

# **ANEXOS**

**ANEXO 1**

**PROCEDIMIENTO PARA LA  
DETERMINACIÓN DEL GRADO °BRIX  
EN EL MOSTO DE FERMENTACIÓN**

## **PROCEDIMIENTO PARA LA DETERMINACIÓN DEL GRADO °BRIX EN EL MOSTO DE FERMENTACIÓN ALCOHÓLICA**

### **MÉTODOS REFRACTOMÉTRICOS.**

Entre los métodos ópticos de análisis más sencillos se hallan los que se basan en la medida del índice de refracción para ellos se necesita un instrumento llamado refractómetro es un instrumento óptico que sirve para determinar el porcentaje de sólidos solubles en una solución, el refractómetro utiliza el principio de refracción total de la luz, el cual tiene lugar en la capa límite entre el prisma y la muestra. El índice de refracción del prisma determina el límite superior del rango de medición, ya que este debe ser siempre mayor que el de la muestra. El refractómetro mide por tanto la densidad de los líquidos, cuanto más denso sea un líquido mayor será la refracción.

Refractómetro Digital



**Fuente:** Elaboración propia

## **UNIDAD DE MEDIDA GRADO °BRIX**

La Escala de Medición muestra la concentración de los sólidos solubles contenidos en una muestra (solución de agua). El contenido de los sólidos solubles es el total de todos los sólidos disueltos en el agua, incluso el azúcar, las sales, las proteínas, los ácidos, etc., y la medida leída es el total de la suma de éstos. Básicamente, el grado °brix

### **PROCEDIMIENTO**

#### **Calibración**

Antes de utilizar el equipo se debe calibrar este proceso es necesario ya que su función es la de definir el punto cero, el cual se utiliza como referencia para medir los compuestos que queremos analizar.

Para llevarlo a cabo, necesitamos colocar unas gotas de agua destilada sobre el lente del equipo y mirar podemos corregir la sombra con un tornillo de ajuste y posteriormente pulsar el botón de display. Si en la pantalla del equipo marca que el grado °brix es cero el equipo está calibrado.

#### **Aplicación de la sustancia a medir**

Luego de realizar la calibración tendremos que abrir el cobertor y aplicar unas gotas sobre el lente del equipo hasta cubrirlo por completo.

Procedemos a mirar y si la sombra no se encuentra calibrada procedemos a ajustar con el tornillo y posteriormente pulsar el botón de display.

Una vez realizada esta acción, estamos en condiciones de visualizar el valor arrojado por el equipo.

#### **Limpieza final para cuidar nuestro equipo**

Si ya terminamos de usar nuestro refractómetro, debemos estar seguros de que el lente se ha guardado sin residuos de sustancias usadas previamente.

En este caso, tendremos que limpiar el lente:

- Rociar con agua destilada el prisma.
- Secar con papel filtro
- Rociar con cloro al 10% (para eliminar microorganismo)
- Rociar con agua destilada el prisma.
- Secar con papel filtro

**ANEXOS 2**

**PROCEDIMIENTO PARA LA  
DETERMINACIÓN DE ALCOHOL  
EN EL MOSTO DE FERMENTACIÓN**

## **PROCEDIMIENTO PARA LA DETERMINACIÓN DE ALCOHOL EN EL MOSTO DE FERMENTACIÓN**

### **MÉTODO POR DESTILACION SIMPLE.**

La destilación simple: se fundamenta básicamente en que los compuestos orgánicos que están contenidos en el líquido tengan una diferencia entre los puntos de ebullición bastante notables.

Se arma un equipo de destilación como se ve en la imagen. se coloca a calentar la mezcla aquel liquido con menor punto de ebullición se evapora y por medio de un condensador se destila el líquido. Este procedimiento a pesar de servir para separar también es muy útil para la purificación de las sustancias.

### **MATERIAL**

Vaso de precipitación 600 o 1000 cm<sup>3</sup>

Probeta graduada de 300 cm<sup>3</sup>.

