} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} \cdot J_P \quad \text{Expresión que existe y es distinta de cero en}$$

$$P(x_1^0, \dots, x_n^0, y_2^0).$$

Pero las hipótesis 1 y 2 de este teorema juntamente con $\frac{\partial G}{\partial y_2} \neq 0$ en P y con E, nos

aseguran que: $F_2(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2) = G[x_1; x_2; \dots; x_n; y_2] = 0$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

determina una función $y_2 = f_2(x_1; x_2; \dots; x_n)$ que es única, continua y diferenciable y que cumple $y_2^0 = f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Si reemplazamos $y_2 = f_2(x_1; x_2; \dots; x_n)$ en la expresión (E) para y_1 , tendremos:

$$y_1 = g[x_1; x_2; \dots; x_n; f_2(x_1; x_2; \dots; x_n)] = f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \text{ Que resulta}$$

única continua, diferenciable y cumple

$$y_1^0 = g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_2^0) = g[x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, f_2(x_1^0, \dots, x_n^0)] = f_1(x_1^0, \dots, x_n^0) \text{ Reuniendo}$$

estas expresiones resulta la solución buscada:
$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) \\ y_2 = f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) \end{cases}$$

Calcularemos ahora las derivadas de y_1 e y_2 con respecto a cada una de las x_k .

Partimos del sistema:

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2) = 0, \\ F_2(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2) = 0, \end{cases}$$

y derivando (como función compuesta), cada una de ellas respecto de las x_k , (teniendo en cuenta que estas son independientes, todas las derivadas de la forma

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} \text{ son nulas para todo } j \neq k \text{ se obtiene: } \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_k} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_k} = 0, \end{cases}$$

donde las incógnitas son $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}$; $\frac{\partial y_2}{\partial x_k}$ Pasando en cada ecuación los términos

$$\text{independientes al segundo miembro, se tiene: } \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_1}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_k}, \end{cases}$$

que es un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, y que puede resolverse por la regla de CRAMER siempre que el determinante de los coeficientes sea distinto

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

de cero, o sea, siempre que: $\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} \neq 0$, cosa que ocurre, ya que este

determinante es el JACOBIANO antes visto y por hipótesis es $\neq 0$ en el punto P

.Resolviendo el sistema anterior, tendremos:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x_k} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x_k} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}}{J} = \frac{-\frac{\partial(F_1; F_2)}{\partial(x_k; y_2)}}{J} = \frac{-\frac{\partial(F_1; F_2)}{\partial(x_k; y_2)}}{\frac{\partial(F_1; F_2)}{\partial(y_1; y_2)}}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_k} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & -\frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & -\frac{\partial F_2}{\partial x_k} \end{bmatrix}}{J} = \frac{-\frac{\partial(F_1; F_2)}{\partial(y_1; x_k)}}{J} = -\frac{\frac{\partial(F_1; F_2)}{\partial(y_1; x_k)}}{\frac{\partial(F_1; F_2)}{\partial(y_1; y_2)}}$$

Habrán n derivadas de cada una de las funciones $y_1 ; y_2$ para $k = 1; \dots; n$.

Calculamos ahora las diferenciales dy_1, dy_2 . Diferenciando el sistema $F_1=0, F_2=0$, será:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \cdot dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot dy_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot dy_2 = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \cdot dx_n + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot dy_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot dy_2 = 0, \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot dy_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot dy_2 = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \cdot dx_k, \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot dy_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot dy_2 = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_2}{\partial x_k} \cdot dx_k, \end{cases}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

Que también siempre en el punto P puede resolverse en dy_1, dy_2 como antes, por CRAMER.

5. Aplicaciones De Los Teoremas De Funciones Implícitas. [1]

Función inversa: Consideremos una función de una variable independiente $y=f(x)$. Vamos a mostrar cómo se puede utilizar el Teorema 1 de funciones implícitas para determinar condiciones bajo las cuales existirá la función inversa $x=g(y)$, cuáles son sus propiedades y como calcular su derivada.

Teorema 5: Si $y=f(x)$ es una función continua con derivada continua, y existe un punto $x=x_0$ con $y_0=f(x_0) \wedge f'(x_0) \neq 0$ (1), entonces es posible determinar un entorno que contiene al punto $x=x_0$ en el cual $y=f(x)$ define la función inversa $x=g(y)$.

Esta función es continua y derivable siendo su derivada $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, en todo punto

del entorno mencionado en el cual sea $f'(x) \neq 0$

Demostración: formemos la siguiente función auxiliar $F(x, y) = y - f(x)$ (2)

Si en esta expresión reemplazamos x por x_0 e y por y_0 ; teniendo en cuenta (1) se obtiene $F(x_0; y_0) = 0$ (3)

Además, como $f(x)$ es continua y con derivada continua, resulta que

$F_x(x, y); F_y(x, y)$ (4) existen y son continuas, puesto que $F_x(x, y) = -f'(x)$, $F_y(x, y) = 1$ (que se obtienen derivando (2)).

Pero $F_x(x_0, y_0) = -f'(x_0) \neq 0$ por hipótesis. Esto último, juntamente con (3) y (4), nos asegura por el Teorema 1, que existe $x = g(y)$, que es única, continua y derivable, definida por $F(x, y) = y - f(x) = 0$ en un entorno del punto $P(x_0, y_0)$, siendo:

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)} = -\frac{1}{-f'(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{o sea}$$

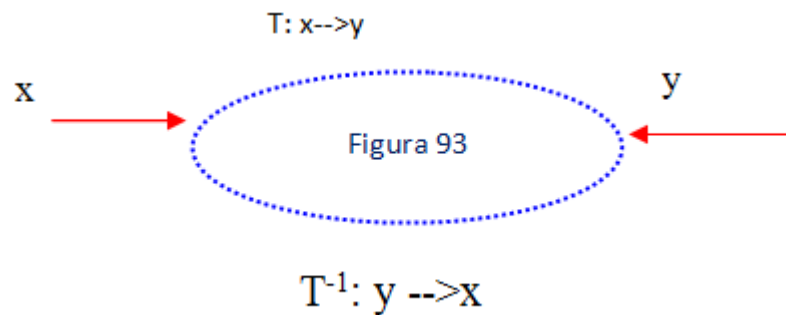
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

con lo cual queda demostrado el Teorema 5.

Obsérvese que este Teorema no nos informa sobre la forma explícita de la función inversa $x=g(y)$, sino que, nos suministra condiciones bajo las cuales seguro existe ésta y cuáles son sus propiedades en relación con las de $y=f(x)$.

Nótese que $y=f(x)$ puede interpretarse como una transformación $T: x \rightarrow y$, y cuando existe inversa

$x = g(y)$, se tendrá la transformación inversa $T^{-1}: y \rightarrow x$



Transformación Inversa

Consideremos ahora el caso de un sistema de funciones o transformación de la forma

$$T: \begin{cases} u = \varphi(x, y), \\ v = \psi(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

Cabe preguntarse bajo qué supuestos existirá la transformación inversa

$$T^{-1}: \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \end{cases} \quad (6) \text{ en cuyo caso se tendría gráficamente:}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

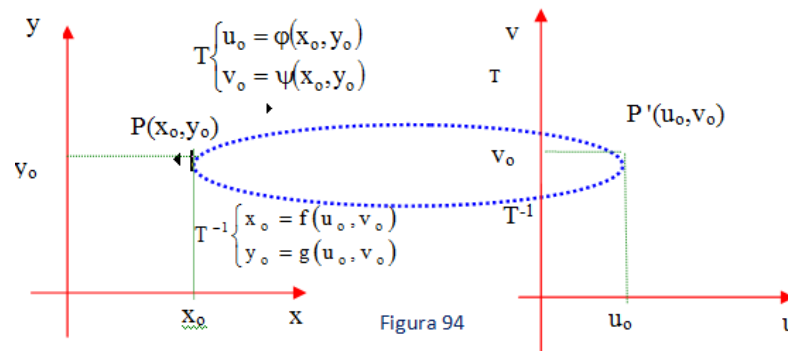


Figura 94

Teorema 6: Si las funciones $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ pertenecen a la clase C^1 (es decir son continuas y con derivadas primeras continuas.) y existe un punto $P(x_0, y_0)$ con

$$\begin{cases} u_0 = \varphi(x_0, y_0) \\ v_0 = \psi(x_0, y_0) \end{cases} \quad (A) \quad \text{y} \quad \text{el Jacobiano en } P$$

$$J_p = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}_p = J \frac{(\varphi, \psi)}{(x, y)}_p \neq 0,$$

entonces se puede determinar un entorno que contenga al punto P , en el cual la transformación (5) admite inversa (6)

Las funciones $x = f(u, v)$ y $y = g(u, v)$ son diferenciables.

Demostración: Formemos el sistema de funciones auxiliares.

$$\begin{cases} F_1(u, v, x, y) = u - \varphi(x, y) \\ F_2(u, v, x, y) = v - \psi(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

Si reemplazamos u, v, x, y por u_0, v_0, x_0, y_0 respectivamente en (7) y tenemos en cuenta (A)

Obtenemos

$$\begin{cases} F_1(u_0, v_0, x_0, y_0) = u_0 - \varphi(x_0, y_0) = 0, \\ F_2(u_0, v_0, x_0, y_0) = v_0 - \psi(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Derivando (7) se tiene:

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\varphi_x(x, y); \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\varphi_y(x, y); \frac{\partial F_1}{\partial u} = 1; \frac{\partial F_1}{\partial v} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\psi_x(x, y); \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\psi_y(x, y); \frac{\partial F_2}{\partial u} = 0; \frac{\partial F_2}{\partial v} = 1,$$

y como las funciones $u = \varphi(x, y) \wedge v = \psi(x, y)$ pertenecen a la clase C^1 por hipótesis, resulta que F_1 y F_2 también pertenecen a la clase C^1

Finalmente, el Jacobiano de F_1 y F_2 respecto de x e y es:

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} = J \frac{(F_1, F_2)}{(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} & -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} & -\frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = J \frac{(\varphi, \psi)}{(x, y)} \quad (10)$$

siendo por hipótesis este Jacobiano en el punto P distinto de cero. Esta última

condición, o sea $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)_p} \neq 0$, juntamente con (8) y que F_1 y F_2 sean de la clase

C^1 nos aseguran (Teorema 3) que existe el sistema:

$$\begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \end{cases} \quad (11) \quad \text{definido por} \quad \begin{cases} F_1 = u - \varphi(x, y) = 0, \\ F_2 = v - \psi(x, y) = 0, \end{cases} \quad \text{en un entorno}$$

del punto (u_0, v_0, x_0, y_0) el cual está formado por dos funciones que son continuas, independientes y diferenciables, siendo sus derivadas:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, y)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -\varphi_y \\ 0 & -\psi_y \end{vmatrix}}{J \frac{(F_1, F_2)}{(x, y)}} = -\frac{-\psi_y}{J} = \frac{\psi_y}{J}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(v, y)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\varphi_y \\ 1 & -\psi_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}} = -\frac{\varphi_y}{J}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

$$\frac{\partial y}{\partial u} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, u)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}} = - \frac{\psi_x}{J} \quad ,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = - \frac{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)}} = \frac{\varphi_x}{j}$$

Este teorema informa sobre condiciones bajo las cuales seguro existe (6) y cuáles son sus propiedades en relación con las de (5), pero, en general no proporciona la forma explícitamente (6).

La generalización para un sistema de n funciones de n variables se realiza mediante un procedimiento similar. Condiciones suficientes para la existencia de la transformación inversa se expresan en un teorema análogo a los anteriores.

Transformación de Coordenadas

Hemos estudiado los sistemas de la forma

$$T \begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases} \quad \text{y su inversa} \quad T^{-1} \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases}$$

Es evidente que estos pueden interpretarse como cambios de coordenadas en el plano. El hecho fundamental concerniente a los cambios de coordenadas es obviamente la inversibilidad o sea la biunicidad de la correspondiente transformación, esto es que, a cada punto de un espacio le corresponde uno y solo uno del espacio transformado.

Por el Teorema 6, este problema de decidir si un sistema dado de funciones define o no un cambio de coordenadas queda resuelto afirmativamente cuando:

1) las funciones son de la clase C^1 , y

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

2) el Jacobiano de la transformación es distinto de cero en todo punto de la región considerada.

Puesto que entonces vimos que existe la transformación inversa.

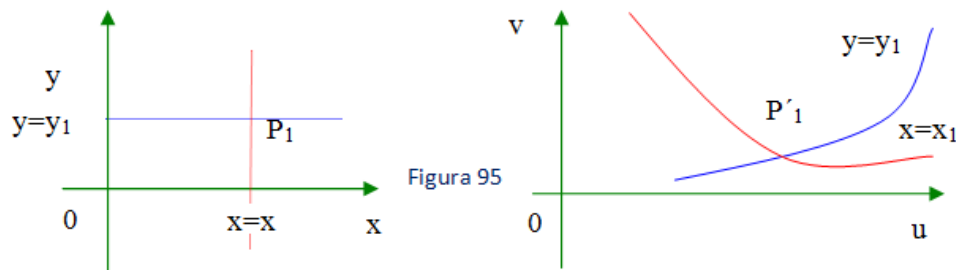
Consideremos ahora algunos hechos generales referentes en primer término a los cambios de coordenadas en el plano definido por:

$$(12) \quad T \begin{cases} u = \varphi(x, y) \\ v = \psi(x, y) \end{cases} \quad \text{y su inversa} \quad T^{-1} \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{cases} \quad (13)$$

Cuando se dan las coordenadas (x_1, y_1) de un punto P_1 respecto de un sistema de coordenadas cartesianas " x, y ", lo que en realidad se hace es fijar la posición de P_1 como intersección de las rectas $x=x_1$; $y=y_1$.

Pero al fijar $x=x_1$, (12) queda $\begin{cases} u = \varphi(x_1, y) \\ v = \psi(x_1, y) \end{cases}$, que representan las ecuaciones paramétricas de una curva en el plano " u, v ", con parámetro " y " ya que $x=\text{constante}$.

De modo que a la recta $x=x_1$ del plano " x, y " le corresponde una curva del plano " u, v "



Análogamente, al fijar la ordenada $y=y_1$ obtenemos las ecuaciones paramétricas de otra curva del plano " u, v ", con parámetro " x ", ya que $y=\text{constante}$. De manera que a la recta $y=y_1$ del plano (x, y) le corresponde otra curva en el plano " u, v ". Entonces al punto P_1 , que en el plano " x, y " es la intersección de las rectas $x=x_1$; $y=y_1$, le corresponde en el plano " u, v " el punto P'_1 , que es la intersección de las curvas respectivas mencionadas.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

6. Jacobiano De Un Producto O Composición De Transformaciones. [1]

Consideremos la siguiente transformación:

$$F: \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (16) \text{ Cuyo Jacobiano es:}$$

$$J_1 = J \frac{(y_1, y_2, \dots, y_n)}{(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \quad (17) \quad \text{y supongamos que las}$$

variables x_i dependen de otras t_j variables, es decir:

[illegible]

$$J_2 = J \frac{(x_1, x_2, \dots, x_n)}{(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)}. \quad (19)$$

Hagamos ahora el producto de los jacobianos 1 y 2 (17) y (19)

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (20)$$

Recordando la forma como se realiza el producto de matrices obtenemos:

$$a_{11} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_3} + + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

Pero la sumatoria es $\frac{\partial y_1}{\partial t_1}$. Luego $a_{11} = \frac{\partial y_1}{\partial t_1}$, y, en general

$$a_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_j} = \frac{\partial y_i}{\partial t_j}, \text{ Resultado} \quad \text{que}$$

reemplazado en (20) da:

$$J_1 \cdot J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t_1} & \frac{\partial y_1}{\partial t_2} \dots & \frac{\partial y_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t_1} & \frac{\partial y_2}{\partial t_2} \dots & \frac{\partial y_2}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial t_1} & \frac{\partial y_n}{\partial t_2} \dots & \frac{\partial y_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}$$

o sea que:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)}$$

Notemos que el segundo miembro resulta ser el Jacobiano de la transformación producto o composición de F y G: F. G. Vale decir que el Jacobiano del producto o composición de dos transformaciones es igual al producto de los jacobianos de cada una de ellas. Como el producto de transformaciones no es, en general, conmutativo,

hay que tener en cuenta el orden. Veamos ahora el caso particular en que $\vec{y} = \vec{t}$ o sea: $y_1=t_1; y_2=t_2 \dots \dots y_n=t_n$

Resulta entonces que el producto de las transformaciones (18) y (16) da como resultado la transformación identidad. Por lo tanto, por definición de transformación inversa, (18) es la inversa de (16) o sea $G=F^{-1}$:

$$F: \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}, F^{-1} \begin{cases} x_1 = g_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ x_2 = g_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \dots \dots \\ x_n = g_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

Haciendo el producto de los jacobianos, tenemos:

$$J \frac{(y_1, y_2, \dots, y_n)}{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot J \frac{(x_1, x_2, \dots, x_n)}{(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

en donde, según vimos, es:

$$a_{11} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial y_1} = \frac{\partial y_1}{\partial y_1} = 1$$

$$a_{12} = \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = 0,$$

ya que y_1 no depende de y_2 . Entonces, todos los a_{ij} serán iguales a cero para $i \neq j$, y cuando $i=j$ $a_{ij} = 1$. Así es:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

De donde:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = 1.$$

Luego:

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}},$$

Lo que nos dice que el Jacobiano de la transformación inversa de una transformación es igual al inverso del Jacobiano de la transformación original, si esta admite inversa.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[3] CÁLCULO VECTORIAL (Tercera Edición) Jerrold E. Marsden & Anthony J. Tromba

INTEGRALES MULTIPLES

1. Definición De Integral Doble. [3]

Sea F una región de área A del plano " x y ", F incluye su frontera (Región Cerrada).

Subdividimos al plano " x y " en rectángulos mediante rectas paralelas a los ejes de coordenadas (figura 100).

Partiendo de algún lugar conveniente (tal como el extremo superior izquierdo de F), numeramos sistemáticamente todos los rectángulos que están dentro de F .

Supongamos que hay " n " de tales rectángulos y los designamos con $r_1, r_2, \dots, r_n$.

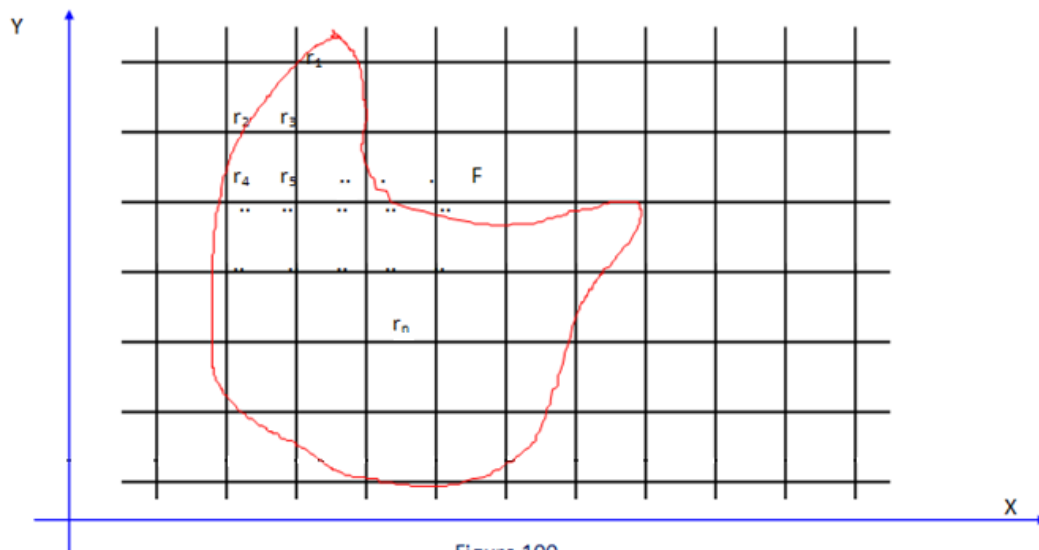


Figura 100

Utilizamos los símbolos $A(r_1), A(r_2), \dots, A(r_n)$ para las áreas de estos rectángulos.

El conjunto de los n rectángulos $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ se llama una SUBDIVISION Δ de F .

La NORMA de la subdivisión que generalmente se indica con $\|\Delta\|$, es la longitud de la diagonal del mayor rectángulo de la subdivisión Δ .

Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función definida para todo (x, y) de la región F .

La definición para la INTEGRAL DOBLE de f SOBRE LA REGION F es análoga a la definición de integrales para funciones de una variable. Elegimos un punto arbitrario en cada uno de los rectángulos de la subdivisión Δ , designando las coordenadas del punto en el rectángulo r_i con (ξ_i, η_i) . Ahora formamos la suma: $f(\xi_i, \eta_i)$.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

$$A(r_1) + f(\xi_2, \eta_2) \cdot A(r_2) + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \cdot A(r_n) \text{ en forma general } \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(r_i) \quad (1)$$

Esta suma es una aproximación a la integral doble que definiremos; y se denomina “SUMA INTEGRAL”.

Las sumas tales como (1) pueden formarse para subdivisiones con cualquier Norma positiva y con el n -ésimo punto (ξ_i, η_i) elegido en forma arbitraria en el rectángulo r_i .

2. Definición. [3]

Un número L es el límite de las sumas del tipo (1) $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(r_i) = L$ Si dado un $\varepsilon > 0$; $\exists \delta$

$$> 0 \quad / \quad \left[\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot A(r_i) - L \right] < \varepsilon \quad \text{para toda subdivisión } \Delta \text{ con } ||\Delta|| < \delta \text{ y para}$$

todas las elecciones posibles de los puntos (ξ_i, η_i) en los rectángulos r_i . Puede demostrarse que si el número L existe entonces debe ser único.

Si f está definida en una región F y el número L , definido anteriormente, existe, decimos que f es INTEGRABLE SOBRE F , y escribimos: $\iint_F f(x, y) \cdot dA$

A esta expresión la llamaremos también INTEGRAL DOBLE DE f SOBRE F . La integral doble tiene una interpretación geométrica como volumen de un sólido. Efectivamente cada término de la sumatoria (1) representa el volumen de un cuerpo elemental de base (r_i) y altura $h = f(\xi_i, \eta_i)$.

Siendo $z = f(x, y)$ una función continua en el dominio cerrado representado por la REGION F , la sumatoria (1) tiene un límite si la diagonal máxima de Δr_i tiende a cero con n tendiendo a infinito. Siendo este límite siempre el mismo, cualquiera sea el modo de la división del dominio de los elementos Δr_i , y la selección del punto de coordenadas (ξ_i, η_i) en los dominios parciales Δr_i .

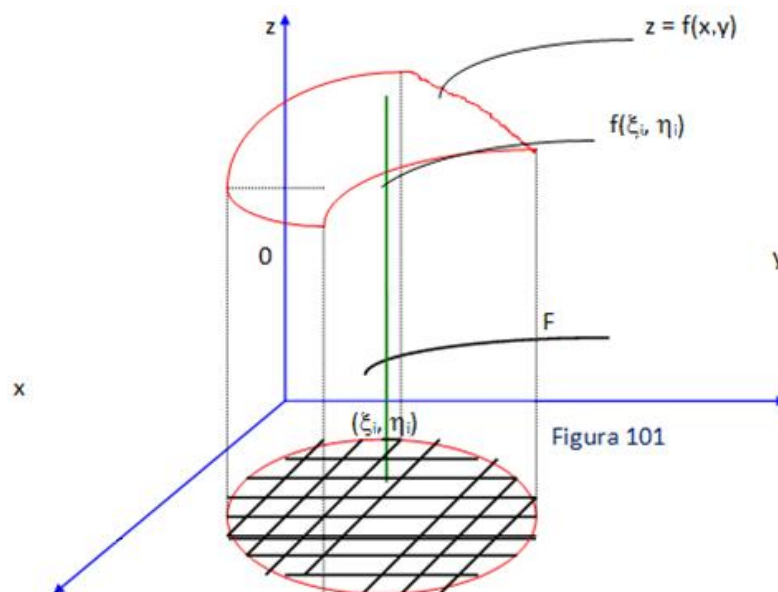
Este límite se llama integral doble de la función $f(x, y)$ sobre F y si $f(x, y) \geq 0$, la integral doble es igual al volumen del cuerpo limitado por la superficie $z = f(x, y)$, el plano $z = 0$ y la superficie cuyas generatrices son paralelas al eje Oz a través de la frontera de F . (fig. 101)

$$V(s) = \iint_F f(x, y) \cdot dA \quad \text{Siendo } V(s) \text{ el volumen del sólido definido por } (x, y) \in F, 0 \leq z \leq f(x, y)$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>



3. Propiedades De La Integral Doble. [1]

Enunciaremos varias propiedades de las integrales dobles en analogía con las propiedades de la integral definida de funciones de una variable.

TEOREMA

Si c es un número y f es integrable sobre una región cerrada F , entonces $c \cdot f$ es integrable y:

$$\iint_F c \cdot f(x, y) \cdot dA = c \cdot \iint_F f(x, y) \cdot dA$$

TEOREMA

Si f y g son integrables sobre una región cerrada F , entonces:

$$\iint_F [f(x, y) + g(x, y)] \cdot dA = \iint_F f(x, y) \cdot dA + \iint_F g(x, y) \cdot dA$$

El resultado de este teorema se puede extender a cualquier número finito de funciones integrables.

Las demostraciones de los teoremas anteriores resultan directamente de la definición.

TEOREMA

Supongamos que f es integrable sobre una región cerrada F y $m \leq f(x, y) \leq M \quad \forall (x, y) \in F$ entonces si

$A(F)$ designa el área de la región F , tenemos: $m \cdot A(F) \leq \iint_F f(x, y) \cdot dA \leq M \cdot A(F)$

TEOREMA

Si f y g son integrables sobre F y $f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in F$, entonces

$$\iint_F f(x, y) \cdot dA \leq \iint_F g(x, y) \cdot dA$$

TEOREMA

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Si se hace una partición de la región cerrada F en las regiones F_1 y F_2 ; es decir $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ y $F_1 \cup F_2 = F$ y si $f(x, y)$ es continua en F se tiene: $\iint_F f(x, y).dA = \iint_{F_1} f(x, y).dA + \iint_{F_2} f(x, y).dA$

4. Cálculo De Las Integrales Dobles. [2]

La definición de integral doble no es muy útil para la evaluación en cualquier caso particular.

Naturalmente, puede suceder que la función $f(x, y)$ y la región F sean simples, de manera que el límite de la suma (1) pueda calcularse directamente. Sin embargo, en general no se pueden determinar tales límites.