Termómetro contrastado de 0-100 °C

Equipo de destilación simple

### **PROCEDIMIENTO**

- Se debe tomar una muestra representativa del mosto filtrado de 500 ml en un vaso de precipitación o probeta.
- Se introduce la muestra de 500 ml al balón del equipo rota vapor y posterior mente se calienta a una temperatura constante de 78 °C.
- Procedió a abrir la valvular para que ingrese agua de refrigeración al condensador del rota vapor.
- Se debe destilar hasta obtener 250 ml de producto destilado
- Una vez obtenido el producto destilado se debe llevar a una temperatura de 20 °C. Para realizar la lectura con un alcoholímetro

## Rota Vapor Heidolph



Fuente: Elaboración propia

## Lectura del Grado Alcohol del Mosto



Fuente: Elaboración propia



Una vez conocida la cantidad de alcohol presente en 500 ml del mosto filtrado se puede calcular la cantidad de alcohol que existe en 9,500 kg de mosto con una densidad 1,068 Kg / l

Volumen del mosto =  $9,500 \text{ kg} / 1,068 \text{ kg/l} = 8,895 \text{ Litros}$

Factor muestra =  $8,895 \text{ Litros} / 0,500 \text{ Litros} = 17,790$

Cantidad de alcohol presente en 8,895 Litro =  $17,790 \times 32,200 \text{ ml} = 572,846 \text{ ml}$  de alcohol existente.

Con este dato se calcula el grado alcohólico del mosto filtrado.

Grado alcohólico del mosto  $^{\circ}\text{GL} = (100 * 572,846 \text{ ml}) / 8895 \text{ ml}$

Grado alcohólico del mosto  $^{\circ}\text{GL} = 6,44$

**Nota** se procedió a utilizar un rota vapor para realizar el destilado simple debido a la falta de un equipo de destilación en el laboratorio de operaciones unitarias (LOU).

**ANEXO 3**

**PROCEDIMIENTO PARA LA**

**DETERMINACIÓN DE ALCOHOL EN**

**MUESTRA DESTILADA**

## **PROCEDIMIENTO PARA LA DETERMINACIÓN DE ALCOHOL EN MUESTRA DESTILADA**

### **MÉTODO ALCOHOLÍMETRO**

El alcoholímetro permite medir el porcentaje del alcohol en una solución de agua y de alcohol (conocido como destilado) y suministra una lectura del nivel de alcohol exacto y constante en el momento de la salida del destilado.

Grado alcohólico: Es el volumen de alcohol etílico, expresado en centímetros cúbicos, contenido en 100 cm<sup>3</sup> de bebida alcohólica, a una temperatura determinada por el fabricante

Se denomina grado aparente a la lectura del grado alcohólico del destilado a una temperatura diferente a la de referencia por el fabricante. La lectura de un grado aparente debe darse siempre indicando la temperatura a la cual dicha lectura fue tomada. También se considera grado aparente la lectura alcoholimetría de una mezcla que no sea pura, debido a la adición de sustancia que altera la densidad de la mezcla. En este caso, para determinar el grado alcohólico real, debe someterse a un proceso de destilación, hasta obtener una mezcla hidroalcohólica pura.

Este modelo incluye una escala de Cartier y de Gay Lussac. La escala Cartier fue introducida en 1771 para controlar el licor y substituida por la escala de Gay Lussac en 1824 que indica la concentración de alcohol en volumen.

### **MATERIAL**

- Alcoholímetro Nahita (rango 0-100 % vol. (Gay Lussac) y 10-44° (Cartier), calibrado: 20°C, longitud total: 290 mm).
- Termómetro graduado en grado Celsius (°C).
- Probeta de capacidad y diámetro adecuados para evitar rozamiento con el alcoholímetro.

## PROCEDIMIENTO

- Se mide 250 ml de la muestra destilada en un vaso de precipitación, anotando su temperatura.
- Se lleva la muestra a una probeta de capacidad de 300 cm<sup>3</sup> previamente enjuagada con agua destilada
- Se coloca la probeta con la muestra sobre una superficie plana horizontal (la probeta debe estar perfectamente vertical).
- Se coloca el alcoholímetro cuidando evitando que este no toque las paredes de la probeta y dejar reposar por 15 min hasta que se alcance un equilibrio de temperatura y posteriormente se toma la lectura en % vol °GL.

Alcoholímetros Nahita



Fuente: Elaboración propia.