Como en el caso de las integrales ordinarias y curvilíneas, conviene desarrollar métodos simples y de rutina para determinar el valor de una integral doble dada.

Sea F en rectángulo cuyos lados son $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.

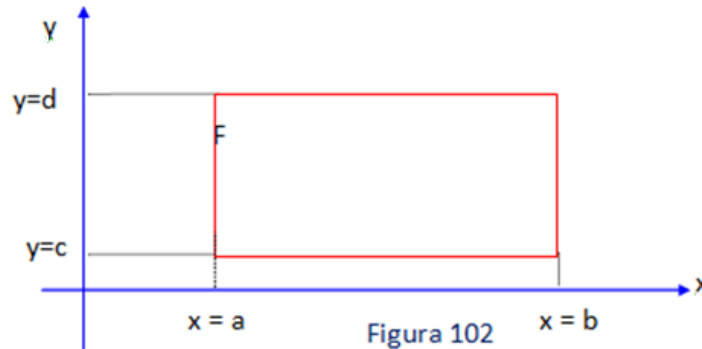


Figura 102

Suponemos que $z = f(x, y)$ es continua en cada $(x, y) \in F$. Formemos la integral simple con respecto a x

$$\int_a^b f(x, y).dx \text{ donde se mantiene fijo } y \text{ al realizar la integración.}$$

Naturalmente, el valor de la integral anterior dependerá del valor utilizado para y o sea que podemos

escribir: $A(y) = \int_a^b f(x, y).dx$

La función $A(y)$ está definida para $c \leq y \leq d$ y se puede demostrar que si $f(x, y)$ es continua en F entonces $A(y)$ es continua en $[c; d]$.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

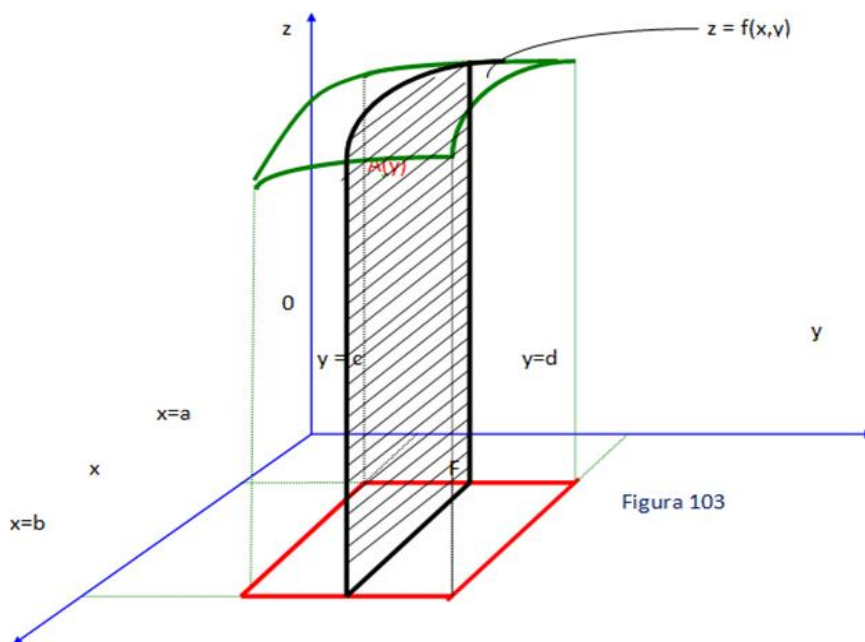


Figura 103

Se puede calcular la integral de $A(y)$ y se escribe $\int_c^d A(y).dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y).dx \right] dy$ (2)

Podríamos haber fijado primero x , luego formar la integral $B(x) = \int_c^d f(x, y).dy$ entonces

$$\int_a^b B(x).dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y).dy \right] dx \quad (3)$$

Obsérvese que las integrales se calculan sucesivamente por lo que reciben el nombre de

5. Integrales Iteradas. [3]

En (2) integramos primero con respecto a x (considerando y constante) y luego con respecto a y ; en (3) integramos utilizando un orden inverso.

Se pueden definir las integrales iteradas sobre regiones F limitadas por curvas.

Esta situación es más complicada que la que hemos visto.

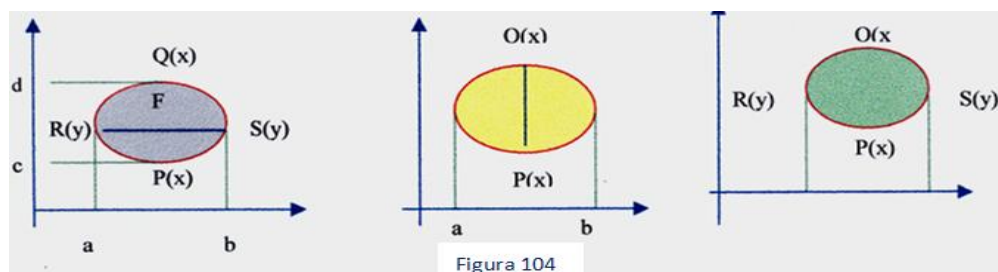


Figura 104

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Consideremos una región F (ver figuras) donde la frontera está formada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y =$

$p(x)$, $y = q(x)$ con $p(x) < q(x)$ para $a \leq x \leq b$. Definimos $\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) \cdot dy \cdot dx$ donde primero

integramos (para x fijo) desde la curva inferior hasta la superior, es decir a lo largo de un segmento típico. Luego integramos con respecto a x desde a hasta b . Con mayor generalidad se puede definir las integrales iteradas sobre una región F, integrando primero respecto de y tenemos

$$\int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) \cdot dy \cdot dx \quad \text{integrando respecto de } x \text{ será } \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

EJEMPLO

Dada la función $f(x, y) = x \cdot y$ y la región triangular F limitada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$, $x = 2$, hallar los valores de ambas integrales iteradas. Integrando respecto a y primero tenemos:

$$\int_0^2 \int_0^{2x} x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \int_0^2 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} dx = \int_0^2 2 \cdot x^3 \cdot dx = \left[\frac{x^4}{2} \right]_0^2 = 8$$

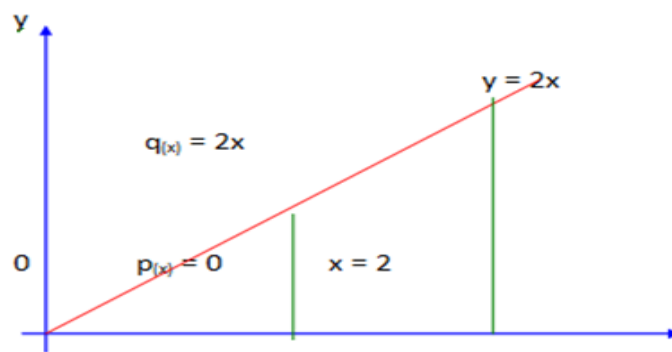


Figura 105

Integrando en x tendremos:

$$\int_0^4 \int_{y/2}^2 x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \int_0^4 \left[y \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{y/2}^2 dy = \int_0^4 [2y - (y^3/8)] \cdot dy = \left[y^2 - \frac{y^4}{32} \right]_0^4 = 16 - 8 = 8$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

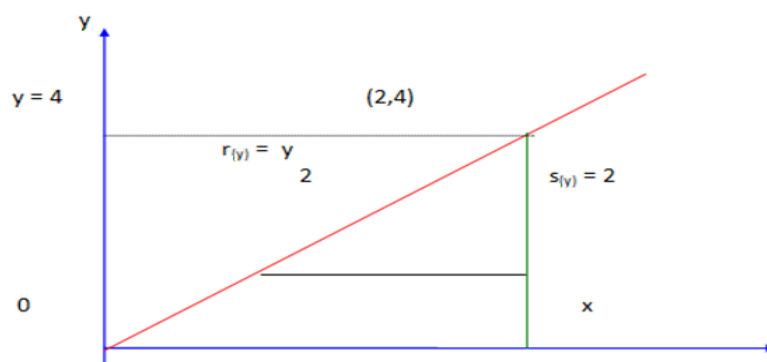


Figura 106

No es coincidencia que las dos integrales tengan el mismo valor. El siguiente teorema describe esta situación.

TEOREMA

Supongamos que F es una región cerrada que consta de todo (x, y) / $a \leq x \leq b$, $p(x) \leq y \leq q(x)$ donde p y q son continuas y $p(x) < q(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Suponemos que $f(x, y)$ es continua en (x, y) de F . Entonces: $\int_F f(x, y).dA = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y).dy.dx$

El resultado vale si la región F se representa en la forma $c \leq y \leq d$; $r(y) \leq x \leq s(y)$; $r(y) \leq s(y)$ para $c \leq y \leq d$.

d. En tal caso: $\int_F f(x, y).dA = \int_c^d \int_{r(y)}^{s(y)} f(x, y).dx.dy$

Es decir que cuando ambas integrales se pueden calcular coinciden con la integral doble y por lo tanto son iguales entre sí. Hemos considerado dos formas de expresar una región F en el plano x y.

Elas son: $a \leq x \leq b$; $p(x) \leq y \leq q(x)$
 $c \leq y \leq d$; $r(y) \leq x \leq s(y)$

Frecuentemente ocurre, que una región F se puede expresar más simplemente en una de las formas dadas anteriormente que en la otra.

En casos dudosos, una gráfica de F permite ver cual es más simple y por lo tanto, cuál de las integrales iteradas se calcula más fácilmente.

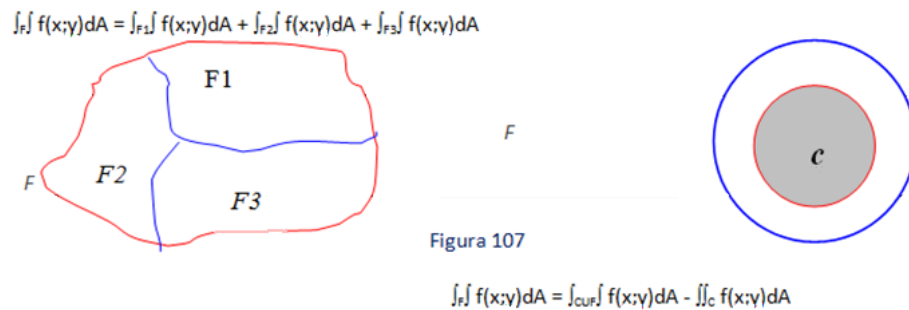
[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Una región F a veces no puede expresarse en la forma anterior. En tales casos se puede subdividir F en un número de regiones, tal que cada una de ellas tenga alguna de las dos formas. Efectuándose las integraciones en cada una de las subregiones y se suman los resultados.

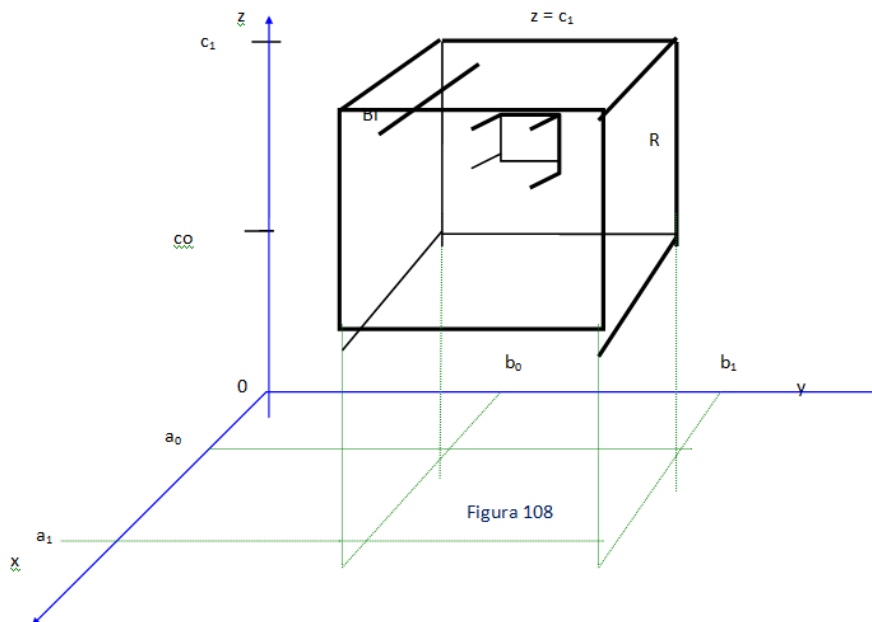
Las siguientes figuras ilustran algunos ejemplos de cómo se pueden efectuar tales subdivisiones en virtud de la propiedad aditiva de conjuntos:



6. Integral Triple. [1]

La definición de integral triple es análoga a la de integral doble. En el caso más simple consideremos una caja rectangular R acotada por 6 planos $x = a_0$, $x = a_1$, $y = b_0$, $y = b_1$, $z = c_0$, $z = c_1$; y sea $u = f(x; y; z)$ una función de tres variables definida en todo $(x; y; z)$ de R .

Subdividimos el espacio en cajas rectangulares mediante planos paralelos a los planos coordenados. Sean $B_1, B_2, \dots, B_n$ aquellas cajas de la subdivisión que contienen puntos de R .



[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Designaremos con $V(B_i)$ el volumen de la i -ésima caja B_i .

Elegimos un punto $P_i(\xi_i, \eta_i, \gamma_i)$ en B_i , esta elección se puede hacer en forma arbitraria.

La suma $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \gamma_i) \cdot V(B_i)$ es una aproximación de la integral triple.

La norma de subdivisión es la longitud de la mayor diagonal de las cajas $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Si las sumas anteriores tienden a un límite cuando la norma de la subdivisión tiende a cero y para elecciones arbitrarias de los puntos P_i , a este límite lo llamaremos la

7. Integral Triple De F Sobre R. [1]

La expresión: $\iiint_R f(x, y, z) \cdot dV$ se utiliza para representar el límite.

Así como la integral doble es igual a dos integrales iteradas, también la integral triple es igual a tres integrales iteradas.

Para el caso de la caja rectangular R obtenemos:

$$\iiint_R f(x, y, z) \cdot dV = \int_{a_0}^{a_1} \int_{b_0}^{b_1} \int_{c_0}^{c_1} f(x, y, z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

Suponemos ahora que una región S está limitada por los planos $x = a_0$; $x = a_1$; $y = b_0$; $y = b_1$ y por las superficies $z = r(x, y)$, $z = s(x, y)$.

La integral triple se puede definir de igual forma

Teorema

Sea S una región definida por las desigualdades:

$$S: \{P(x, y, z) / a \leq x \leq b; p(x) \leq y \leq q(x); r(x, y) \leq z \leq s(x, y)\}$$

Donde las p ; q ; r y s son continuas. Si f es una función continua en S , tenemos:

$$\iiint_S f(x, y, z) \cdot dV = \int_{a_0}^{a_1} \int_{p(x)}^{q(x)} \int_{r(x, y)}^{s(x, y)} f(x, y, z) \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

Las integrales iteradas se efectúan considerando todas las variables constantes, excepto aquella respecto a la cual se integra. Este concepto se puede extender a n variables.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

8. Cambio De Variable En Las Integrales Múltiples. [1]

Sea $\iint_R f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ de donde $\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (1)$ y que esta transformación posee una inversa única dada por: $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$ por lo que el Jacobiano de (1) $J = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$

Al recinto R del plano x, y le corresponde un recinto R' en el plano u, v .

Haciendo entonces una partición en R' con rectas paralelas a los ejes u, v ; le corresponde en el plano x, y una partición de R por curvas continuas dadas por (1).

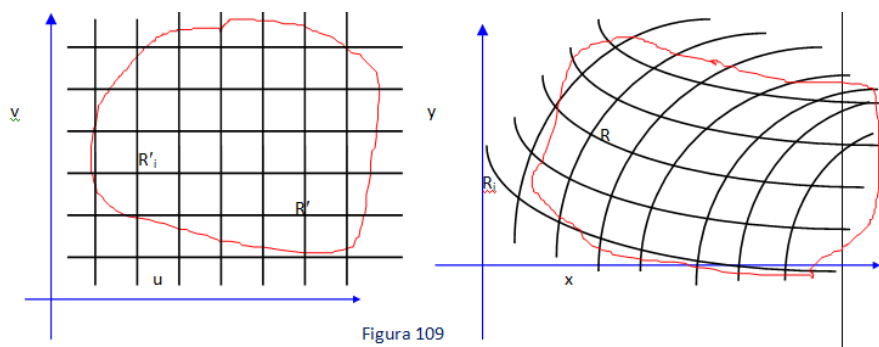


Figura 109

A un sub-recinto R'_i de R' le corresponde un sub-recinto R_i de R .

Queremos encontrar como se transforma cada elemento rectangular R'_i en el elemento curvilíneo R_i correspondiente. Para mejor ilustración ampliaremos el dibujo de ambos recintos:

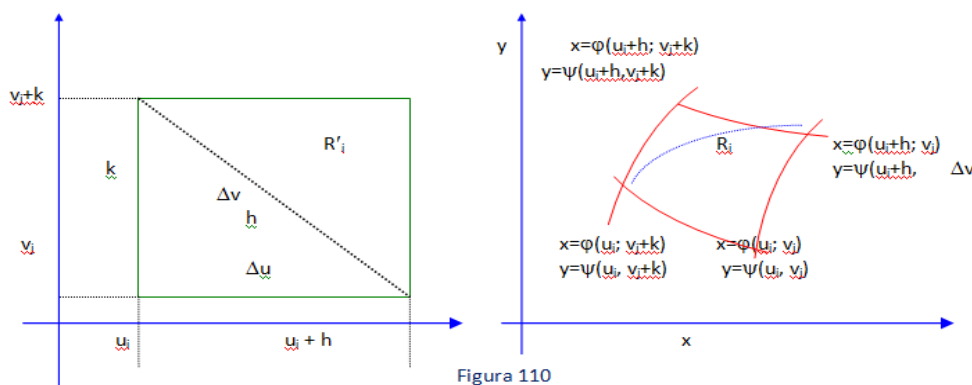


Figura 110

Buscamos la relación que existe entre las áreas de R'_i y R_i ; para lo cual podemos considerar a R'_i compuesto por dos triángulos iguales; lo mismo que a R_i .

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Para una partición con $\|\Delta\|$ suficientemente pequeña, podemos considerar a los triángulos curvilíneos de R_i como planos, siendo el área de cada uno de ellos:

$$\frac{A(R)}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi(u_i, v) & \varphi(u_i + h, v) & \varphi(u_i, v + k) \\ \psi(u_i, v) & \psi(u_i + h, v) & \psi(u_i, v + k) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi(u_i, v) & h.\varphi_u(u_i, v) & k.\varphi_v(u_i, v) \\ \psi(u_i, v) & h.\psi_u(u_i, v) & k.\psi_v(u_i, v) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta última expresión resulta de restar a los elementos de la segunda y tercera columna, los de la primera y aplicando Taylor (despreciando los términos de orden superior al primero) es:

Desarrollando por los elementos de la tercera fila, es:

$$\frac{A(R)}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h.\varphi_u(u_i, v_j) & k.\varphi_v(u_i, v_j) \\ h.\psi_u(u_i, v_j) & k.\psi_v(u_i, v_j) \end{bmatrix} = \frac{h.k}{2} \begin{bmatrix} \varphi_u(u_i, v_j) & \varphi_v(u_i, v_j) \\ \psi_u(u_i, v_j) & \psi_v(u_i, v_j) \end{bmatrix} = \frac{h.k}{2} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \frac{h.k}{2} J \frac{(\varphi, \psi)}{(u, v)}$$

$$A(R_i) = h \cdot k \cdot J = \Delta u \cdot \Delta v \cdot J = A(R'_i) J \frac{(\varphi, \psi)}{(u, v)} \quad \text{Recordando la definición de integral doble}$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \cdot A(R_i) \quad \text{y como } f(x, y) = f[\varphi(u, v); \psi(u, v)] = F(u, v) \text{ será}$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R F(u, v) \cdot J \cdot du \cdot dv = \iint_R F(u, v) \cdot \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \cdot du \cdot dv$$

Con lo que hemos obtenido la relación que liga las variables (x, y) con (u, v) .

9. Operadores Vectoriales

Campos Escalares. [2]

Dado un sistema cartesiano ortogonal, los puntos del espacio ó de una región del mismo quedan determinados conociendo el valor de sus coordenadas x, y, z .

Una función $\varphi(x, y, z)$ cuyo dominio sea la región considerada, se llama una FUNCION DE PUNTO ESCALAR pues asigna a cada punto del DOMINIO un ESCALAR que está representado por el valor que toma la función φ en el mismo.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

A modo de ejemplo, supongamos que la función $\varphi(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + yz^2$ esté definida en todo el espacio y analicemos que ocurre con φ en un punto determinado $P(1, 2, 1)$:
 $\varphi(1, 2, 1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1^2 = 9$ que representa el escalar de ese punto.

Esta función $\varphi(x, y, z)$ define un campo escalar dado que asigna o hace corresponder a cada punto un escalar.

Dada una FUNCION ESCALAR $\varphi(x, y, z)$ se llama GRADIENTE de la misma al VECTOR o SEUDOVECTOR cuyas componentes son las derivadas parciales $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$.

El gradiente se simboliza con la notación: $\text{grad } \varphi$ o $\nabla \varphi$. $\therefore \text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \varphi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k$

Propiedades Del Gradiente

Sea $F = \varphi \pm \psi$ una función escalar de dos funciones escalares φ, ψ luego

$$\text{grad } F = \nabla F = \nabla(\varphi \pm \psi) = F_x \cdot i + F_y \cdot j + F_z \cdot k$$

$$= (\varphi_x \pm \psi_x)i + (\varphi_y \pm \psi_y)j + (\varphi_z \pm \psi_z)k = \varphi_x \cdot i \pm \psi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j \pm \psi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k \pm \psi_z \cdot k =$$

$$= (\varphi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k) \pm (\psi_x \cdot i + \psi_y \cdot j + \psi_z \cdot k) = \text{grad } \varphi \pm \text{grad } \psi = \nabla \varphi \pm \nabla \psi$$

$$\text{luego: } \nabla(\varphi \pm \psi) = \nabla \varphi \pm \nabla \psi$$

Otra propiedad que es fácilmente demostrable $\nabla(\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot \nabla \psi + \psi \cdot \nabla \varphi$

Propiedades Geométricas

El incremento de la función $\varphi(x, y, z)$ al pasar del punto $P(x, y, z)$ al punto $P + dP$ de coordenadas $x + dx; y + dy; z + dz$ es: $d\varphi = \varphi_x \cdot dx + \varphi_y \cdot dy + \varphi_z \cdot dz$

Considerando a dP como el vector desplazamiento de componentes dx, dy, dz se puede expresar a $d\varphi$ como $\nabla \varphi \cdot dP$ o sea: $d\varphi = (\varphi_x \cdot i + \varphi_y \cdot j + \varphi_z \cdot k) \cdot (dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k)$

Si analizamos todos los desplazamientos posibles en cualquier dirección a partir de P y todos ellos de la misma longitud, o sea, con el mismo módulo $|dP|$, el producto escalar será máximo cuando las direcciones coincidan. De esto surge una importante propiedad geométrica del gradiente:

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

TEOREMA:

La dirección del vector gradiente de una función φ es aquella según la cual esta función varía más rápidamente.

El módulo del gradiente se puede obtener de:

$$|d\varphi| = |\nabla\varphi| \cdot |dP| \cdot \cos 0^\circ = |\nabla\varphi| \cdot |dP| \quad \therefore \nabla\varphi = \frac{|d\varphi|}{|dP|}$$

O sea el módulo del gradiente es igual al cociente entre el módulo de la variación de φ en la dirección de máxima variación y el módulo del desplazamiento mismo, cuando ambos tienden a cero.

SUPERFICIES DE NIVEL

Se llaman superficies de nivel de una función $\varphi(x,y,z)$ a las superficies de ecuación $\varphi(x,y,z) = \text{constante}$ (En el caso de dos dimensiones tendremos curvas de nivel).

Consideremos un desplazamiento cualquiera dP de componentes dx , dy , dz sobre una superficie de nivel:

Como $\varphi(x,y,z) = \text{constante}$ el $d\varphi = 0$ o sea $d\varphi = \varphi_x \cdot dx + \varphi_y \cdot dy + \varphi_z \cdot dz = 0 \quad \therefore \nabla\varphi \cdot dP = 0$

pero el producto escalar es nulo si los vectores son perpendiculares o sea que el GRADIENTE de φ es normal a cualquier desplazamiento sobre una superficie de nivel; De esta propiedad enunciamos el siguiente Teorema: “El vector gradiente es, en cada punto normal a la superficie de nivel que pasa por el punto”.

LINEAS DE GRADIENTE

Se llaman LINEAS DE GRADIENTE de un campo escalar φ a las que en cada punto tienen la tangente en la dirección del gradiente de φ . Esto significa que la dirección del gradiente coincide en cada punto

con la del desplazamiento sobre la curva o sea $\frac{dx}{\varphi_x} = \frac{dy}{\varphi_y} = \frac{dz}{\varphi_z}$

CAMPOS VECTORIALES

Si se define un vector A por sus componentes a_i en una cierta región del espacio o en su totalidad; y si dichas componentes $a_i = f(x, y, z)$ son funciones de las coordenadas x, y, z es evidente que a cada punto de la región considerada le corresponderá un vector cuyas componentes serán funciones de las coordenadas del punto.

El conjunto de los mismos determinan un CAMPO VECTORIAL.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Dado un campo de vectores $A = a_1(x, y, z) \mathbf{i} + a_2(x, y, z) \mathbf{j} + a_3(x, y, z) \mathbf{k}$, a las líneas que en cada punto son tangentes al vector del campo que pasa por él, se las llama LINEAS DE CAMPO.