Determinación del grado alcohólico (°GL)

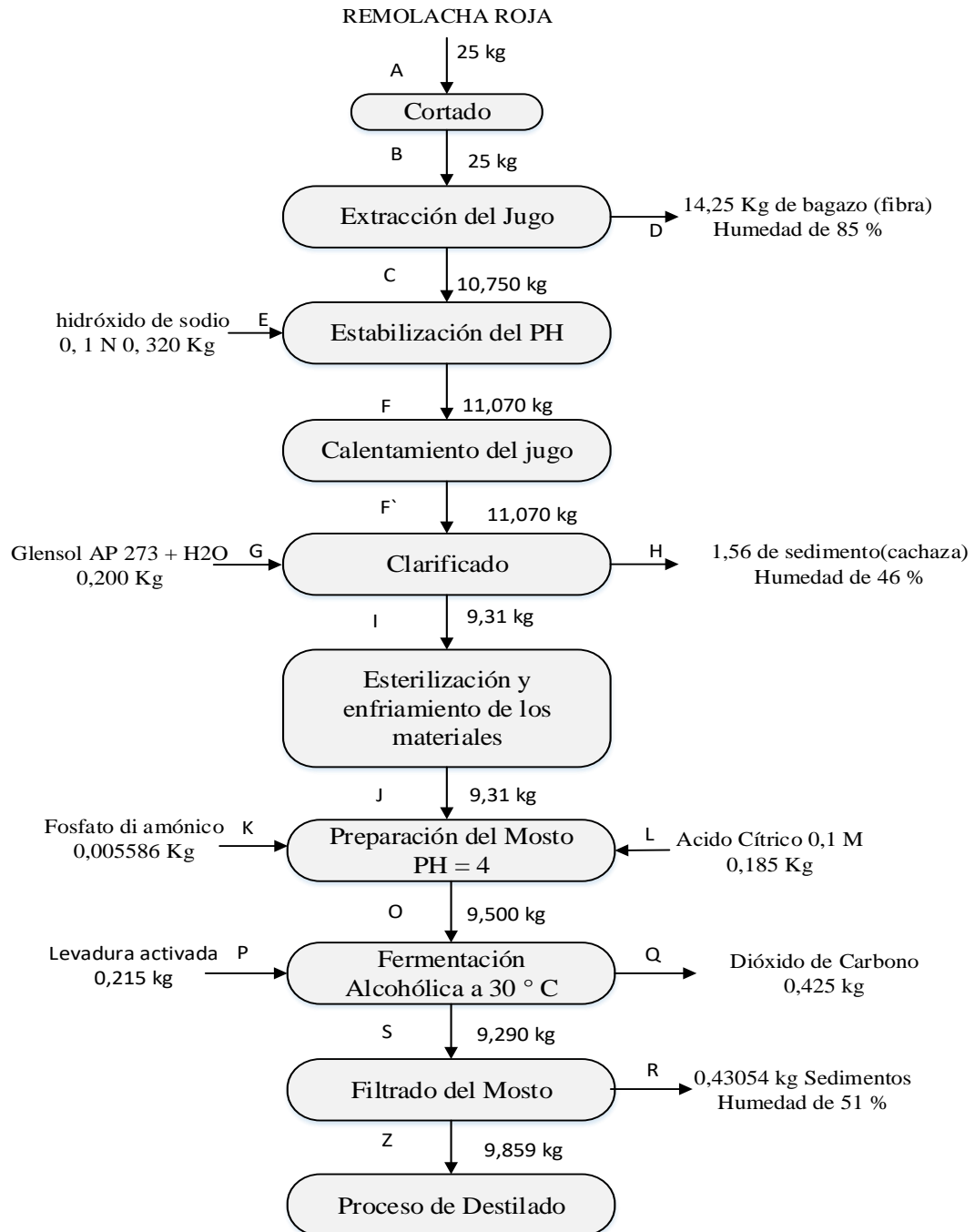


Fuente: Elaboración propia.