Considerando un desplazamiento en la dirección de las líneas de campo o sea su vector tangente A; y si el desplazamiento tiene por componentes dx, dy, dz, las ecuaciones diferenciales de las líneas de

campo serán:
$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{a_3}$$

Divergencia De Un Vector

Se llama divergencia de un vector $A = a_1(x, y, z) \mathbf{i} + a_2(x, y, z) \mathbf{j} + a_3(x, y, z) \mathbf{k}$, cuyas componentes a_i son funciones de (x, y, z) , al escalar dado por la suma de las derivadas de a_1 respecto de x más a_2 respecto de y más a_3 respecto de z o sea: $\text{div } A = a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}$

De esta definición se deduce:

$$\text{div } (A \pm B) = \text{div } A \pm \text{div } B \quad \text{luego} \quad \text{div } (A \pm B) = (a_1 \pm b_1)_x + (a_2 \pm b_2)_y + (a_3 \pm b_3)_z$$

$$\text{div } (A \pm B) = a_{1x} \pm b_{1x} + a_{2y} \pm b_{2y} + a_{3z} \pm b_{3z} = \text{div } (A \pm B) = (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}) \pm (b_{1x} + b_{2y} + b_{3z}) = \text{div } A \pm \text{div } B$$

$$\text{div } (\varphi \cdot A) = \nabla \varphi \cdot A + \varphi \cdot \text{div } A \quad \text{donde} \quad \varphi = \varphi(x, y, z) \quad A = a_1(x, y, z) \mathbf{i} + a_2(x, y, z) \mathbf{j} + a_3(x, y, z) \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \text{div } (\varphi \cdot A) &= (\varphi \cdot a_1)_x + (\varphi \cdot a_2)_y + (\varphi \cdot a_3)_z = \text{div } (\varphi \cdot A) = (\varphi_x \cdot a_1 + \varphi \cdot a_{1x}) + (\varphi_y \cdot a_2 + \varphi \cdot a_{2y}) + (\varphi_z \cdot a_3 + \varphi \cdot a_{3z}) \\ &= \text{div } (\varphi \cdot A) = (\varphi_x \cdot a_1 + \varphi_y \cdot a_2 + \varphi_z \cdot a_3) + (\varphi \cdot a_{1x} + \varphi \cdot a_{2y} + \varphi \cdot a_{3z}) \therefore \text{div } (\varphi \cdot A) = \nabla \varphi \cdot A + \varphi \cdot \text{div } A \end{aligned}$$

10. El Rotor. [2]

Se llama ROTOR o ROTACIONAL de un vector A de componentes a_1, a_2, a_3 funciones de x, y, z al vector de componentes $(a_{3y} - a_{2z}); (a_{1z} - a_{3x}); (a_{2x} - a_{1y})$ o sea:

$$\text{rot } A = (a_{3y} - a_{2z}) \mathbf{i} + (a_{1z} - a_{3x}) \mathbf{j} + (a_{2x} - a_{1y}) \mathbf{k}$$

$$\text{rot } A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k}$$

los productos simbólicos ∂a_1 ; ∂a_3 son las derivadas parciales respectivas a_{1x} ; a_{3y} etc.

$$\partial x \quad \partial y$$

De la definición se deduce: $\text{rot } (A \pm B) = \text{rot } A \pm \text{rot } B$

$$\text{rot } (\varphi \cdot A) = \varphi \cdot \text{rot } A - A \wedge \nabla \varphi \quad \text{siendo} \quad \varphi = \varphi(x, y, z)$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

$$\text{rot } \varphi \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi a_1 & \varphi a_2 & \varphi a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial \varphi a_3}{\partial y} - \frac{\partial \varphi a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial \varphi a_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial \varphi a_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k}$$

$$= (\varphi_y a_3 + \varphi a_{3y} - \varphi_z a_2 - \varphi a_{2z}) \mathbf{i} + (\varphi_z a_1 + \varphi a_{1z} - \varphi_x a_3 - \varphi a_{3x}) \mathbf{j} + (\varphi_x a_2 + \varphi a_{2x} - \varphi_y a_1 - \varphi a_{1y}) \mathbf{k} =$$

$$= \varphi [(a_{3y} - a_{2z}) \mathbf{i} + (a_{1z} - a_{3x}) \mathbf{j} + (a_{2x} - a_{1y}) \mathbf{k}] + [(\varphi_y a_3 - \varphi_z a_2) \mathbf{i} + (\varphi_z a_1 - \varphi_x a_3) \mathbf{j} + (\varphi_x a_2 - \varphi_y a_1) \mathbf{k}] =$$

$$= \varphi \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix} = \varphi \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \wedge \nabla \varphi$$

11. Líneas De Rotor O Torbellino

Dado un CAMPO VECTORIAL $\mathbf{A}$, el conjunto de los $\text{rot } \mathbf{A}$ forma otro campo vectorial llamado CAMPO DE ROTORES, las líneas de los campos de rotores se llaman LINEAS DE ROTORES O TORBELLINO.

Sus ecuaciones se obtienen sustituyendo las componentes del vector en las líneas de campo por las componentes del rotor

$$\frac{dx}{(a_{3y} - a_{2z})} = \frac{dy}{(a_{1z} - a_{3x})} = \frac{dz}{(a_{2x} - a_{1y})}$$

12. El Operador Nabla

Si consideramos los símbolos $\frac{\partial}{\partial x}$; $\frac{\partial}{\partial y}$; $\frac{\partial}{\partial z}$ como las componentes de un

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

Vector simbólico, el mismo se representa por ∇ (Nabla) es decir: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$

Este operador puede combinarse con otros vectores mediante operaciones conocidas: Aplicando el operador Nabla a un escalar φ se tiene:

$$\nabla \varphi = \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right] \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \quad \nabla \varphi = \varphi_x \mathbf{i} + \varphi_y \mathbf{j} + \varphi_z \mathbf{k} = \text{grad } \varphi$$

Multiplicando escalarmente ∇ por un vector $\mathbf{A}$ de componentes a_1, a_2, a_3 funciones de x, y, z :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z} = a_{1x} + a_{2y} + a_{3z} = \text{div } \mathbf{A}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

Si multiplicamos vectorialmente ∇ por A obtenemos:

$$\nabla \wedge A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k} = \text{rot } A$$

13. El Laplaciano. [1]

Se llama LAPLACIANO de una función escalar $\varphi(x,y,z)$ a la función escalar dada por la divergencia de su gradiente. Se representa por Δ ó ∇^2 o sea:

$$\Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \text{div. grad } \varphi = \text{div. } \nabla \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi \quad \Delta \varphi = \nabla^2 \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}$$

Las funciones que satisfacen $\Delta \varphi = 0$ se denominan FUNCIONES ARMONICAS.

De la definición de LAPLACIANO se deduce: $\Delta(\varphi \pm \psi) = \Delta \varphi \pm \Delta \psi$

$$\Delta(\varphi \pm \psi) = \nabla \cdot \nabla(\varphi \pm \psi) = \nabla \cdot (\nabla \varphi \pm \nabla \psi) = \nabla \cdot \nabla \varphi \pm \nabla \cdot \nabla \psi =$$

$$= \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \cdot \nabla \cdot \nabla \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + \psi \cdot \nabla \cdot \nabla \varphi = \varphi \cdot \Delta \psi + \psi \cdot \Delta \varphi + 2 \nabla \varphi \cdot \nabla \psi$$

14. El Laplaciano De Un Vector

Se llama LAPLACIANO DE UN VECTOR, al nuevo vector definido por el Gradiente de su Divergencia menos el Rotor de su rotor. Sea $A = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ $a_i = a_i(x,y,z) \rightarrow i = 1,3$

$$\Delta A = \text{grad} \cdot \text{div } A - \text{rot} \cdot \text{rot } A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \wedge (\nabla \wedge A) = \nabla^2 A$$

$$\text{grad} \cdot \text{div } A = \text{grad} (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z}) = (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_x \mathbf{i} + (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_y \mathbf{j} + (a_{1x} + a_{2y} + a_{3z})_z \mathbf{k}$$

$$\therefore \text{grad} \cdot \text{div } A = (a_{1xx} + a_{2yx} + a_{3zx}) \mathbf{i} + (a_{1xy} + a_{2yy} + a_{3zy}) \mathbf{j} + (a_{1xz} + a_{2yz} + a_{3zz}) \mathbf{k}$$

$$\text{rot } A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \mathbf{k}$$

$$\text{rot rot } A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \left[\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right] & \left[\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right] & \left[\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right] \end{bmatrix} =$$

$$= (a_{2xy} - a_{1yy} - a_{1zz} + a_{3xz}) \mathbf{i} + (a_{3yz} - a_{2zz} - a_{2xx} + a_{1yx}) \mathbf{j} + (a_{1zx} - a_{3xx} - a_{3yy} + a_{2yz}) \mathbf{k}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

15. Derivación De Vectores Derivadas Direccionales. [2].

Sea $V = V(x,y,z)$ un versor función de punto, es decir un vector de módulo unitario, cuyas componentes $v_1 ; v_2 ; v_3$ sean funciones de $x ; y ; z$.

Consideremos un punto $P(x,y,z)$ y el punto obtenido por un desplazamiento Δs en la dirección de V el cual será $P + \Delta P$; resulta luego $\Delta P = V \cdot \Delta s$. La función $\phi(x,y,z)$ al pasar del punto P al $P + \Delta P$ se habrá incrementado en $\Delta\phi = \phi(P + \Delta P) - \phi(P)$

Si consideramos el límite del cociente de este incremento sobre Δs cuando este último tiende a cero es precisamente la derivada direccional de ϕ según la dirección de V .

Dado que el límite $\Delta\phi \rightarrow d\phi$ y que este diferencial es: $d\phi = \nabla\phi \cdot dP = \nabla\phi \cdot V \cdot \Delta s$ por lo tanto:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\nabla\phi \cdot V \cdot \Delta s}{\Delta s} = \nabla\phi \cdot V \quad \text{o sea}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{dV} = \nabla\phi \cdot V$$

siendo $d\phi$ una notación simbólica que indica la derivada de ϕ en la dirección V .

dV

Vamos a introducir ahora una notación que nos permitirá calcular la derivada direccional de un vector. Consideremos al vector $A = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$ donde los $a_i(x,y,z)$ $i = 1$ a 3 y el versor $V = v_1 \cdot i + v_2 \cdot j + v_3 \cdot k$. Representaremos por $(V \cdot \nabla)A$ al vector cuyas componentes son

$$v_1 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial x}, v_2 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial y}, v_3 \cdot \frac{\partial a_i}{\partial z} \text{ para } i = 1..3$$
 Si indicamos por A_x al vector cuyas componentes

son las derivadas parciales a_{1x}, a_{2x}, a_{3x} y con análogo significado utilizamos los vectores A_y, A_z podemos escribir $(V \cdot \nabla)A = v_1 A_x + v_2 A_y + v_3 A_z$. Con esta notación establecemos la siguiente definición: Se llama derivada direccional del vector $A = A(x,y,z)$ según la dirección del versor V , al

vector: $\frac{dA}{dV} = (V \cdot \nabla)A$. La interpretación de esta derivada direccional es la misma que para el caso

de una función escalar. La diferencia entre los valores de A en $P(x,y,z)$ y el punto desplazado en Δs según la dirección de V o sea en el punto $P + \Delta P = P + V \cdot \Delta s$ es: $\Delta A = A(P + V \cdot \Delta s) - A(P)$

El cociente entre esta diferencia y Δs cuando $\Delta s \rightarrow 0$ tiende precisamente a la derivada direccional. En efecto: $\Delta A = A(x + v_1 \Delta s ; y + v_2 \Delta s ; z + v_3 \Delta s) - A(x,y,z)$

$$\Delta A = A_x \cdot v_1 \Delta s + A_y \cdot v_2 \Delta s + A_z \cdot v_3 \Delta s + \xi_1 v_1 \Delta s + \xi_2 v_2 \Delta s + \xi_3 v_3 \Delta s$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta s} = A_x \cdot v_1 + A_y \cdot v_2 + A_z \cdot v_3 = (\mathbf{V} \cdot \nabla) A$$

Podemos considerar

$\mathbf{V} \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}$ siendo los v_i las componentes del vector $\mathbf{V}$ que son directamente los cosenos directores

16. Derivada Total Y Parcial De Un Escalar O Un Vector Respecto Al Tiempo. [2]

Supongamos una función de punto que dependa también del tiempo t o sea $\phi = \phi(x, y, z, t)$. Si además x, y, z también son funciones de t y si llamamos $\mathbf{V}$ al vector velocidad en donde:

$$\mathbf{V} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} = \dot{x} \mathbf{i} + \dot{y} \mathbf{j} + \dot{z} \mathbf{k}$$

Indicando los puntos las derivadas respecto de t se tiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \phi_x \dot{x} + \phi_y \dot{y} + \phi_z \dot{z} + \phi_t = \phi_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi$$

Si en vez de un escalar se tiene un vector $\mathbf{A} = A(x, y, z, t)$ que también depende del tiempo t tendremos para la

Derivada respecto de t :

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + v_1 A_x + v_2 A_y + v_3 A_z$$

Estas expresiones son las que ligan la DERIVADA TOTAL respecto de t de un escalar o un vector con la DERIVADA PARCIAL respectiva.