**ANEXO 4**

**BALANCE DE MATERIA PROCESO DE  
FERMANTACION ALCOHOLICA**

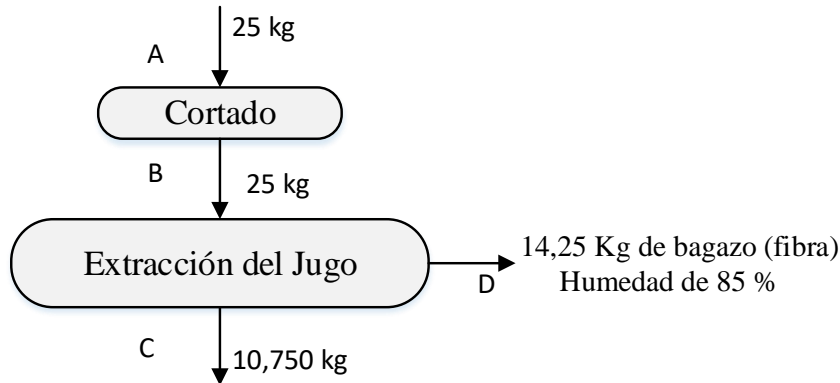
## BALANCE DE MATERIA EN EL PROCESO DE FERMENTACIÓN ALCOHÓLICA



Fuente: Elaboración propia.

$$\text{Balance global: } A+E+G+K+L+P=D+H+Q+R+Z$$

## BALANCE DE MATERIA PARA CADA PROCESO



A= Masa de remolacha roja = 25 kg.

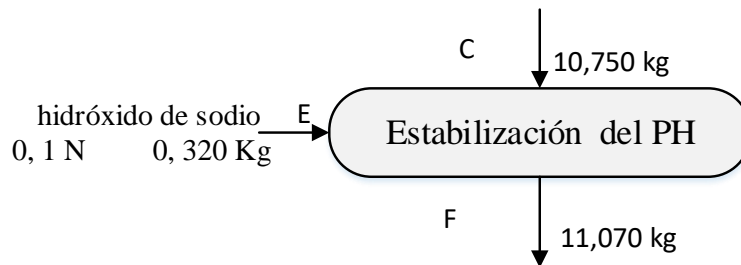
Las pérdidas por cortes son insignificantes donde  $A = B$

D = Masa de bagazo (material orgánico que se pierde por la extracción del jugo con una humedad de 85%)

D = 14,25 kg

**Balance en la extracción del jugo  $B = D + C$**

$$C = 25 \text{ kg} - 14,25 \text{ kg} = 10,750 \text{ kg}$$

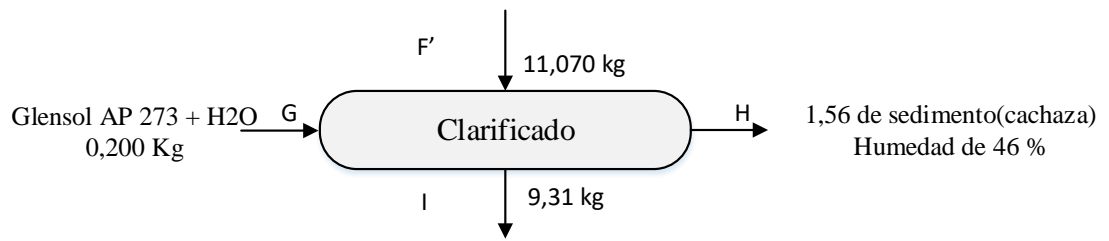


E = Masa del hidróxido de sodio para regular el pH adicionando 0,320 kg de solución al 0,1 N

**Balance en la estabilización del pH  $C = E + F$**

$$F = 0,320 \text{ kg} + 10,750 \text{ kg} = 11,070 \text{ kg}$$

**Balance en el Calentamiento del jugo  $F = F' = 11.070$**

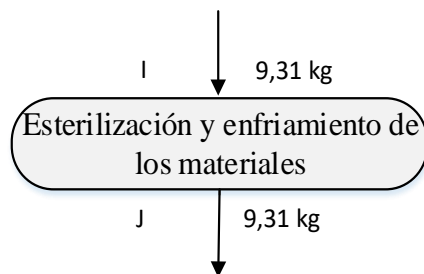


$G = \text{Masa del agente clarificante} = 0,200 \text{ kg}$

$H = \text{Sedimento (material orgánico e inorgánico que se encontraba en suspensión en la solución)} = 1,560 \text{ kg con una humedad de } 46 \%$