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] *El Cálculo (7 Ed.)* Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

17. Actividades.

1) Dado la siguiente integral calcular:

Demuestre que:

$$\int tg^n x \, dx = \frac{tg^{n-1} x}{n-1} - \int tg^{n-2} x \, dx; n \neq 1.$$

$$\int tg^n x \, dx = \int tg^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int tg^{n-2} x \sec^2 x \, dx - \int tg^{n-2} x \, dx$$

$$\text{Sea } u = tg x \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$$

$$\int tg^{n-2} x \sec^2 x \, dx = \int u^{n-2} du = \frac{1}{n-1} u^{n-1} = \frac{1}{n-1} tg^{n-1} x; n \neq 1$$

$$\int tg^n x \, dx = \frac{1}{n-1} tg^{n-1} x - \int tg^{n-2} x \, dx; n \neq 1. \star$$

2) Dado la siguiente integral calcular:

$$\int x \operatorname{Arctg} \sqrt{x} \, dx$$

$$u = \operatorname{Arctg} \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$dv = x \, dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$

$$\int x \operatorname{Arctg} \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{x^{3/2} \, dx}{1+x} = \int \frac{x^{3/2} \, dx}{1+(\sqrt{x})^2}$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

$$\sqrt{x} = tg\theta \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = sec^2\theta d\theta \Rightarrow dx = 2tg\theta sec^2\theta d\theta, x^{3/2} = tg^3\theta$$

$$\int \frac{x^{3/2} dx}{1+x} = \int \frac{tg^3\theta (2tg\theta sec^2\theta) d\theta}{(1+tg^2\theta)} = \int \frac{tg^3\theta (2tg\theta sec^2\theta) d\theta}{sec^2\theta} = 2 \int tg^4\theta d\theta, \text{ (por(1))}$$

$$= 2 \left(\frac{tg^3\theta}{3} - \int tg^2\theta d\theta \right) = \frac{2}{3} tg^3\theta - 2 \left(\frac{tg\theta}{(2-1)} - \int d\theta \right) = \frac{2}{3} tg^3\theta - 2(tg\theta - \theta)$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} - 2(\sqrt{x} - Arctg\sqrt{x})$$

$$\int x Arctg\sqrt{x} dx = \frac{1}{2} x^2 Arctg\sqrt{x} - \frac{1}{6} x^{3/2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2} Arctg\sqrt{x} + C.$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - 1) Arctg\sqrt{x} - \frac{1}{6} x^{3/2} + \frac{1}{2} x^{1/2} + C. \star$$

3) Dado la siguiente integral calcular:

Resuelva

$$\int x \operatorname{Arcsen} \sqrt{x} dx$$

$$u = \operatorname{Arcsen} \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$

$$\int x \operatorname{Arcsen} \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{Arcsen} \sqrt{x} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta)^2 \frac{1}{2} \cos\theta d\theta}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 + \operatorname{sen}\theta)^2 d\theta$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cos \theta d\theta, \operatorname{sen} \theta = 2x - 1 \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - (2x - 1)^2}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 2(2x - 1) \sqrt{1 - (2x - 1)^2}$$

$$\frac{1}{4} \int (1 + \operatorname{sen} \theta)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta = \frac{1}{4} (\theta - 2 \cos \theta) +$$

$$\frac{1}{4} \int \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} (\theta - 2 \cos \theta) + \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{4} (\theta - 2 \cos \theta) + \frac{1}{8} (\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta) + C$$

$$= \frac{3}{8} \theta - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$= \frac{3}{8} \operatorname{Arcsen}(2x - 1) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - (2x - 1)^2} - \frac{1}{8} (2x - 1) \sqrt{1 - (2x - 1)^2} + C \star$$

4) Dado la siguiente integral calcular:

$$\int \frac{x^{3n-1} dx}{(x^{2n} + 1)^2}$$

$$\int \frac{x^{3n-1} dx}{(x^{2n} + 1)^2} = \int \frac{x^{2n} x^{n-1} dx}{((x^n)^2 + 1)^2}$$

$$x^n = t g \theta \Rightarrow n x^{n-1} dx = \sec^2 \theta d\theta \Rightarrow x^{n-1} dx = \frac{\sec^2 \theta d\theta}{n}; \quad x^{2n} = t g^2 \theta;$$

$$\int \frac{x^{2n} x^{n-1} dx}{((x^n)^2 + 1)^2} = \frac{1}{n} \int \frac{t g^2 \theta \sec^2 \theta d\theta}{(1 + t g^2 \theta)^2} = \frac{1}{n} \int \frac{t g^2 \theta \sec^2 \theta d\theta}{\sec^4 \theta} = \frac{1}{n} \int \frac{t g^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{n} \int \frac{(\sec^2 \theta - 1) d\theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{n} \left(\int d\theta - \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \right) = \frac{1}{n} \left(\theta - \int \cos^2 \theta d\theta \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\theta - \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) \right) = \frac{1}{2n} \theta - \frac{1}{4n} \operatorname{sen} 2\theta + C = \frac{1}{2n} \left(\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) + C$$

$$= \frac{1}{2n} \left(\operatorname{Arctg} x^n - \frac{x^n}{1 + x^{2n}} \right) + C$$

$$1 + t g^2 \theta = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}; \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + t g^2 \theta}; \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^{2n}}}; \quad \operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{2x^n}{1 + x^{2n}}. \star$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

5) Dado la siguiente integral calcular:

Resuelva

$$\int x^2 \operatorname{Arcsec} \sqrt{x} \, dx$$

$$u = \operatorname{Arcsec} \sqrt{x} \Rightarrow ; du = \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}}; dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2 \operatorname{Arcsec} \sqrt{x} \, dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{Arcsec} \sqrt{x} - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx; \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-1}} = \int \frac{(u+1)^2 du}{\sqrt{u}} = \int (u^{3/2} + 2u^{1/2} + u^{-1/2}) du$$

$$= \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{4}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2} + C = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{4}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + C$$

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{Arcsec} \sqrt{x} \, dx &= \frac{1}{3}x^3 \operatorname{Arcsec} \sqrt{x} - \frac{1}{15}(x-1)^{5/2} - \frac{2}{9}(x-1)^{3/2} \\ &\quad - \frac{1}{3}(x-1)^{1/2} + C. \star \end{aligned}$$

6) Dado la siguiente integral calcular:

Resuelva

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx$$

$$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx; dv = \sec^2 x \, dx \Rightarrow v = \operatorname{tg} x$$

$$\int \sec x \sec^2 x \, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C. \star$$

[1] <http://es.wikipedia.org/>

[2] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

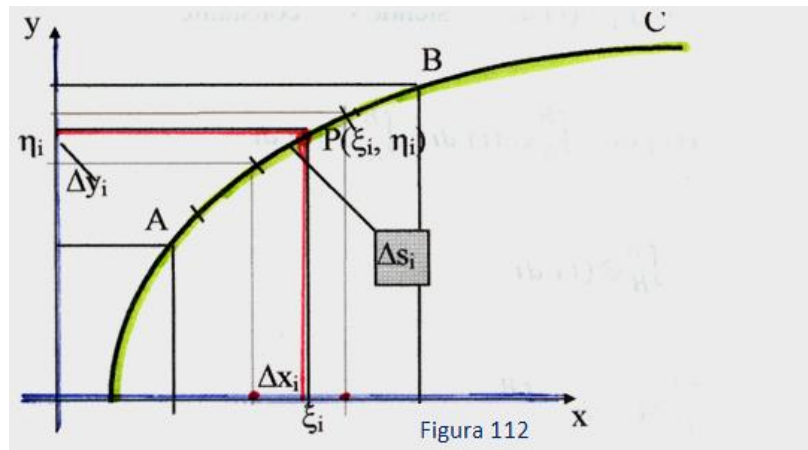
[3] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

APLICACIÓN DE LA DERIVACION PARCIAL

1. Integrales Curvilíneas, De Superficie Y De Volumen. [2]

Solo consideraremos el caso de integrales curvilíneas a lo largo de curvas planas. Es decir curvas continuas que consisten en un número finito de arcos en cada uno de los cuales la tangente varía continuamente.

Sea $z = f(x, y)$ una función y C una curva continua, que une los puntos A y B ($z = f(x, y)$ no tiene ninguna relación con la ecuación de la curva C y no es más que una función definida en cada punto de la porción de la curva C que se considera).



Divídase el arco de C entre A y B en “ n ” segmentos Δs_i cuyas proyecciones sobre los ejes x e y son respectivamente Δx_i ; Δy_i y sean (ξ_i, η_i) las coordenadas de un punto cualquiera del segmento Δs_i .

Realizamos ahora los siguientes productos: $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i$; $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i$; $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i$ y hacemos las sumas para todas las subdivisiones del arco AB , luego tendremos

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i ; \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta y_i ; \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i$$

Los límites de estas sumas cuando cada Δs_i ; Δx_i ; Δy_i tienden a cero, se llaman integrales curvilíneas y se escriben respectivamente:

$$\int_C f(x, y) \cdot dx ; \int_C f(x, y) \cdot dy ; \int_C f(x, y) \cdot ds$$

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

En estas definiciones, Δx_i ; Δy_i son valores con signo, en tanto Δs_i es intrínsecamente positivo.

Las siguientes propiedades:

$$a) \int_A^B C \cdot \varnothing(t) \cdot dt = C \cdot \int_A^B \varnothing(t) \cdot dt \quad \text{Siendo } C = \text{constante}$$

$$b) \int_A^B [\varnothing_1(t) \pm \varnothing_2(t)] \cdot dt = \int_A^B \varnothing_1(t) \cdot dt \pm \int_A^B \varnothing_2(t) \cdot dt$$

$$c) \int_A^B \varnothing(t) \cdot dt = - \int_B^A \varnothing(t) \cdot dt$$

$$d) \int_A^P \varnothing(t) \cdot dt + \int_P^B \varnothing(t) \cdot dt = \int_A^B \varnothing(t) \cdot dt$$

Son igualmente válidas para las integrales curvilíneas de los dos primeros tipos, siempre que para cada fórmula la curva que une A con B siga siendo la misma.

Por otra parte las integrales del tercer tipo, si bien tienen las propiedades a) y b) no

tienen la c) ya que en efecto $\int_A^B f(x, y) \cdot ds = \int_B^A f(x, y) \cdot ds$

Además la propiedad d) vale para estas integrales sí y solo sí, P está entre A y B sobre el camino de integración.

Las integrales definidas ordinarias del cálculo elemental no son más que integrales curvilíneas en que la curva C es el eje x, y el integrando es una función de x solamente.

2. Interpretación Grafica. [2]

Como en el caso de las integrales ordinarias, es posible interpretar una integral curvilínea como área. Si se piensa que $z = f(x, y)$ define en el espacio una superficie. La superficie vertical que tiene por directriz el arco AB cortará a la superficie $z = f(x, y)$ según una cierta curva PQ.

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

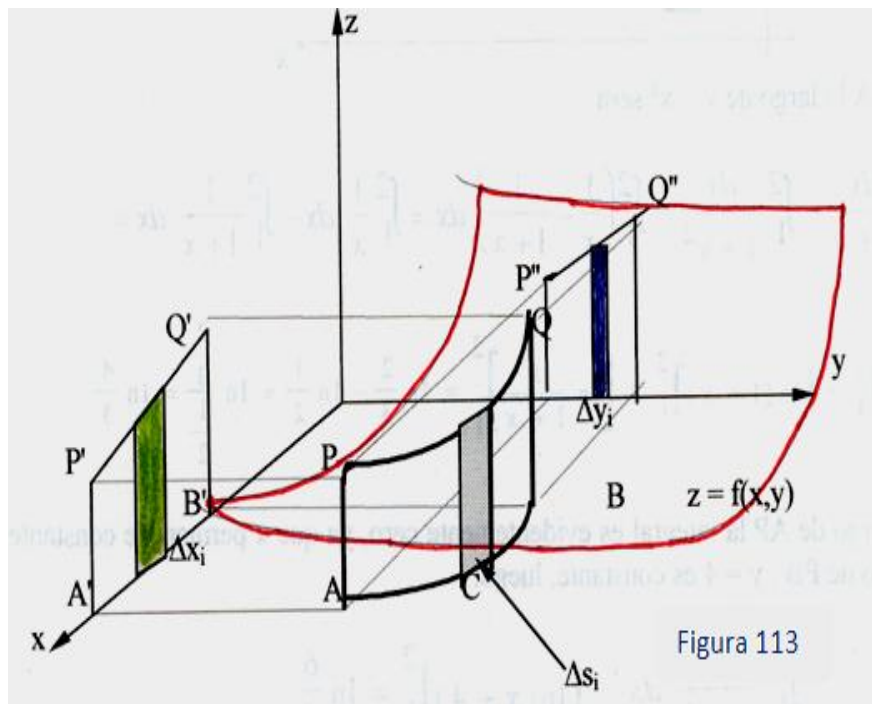


Figura 113

El producto $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i$ es aproximadamente el área de la banda vertical de esta porción de superficie que se encuentra sobre la base elemental Δs_i ; y la suma

$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta s_i$ es aproximadamente igual al área ABQP y en el límite la integral

$\int_C f(x, y) \cdot ds$, da esta área exactamente.

De manera análoga, el producto $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i$ es aproximadamente el área de la proyección sobre el plano xz de la faja vertical de base Δs_i , y la suma para $i=1$ a n representa el área aproximada de esta proyección A'B'Q'P' sobre el plano xz, y la $\int_C f(x, y) \cdot dx$, da esta área.

De igual modo se puede representar el área de la proyección de ABQP sobre el plano yz mediante la $\int_C f(x, y) \cdot dy$.

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

EJEMPLO

Calcular las integrales curvilíneas de la función $z = f(x, y) = x + y + 1$ sobre el camino dado por $y = x$ entre los puntos $A(1; 1)$ y $B(3; 3)$.

Como la función $f(x, y) = x + y + 1$ representa un plano, la proyección del camino de integración $y = x$ sobre este plano nos representa la recta PQ , con lo que nos queda formado el trapecio $ABQP$ cuyas proyecciones sobre los planos xz e yz también representarán dos trapecios.

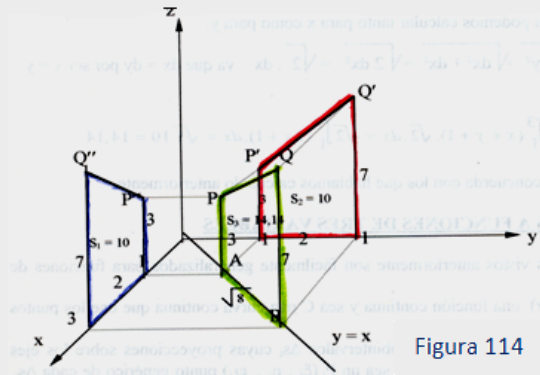


Figura 114

Calculando las áreas de estos dos trapecios serán

$$S_1 = \frac{3+7}{2} \cdot 2 = 10 \quad ; \quad S_2 = \frac{3+7}{2} \cdot 2 = 10 \quad ; \quad S_3 = \frac{3+7}{2} \cdot \sqrt{8} = 14,14$$

Calculemos ahora aplicando el concepto de integral curvilínea.

$$S_1 = \int_c f(x, y) \cdot dx = \int_1^3 (x + y + 1) \cdot dx = \int_1^3 (x + x + 1) \cdot dx = \int_1^3 (2x + 1) \cdot dx = \left[x^2 + x \right]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10$$

$$S_2 = \int_c f(x, y) \cdot dy = \int_1^3 (x + y + 1) \cdot dy = \int_1^3 (2y + 1) \cdot dy = \left[y^2 + y \right]_1^3 = 10$$

$$S_3 = \int_c f(x, y) \cdot ds = \int_c (x + y + 1) \cdot ds \quad \text{Esta integral la podemos calcular tanto para } x \text{ como}$$

para y .

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + dx^2} = \sqrt{2 \cdot dx^2} = \sqrt{2} \cdot dx \quad \text{ya que } dx = dy \text{ por ser } x = y$$

luego

$$\int_c f(x, y) \cdot ds = \int_1^3 (x + y + 1) \cdot \sqrt{2} \cdot dx = \sqrt{2} \int_1^3 (2x + 1) \cdot dx = \sqrt{2} \cdot 10 = 14,14$$

Resultado que concuerda con los que habíamos calculado anteriormente.

EXTENSION A FUNCIONES DE TRES VARIABLES.

Los conceptos vistos anteriormente son fácilmente generalizados para funciones de tres variables. Sea $u = f(x, y, z)$ una función continua y sea C una curva continua que une los puntos A y B en el espacio.

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

Dividamos el arco AB en “n” sub-intervalos Δs_i cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son Δx_i ; Δy_i ; Δz_i y $P_i (\xi_i ; \eta_i ; \varphi_i)$ un punto genérico de cada Δs_i . Calculamos el valor de $u = f(x, y, z)$ en cada uno de estos puntos P_i y se forman las sumas

$$\sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \varphi_i) \cdot \Delta x_i ; \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \varphi_i) \cdot \Delta y_i ; \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \varphi_i) \cdot \Delta z_i ; \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i, \eta_i, \varphi_i) \cdot \Delta s_i$$

Los límites de estas sumas al tender “n” a infinito de tal manera que la longitud de cada Δs_i tienda a cero, define las respectivas integrales curvilíneas.

$$\int_c f(x, y, z) \cdot dx ; \int_c f(x, y, z) \cdot dy ; \int_c f(x, y, z) \cdot dz ; \int_c f(x, y, z) \cdot ds$$

3. Integrales Curvilíneas Independientes Del Camino De Integración. [2]

Una expresión de la forma $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ es una diferencial exacta si existe una función $U(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P \wedge \frac{\partial U}{\partial y} = Q \text{ es decir } dU = P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy$$

En este caso la función U recibe el nombre de función potencial del par de funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$. En este caso, decimos que la integral curvilínea $\int_c P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ es independiente del camino de integración. Para que ello ocurra deberá ser

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ ya que por ser } dU = P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy \text{ será } \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Luego

$$\int_c P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = \int_{A(a,b)}^{B(c,d)} P(x, y) \cdot dx + Q(x, y) \cdot dy = \int_{A(a,b)}^{B(c,d)} dU = [U(x, y)]_{A(a,b)}^{B(c,d)} = U(c, d) - U(a, b)$$

que nos muestra que este resultado es independiente del camino de integración y que solo depende de las coordenadas de los puntos extremos.

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

CIRCULACION. [1]

Si una fuerza $f = f(x; y; z) = P(x; y; z) i + Q(x; y; z) j + R(x; y; z) k$ está definida en todos los puntos del espacio, o de un cierto recinto, tendremos un campo de fuerzas. También podemos considerar un campo de velocidades en el movimiento de un fluido o de intensidades en la conducción de electricidad, etc.

En general conviene considerar independientemente del vector f , un campo vectorial que puede darse mediante tres funciones $P(x; y; z)$; $Q(x; y; z)$; $R(x; y; z)$. Estas funciones pueden también depender del tiempo t ; si son independientes del tiempo el campo se define estacionario.

Si en el campo vectorial consideramos un arco de curva AB tendremos un vector del campo aplicado a cada uno de sus puntos y podremos considerar la integral curvilínea

$$\int_{AB} P.dx + Q.dy + R.dz = \int_{AB} f.dP \text{ ya que } f = P.i + Q.j + R.k \text{ y } dP = dx i + dy j + dz k$$

Esta integral curvilínea se llama circulación del vector f a lo largo del arco AB . En este caso de un campo de fuerzas, esta integral representa el trabajo de la fuerza f sobre una partícula que se desplaza a lo largo del arco AB .

CAMPOS CONSERVATIVOS. [1]

El cálculo de la circulación requiere en general conocer el camino y este en general no se conoce. De esto surge la importancia de los campos conservativos que son aquellos en los cuales la circulación entre dos puntos no depende del camino que los une. En tal caso, fijado el punto $M_0(x_0; y_0; z_0)$, para cada punto M la circulación $\int_{M_0M} P.dx + Q.dy + R.dz = U(x; y; z) = U(M)$ Esta función U representa el potencial del campo conservativo. Este potencial determina el campo ya que

$$P = \frac{\partial U}{\partial x} ; Q = \frac{\partial U}{\partial y} ; R = \frac{\partial U}{\partial z}$$

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

o sea que $f = U$ de donde surge que la componente del campo conservativo en una dirección cualquiera es igual a la derivada del potencial en esa dirección.

Por otra parte si existe en un recinto simplemente conexo una función uniforme $\phi =$

$\phi(x;y;z)$ tal que $P = \frac{\partial \phi}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$; $R = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ siendo P ; Q ; R continuas, es $f =$

$\text{grad } \phi$ un campo conservativo y ϕ un potencial del mismo.

INTEGRALES DE SUPERFICIE Y DE VOLUMEN

Sea $u = f(x;y;z)$ una función continua y sea S una superficie regular (o sea aquella superficie que se puede subdividir por un número finitos de curvas en porciones cada una de las cuales es orientable y por lo tanto lisa) en la región de definición de f .

Subdividimos S de una manera cualquiera en "n" elementos Δs_i y en cada elemento de superficie elegimos un punto arbitrario $P_i (\xi_i, \eta_i, \phi_i)$. Por último calculamos $f(x;y;z)$ en cada uno de los puntos P_i . Formamos la suma de los productos $f(x_i; y_i; z_i)$ por Δs_i

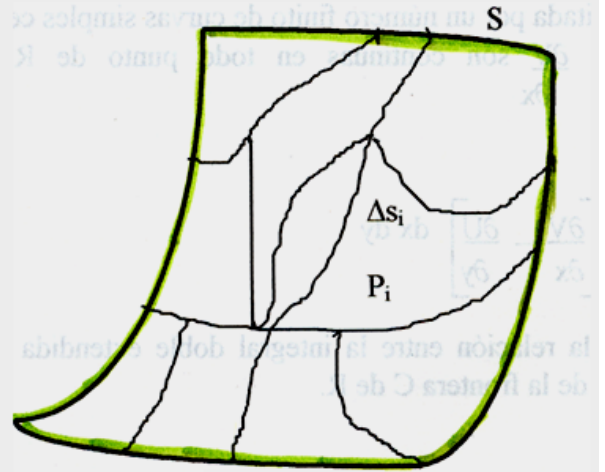


Figura 115

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i, \text{ con } x_i = \xi_i \quad y_i = \eta_i \quad z_i = \phi_i$$

$$\lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta s_i = \iint_S f(x, y, z) \cdot ds$$

Análogamente, dada una función $u = f(x;y;z)$ en una región del espacio V , se puede dividir V en subregiones cualesquiera ΔV_i , calcular luego f en un punto arbitrario P_i

(ξ_i, η_i, ϕ_i) en cada ΔV y formar la suma $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \phi_i) \Delta V_i$ el límite al tender los

elementos ΔV_i a cero, es la integral de volumen $\iiint_V f(x;y;z) \cdot dV$

TEOREMAS INTEGRALES. [3]

LEMA DE GREEN

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

Si R es una región plana limitada por un número finito de curvas simples cerradas y si $U(x;y) ; V(x;y) ; \frac{\partial U}{\partial y} \wedge \frac{\partial V}{\partial x}$ son continuas en todo punto de R y de su contorno, entonces

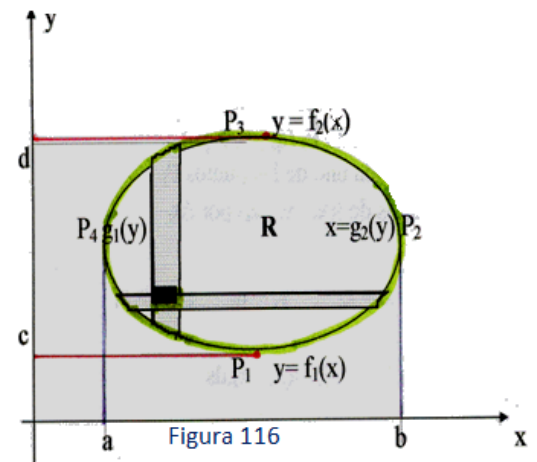
$$\int_c U \cdot dx + V \cdot dy = \iint_R \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx \cdot dy$$

Estas fórmulas determinan la relación entre la integral doble extendida en R y la integral curvilínea a lo largo de la frontera C de R .

DEMOSTRACIÓN

Suponemos primero que el contorno de R es una curva simple única C , con la propiedad que toda paralela a uno de los ejes coordenados la corta a lo más en dos puntos y tracemos las paralelas a los ejes que circunscriben a C . Entonces los arcos $P_4P_1P_2$ y $P_4P_3P_2$ definen funciones uniformes de x que llamaremos $y=f_1(x)$ y $y=f_2(x)$ respectivamente.

Análogamente los arcos $P_1P_4P_3$ y $P_1P_2P_3$ definen funciones uniformes de y que llamaremos $g_1(y)$ y $g_2(y)$ respectivamente.



Considerando ahora: $I_1 = \iint_R \frac{\partial V}{\partial x} dx \cdot dy$

Para efectuar esta integración sobre R basta integrar con respecto a x desde el arco $P_1P_4P_3$ hasta el arco $P_1P_2P_3$ y luego integrar con respecto a y entre c y d así

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_c^d \int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} \frac{\partial V}{\partial x} dx dy = \int_c^d [V(x; y)]_{g_1(y)}^{g_2(y)} dy = \\ &= \int_c^d [V(g_2(y); y)] dy - \int_c^d [V(g_1(y); y)] dy = \\ &= \int_c^d V[g_2(y); y] dy + \int_d^c V[g_1(y); y] dy \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la primera de estas integrales es precisamente la integral curvilínea $\int_c^d V(x; y) \cdot dy$ a lo largo del camino $x = g_2(y)$ desde P_1 a P_3 pasando por P_2 y la segunda es también

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

la misma integral curvilínea a lo largo de $x = g_1(y)$ en la dirección P_3 a P_1 pasando por P_4 . Juntas forman la integral curvilínea de $V(x;y)$ a lo largo de la curva C luego

$$\iint_R \frac{\partial V}{\partial x} dx dy = \int_C V(x; y) dy \quad (1)$$

Así mismo se demuestra que

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_R \frac{\partial U}{\partial y} dx dy = \iint_R \frac{\partial U}{\partial y} dy dx = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \frac{\partial U}{\partial y} dy dx = \\ &= \int_a^b \left[U(x; y) \right]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx = \int_a^b U[x; f_2(x)] dx - \int_a^b U[x; f_1(x)] dx = - \int_b^a U[x; f_2(x)] dx - \int_a^b U[x; f_1(x)] dx \end{aligned}$$

La primera de estas integrales, no es más que la opuesta de la integral curvilínea de $U(x;y)$ a lo largo de $y = f_2(x)$ en la dirección de P_2 a P_4 pasando por P_3 . La segunda es la opuesta de la integral de $U(x;y)$ a lo largo de $y = f_1(x)$ de P_4 a P_2 .

Juntas dan la integral curvilínea de $U(x;y)$ a todo lo largo de C es decir

$$\iint_R \frac{\partial U}{\partial y} dy dx = - \int_C U(x, y) dx \quad (2) \quad \text{Restando (1) de (2) y ordenando términos}$$

obtenemos:

$$\int_C U dx + V dy = \iint_R \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy$$

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

Este resultado puede ser generalizado a regiones cuyos contornos no cumplen con la condición de que toda paralela a uno de los ejes coordenados la corte a lo mas en dos puntos. Por ejemplo la región R se puede subdividir en subregiones R_i cuyos contornos C_i poseen esta propiedad. Sumando los resultados se obtiene el Lema de GREEN para la región general R . El sentido en que hay que integrar a lo largo de C para que se verifique el Lema de Green se caracteriza porque un observador que se mueve a lo largo de C , tiene siempre el interior de la región R a su izquierda.