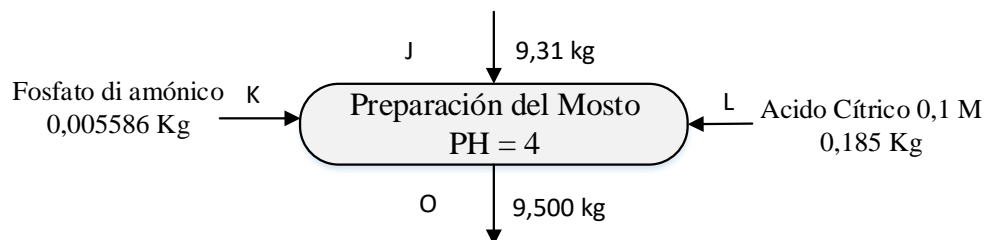
**Balance en el proceso de clarificado  $F + G = I + H$**

$$I = 11,070 \text{ kg} + 0,200 \text{ kg} - 1,56 \text{ kg} = 9,310 \text{ kg}$$



Debido que en el proceso de esterilización por calentamiento a una temperatura inferior a la de ebullición el balance queda de esta manera

**Balance en el proceso de esterilización y enfriamiento  $I = J$**



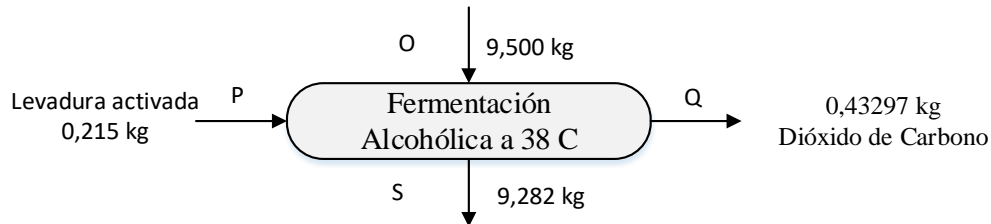
$K = \text{Masa del fosfato di amónico (nutriente)} = 0,005586 \text{ kg}$

$L = \text{Masa del ácido cítrico } 0,1 \text{ M} = 0,185 \text{ Kg}$



### Balance en la preparación del mosto $J + K + L = O$

$$O = 9,310 \text{ Kg} + 0,005586 \text{ kg} + 0,185 \text{ kg} = 9,500 \text{ kg}$$

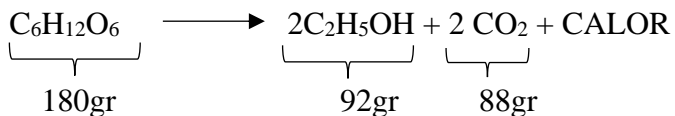


### Balance en la fermentación alcohólica $P + O = Q + S$

$$S = 9,500 \text{ kg} + 0,215 \text{ kg} - 0,43297 \text{ kg} = 9,282 \text{ kg}$$

### CALCULO DEL RENDIMIENTO DEL PROCESO DE FERMENTACIÓN ALCOHÓLICA.

Para calcular la masa de  $\text{CO}_2$  desprendido del proceso de fermentación se debe conocer el rendimiento de la fermentación alcohólica para ello se procedió a realizar un cálculo de estequiometria aplicando la ley de conservación de la masa en una reacción química.



$O = 9500 \text{ gr}$  de mosto con un grado  $^{\circ}\text{brix} = 16,6$

Por bibliografía sabemos que un grado  $^{\circ}\text{brix}$  es igual a un gramo de sacarosa en 100 gr de solución

Calculamos la cantidad de sacarosa en el mosto  $9500 / 100 = 95$

Masa de sacarosa en el mosto  $16,95 * 95 = 1610,250 \text{ gr}$

a hora se procede a calcular el alcohol teorico por la reacción química de formación del alcohol

$$M_{\text{alcohol teorico}} = 1610,250 \text{ gr } \cancel{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6} * \frac{92 \text{ gr } \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}}{180 \text{ gr } \cancel{\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}} =$$

$$M_{\text{alcohol teórico}} = 823,0166 \text{ gr } \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$$