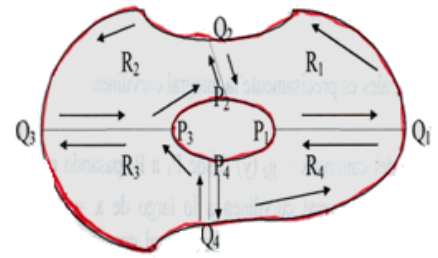


Figura 117

Este sentido se dice sentido positivo de recorrido de C . Ver figura

4. Teorema De La Divergencia. [3]

Si la función vectorial $A(x; y; z)$ y $\nabla \cdot A$ son continuas sobre la superficie cerrada regular S y en su interior V , y si n es el vector unitario normal a S en cada punto y dirigido hacia el exterior de S entonces: $\iint_S A \cdot n \, ds = \iiint_V \nabla \cdot A \, dv$

DEMOSTRACIÓN

Suponemos que S es una región cerrada tal que ninguna recta paralela a uno de los ejes coordenados la corta en más de dos puntos. Si $A = u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k$ tendremos

$$\iint_S (u \cdot i + v \cdot j + w \cdot k) \cdot n \, dS = \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot dV \quad \text{o sea}$$

$$\iint_S (u \cdot i \cdot n \, dS + v \cdot j \cdot n \, dS + w \cdot k \cdot n \, dS) = \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} dV + \frac{\partial v}{\partial y} dV + \frac{\partial w}{\partial z} dV \right)$$

$$n \cdot k = |n| \cdot |k| \cdot \cos(\alpha)$$

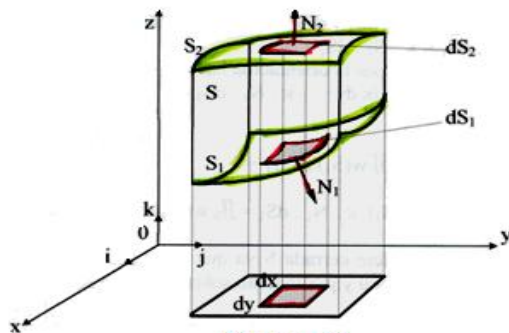


Figura 118

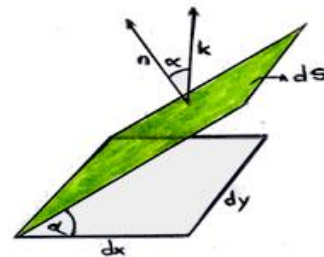


Figura 119

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

Comprobaremos esta igualdad, a través de la igualdad de las integrales

correspondientes en ambos miembros es decir $\iint_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \iiint_V \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \cdot dV$ y así sucesivamente.

$$\text{Primero consideraremos } \iint_S \mathbf{w} \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \iiint_V \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \cdot dV$$

Como se ha supuesto que ninguna paralela a los ejes coordenados, corta a S en más de dos puntos, se sigue en particular que S es una superficie que tiene dos valores sobre su proyección en el plano xy, por lo tanto, se la puede considerar como formada por una mitad superior y una mitad inferior, S_2 y S_1 respectivamente.

si se toma $dv = dx dy dz$ y se efectúa primero la integración con respecto a z será:

$$\iint \int_{S_1}^{S_2} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy = \iint [\mathbf{w}]_{S_1}^{S_2} \cdot dx \cdot dy = \iint [\mathbf{w}(S_2) - \mathbf{w}(S_1)] \cdot dx \cdot dy \quad (1)$$

Donde naturalmente x e y recorren el área del plano xy que es la proyección de S.

Además los elementos dS_1 y dS_2 se pueden definir de modo que tengan $dx dy$ como proyección común sobre el plano xy (como aparece en la figura)

Por ser n el vector unitario normal; será $k \cdot n_1$ y $k \cdot n_2$ los cosenos de los ángulos entre la normal k y el plano xy, es decir que numéricamente representan los cosenos de los ángulos según los cuales se proyecta dS_1 y dS_2 sobre el elemento $dx \cdot dy$. O sea: $dx \cdot dy = -k \cdot n_1 \cdot dS_1 = k \cdot n_2 \cdot dS_2$.

Donde el valor de $k \cdot n_1$ es negativo por la orientación hacia z(-) de n_1 .

Reemplazando estos valores en (1) ($dx dy = -k \cdot n_1 \cdot dS_1 = k \cdot n_2 \cdot dS_2$) será:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} \cdot dV &= \iint_{S_2} \mathbf{w}(S_2) dx \cdot dy - \iint_{S_1} \mathbf{w}(S_1) dx \cdot dy = \iint_{S_2} \mathbf{w}(S_2) k \cdot n_2 dS_2 + \iint_{S_1} \mathbf{w}(S_1) k \cdot n_2 dS_2 = \\ &= \iint_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \cdot dS \end{aligned}$$

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

Dado que S_1 y S_2 forman la superficie cerrada S ya que N es perpendicular a k en todos los puntos de la superficie lateral y por lo tanto sobre la misma

$$\iint_S w.k.N.dS = 0$$

De igual forma se demuestra para los otros términos y sumando ambos miembros se obtiene

$$\iint_S (u.i.ndS + v.j.ndS + w.k.ndS) = \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} dV + \frac{\partial v}{\partial y} dV + \frac{\partial w}{\partial z} dV \right)$$

$$\iint_S (\vec{A}.n.dS) = \iiint_V (\nabla A).dV$$

Los valores de la función compuesta $F_1^*(x,y, f(x,y))$ sobre los puntos de la curva C' coinciden con los valores de la función $F_1(x,y,z)$ sobre la curva C , luego :

$$\iint_S (\text{rot } F_1 \bar{i}). \bar{n} dS = \oint_C F_1 dx \quad (3)$$

Proyectando luego la superficie S sobre los planos $y = 0$ y $x = 0$ con idénticos razonamientos, se prueba que :

$$\iint_S (\text{rot } F_2 \bar{j}). \bar{n} dS = \oint_C F_2 dy \quad (4) \quad \iint_S (\text{rot } F_3 \bar{k}). \bar{n} dS = \oint_C F_3 dz \quad (5)$$

Sumando las igualdades (3) , (4) y (5)

$$\iint_S (\text{rot } F_1 \bar{i}). \bar{n} dS + \iint_S (\text{rot } F_2 \bar{j}). \bar{n} dS + \iint_S (\text{rot } F_3 \bar{k}). \bar{n} dS = \oint_C F_1 dx + \oint_C F_2 dy + \oint_C F_3 dz$$

y queda así probado que

$$\iint_S (\text{rot } \vec{F}). \bar{n} dS = \int_C \vec{F} . d\vec{r}$$

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

5. Forma No Vectorial Del Teorema De Stokes. [3]

Si: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ es el vector posición de un punto y

$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ un vector unitario normal a S es :

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{y} + \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{z}$$

$$\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial z} \right) \cdot \cos \alpha + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x} \right) \cdot \cos \beta + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \right) \cdot \cos \gamma$$

Sustituyendo estos resultados en los integrandos de la forma vectorial, se obtiene la expresión no vectorial del teorema de Stokes.

$$\int_C \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{y} + \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{z} = \iint_S \left(\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial z} \right) \cdot \cos \alpha + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x} \right) \cdot \cos \beta + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \right) \cdot \cos \gamma$$

[1] <http://www.tach.ula.ve/vermig/integral/paginas/integracion>

[2] <http://es.wikipedia.org/>

[3] El Cálculo (7 Ed.) Louis Leithold

Conclusiones

El proyecto dirigido para la materia de Cálculo II, permite que los docentes faciliten su tarea y brinden un mayor apoyo y orientación significativa al estudiante en el PEA a través de la aplicación de sus componentes:

De esta manera en el desarrollo del trabajo de investigación que ha dado lugar a la elaboración y alcance de los objetivos inicialmente planteados en cuanto a:

- Sistema multimedia asociado a la materia Cálculo II.
- Texto guía de la materia Cálculo II.
- El contenido de la materia adaptado al Moodle.

La presentación de un producto multimedia será una herramienta de gran ayuda tanto para el estudiante como para el docente, este tipo de herramientas tienen características muy particulares que lo convierten en una gran ayuda para que se lleve a cabo el proceso Enseñanza-Aprendizaje.

El propósito se cumplió porque cada componente del proyecto se lo realizó en su totalidad.

En el componente 1 se elaboró un CD multimedia que es un apoyo significativo tanto para el docente como para los estudiantes, permitiendo de esta manera hacer uso de un material didáctico-educativo donde el acceso será de manera dinámica al contenido de la materia como ser: videos, glosario de términos, animaciones, actividades, bibliografía y biografías.

- El uso de sistemas multimedia para el área educativa, debe ser tomando en cuenta como un material didáctico tecnológico que puede utilizar los docentes dentro del proceso enseñanza – aprendizaje de los estudiantes para poder aliviar la falencia de un aprendizaje no personalizado dentro de las aulas.

En el componente 2 se elaboró un texto guía de la materia el cual es un apoyo muy importante para el avance de la materia, el texto cuenta con el contenido temático en su totalidad, como ser ejercicios propuestos y así también ejercicios resueltos para que el estudiante pueda tener una guía al momento de resolver los problemas planteados en la materia.

En el componente 3 al cual se lo puede considerar la parte más fuerte del proyecto porque se adapto todo el contenido del CD multimedia a la plataforma Moodle, permitiendo de esta manera que el estudiante pueda seguir el contenido de la materia mediante el uso de internet.

- El componente Adaptación del sistema multimedia a la plataforma Moodle tendrá éxito al cumplirse factores críticos como:
 - Administración adecuada del curso, actualización del contenido de los temas por parte de los docentes de la materia
 - Uso frecuente y explotación de comunicación entre el alumno y docente, mediante foros, chat o consultas
 - Participación activa del alumno, no solo en el análisis del contenido de la materia si no en participación mediante, evaluaciones, cuestionarios o talleres.

Se pudo observar que en la actualidad el uso de herramientas como Moodle va en constante crecimiento, ayudando y facilitando la adquisición de nuevos conocimientos que favorecen en gran medida a los estudiantes.

En este punto es importante destacar que el uso de textos guías permiten estandarizar contenidos y facilitar su actualización, así como también la adaptación sobre una plataforma de aprendizaje (Moodle) es una herramienta que permite acceder a cursos a distancia y porque no hacer uso de él en la universidad “Juan Misael Saracho”.

La utilización de la metodología de guiones nos permitió formar el sistema partiendo de un relato como va a ser el de cómo va interactuar el sistema.

Los multimedia educativos, basados en una metodología de guiones y en la estructura planificada y diseñada de acuerdo al contexto en el cual será utilizada constituyen un apoyo en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Recomendaciones

- La distribución de los sistemas multimedia a los estudiantes de la materia de Cálculo II, contribuirá al conocimiento más detallado de los estudiantes de la carrera de Ing. Informática ya que son parte del grupo de involucrados beneficiados.
- A los docentes de la carrera de Ing. Informática, asignar un asesor por materia para los grupos multimedia, ya que fue de mucha necesidad durante el desarrollo del proyecto.
- Se puede recomendar a los docentes de la carrera de Ing. Informática en los siguientes aspectos:

Planificación

- Para desarrollar una de las funciones del sistema multimedia como es ser un sistema multimedia informativo se recomienda trabajar con expertos en el área de diseño gráfico, publicidad, marketing, para lograr mejores resultados.
- Asignar un asesor para el grupo multimedia ya que fue de mucha necesidad al desarrollar el proyecto.

Proyecto

- La instalación de un servidor para la plataforma Moodle y de esa forma implementar y fomentar la utilización de cursos on-line.
- Hacer uso del texto Guía de la materia de Cálculo II como un texto oficial de la materia o como un texto de respaldo para los estudiantes que cursan la materia de Cálculo II en la carrera de Ing. Informática. El texto es un complemento importante en el uso del sistema multimedia EVA-Cálculo II en la plataforma Moodle, pero por sí solo el texto contiene la teoría fundamental, práctica y evaluaciones que lo convierten en un texto completo y de gran apoyo para el estudiante.
- Una política de la U.A.J.M.S es la de disponer recursos tecnológicos para mejorar la enseñanza en las aulas, en este sentido el sistema multimedia debe llegar fortalecer esta política.

- Se recomienda a la U.A.J.M.S implementar el presente proyecto para utilizar los componentes:
 - ✓ Sistema Multimedia asociado a la materia Calculo II
 - ✓ Contenido de la materia Calculo II adaptado al Moodle
 - ✓ Implementar los sistemas multimedia ya que constituyen una herramienta que respalda el PEA y son muy necesarios en estos tiempos por que la tecnología así lo requiere.
 - ✓ Implementar el texto Guía de la materia de Cálculo II de forma que se pueda estandarizar y dinamizar contenidos a partir de la combinación de elementos teóricos y prácticos.
 - ✓ Adaptar todos los recursos disponibles que hagan referencia a la materia Cálculo II a Moodle y poner en funcionamiento un servidor para poder implementar los cursos mediante Internet.
 - ✓ Que el material que se elaboro esté al alcance de todos los alumnos de la carrera.
 - ✓ Los estudiantes que en lo posterior pretendan realizar proyectos donde se utilice la herramienta Moodle, agregar un componente al proyecto que sería el de la capacitación.