En el capítulo 4 se procedió a calcular la cantidad de alcohol en el mosto de fermentación dando como resultado 572,846 ml de alcohol existente por bibliografía se sabe que la densidad del alcohol 789 gr / L

$$\text{Masa real de alcohol en el mosto} = 0,572846 \text{ L} * 789 \text{ gr /L} = 451,9754 \text{ gr}$$

A partir de los datos obtenidos se puede calcular el rendimiento de la fermentación alcohólica

$$\text{RENDIMIENTO \%} = \frac{\text{MASA SUSTANCIA REAL}}{\text{MASA SUSTANCIA TEORICO}} * 100$$

$$\text{RENDIMIENTO \%} = (451,975\text{gr} / 823,0166 \text{ gr}) * 100 = 54,91$$

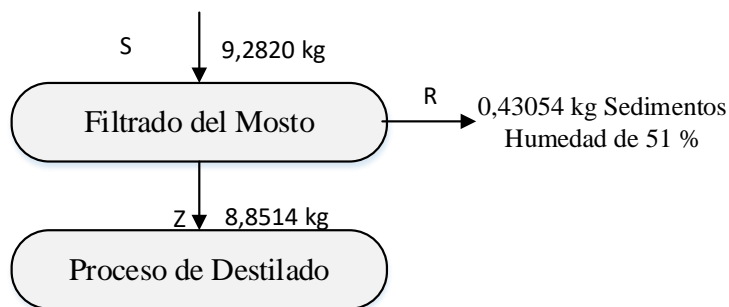
$$\text{RENDIMIENTO \%} = 55$$

calculamos la cantidad de dióxido de carbono teórico

$$\text{Masa} = 1610,250 \text{ gr } C_6H_{12}O_6 * \frac{88 \text{ gr } CO_2}{180 \text{ gr } C_6H_{12}O_6} = 787,233 \text{ gr } CO_2$$

Para calcular la cantidad real de dióxido de carbono desprendido del proceso de fermentación se debe multiplicar por el rendimiento de la fermentación.

$$Q = 787,233 \text{ gr} * 0,55 = 432,978 \text{ gr}$$



R = Masa del sedimento que se deposita en el reactor de fermentación con una humedad de 51%

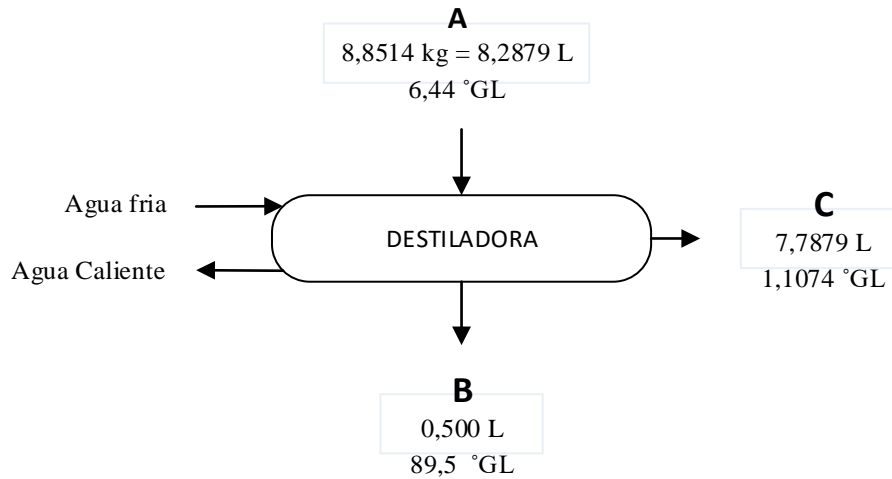
**Balance en el proceso de filtrado del mosto S = Z + R**

$$Z = 9,282 - 0,430 = 8,8514 \text{ Masa del mosto filtrado}$$

**ANEXO 5**

**BALANCE DE MATERIA PROCESO DE  
DESTILACION ALCOHOLICA**

## BALANCE DE MATERIA EN EL PROCESO DE DESTILACION ALCOHÓLICA.



En la destilación alcohólica debido que vamos a utilizar un alcoholímetro tenemos que transformar las corrientes a volumen. La densidad del mosto filtrado de 1,068 kg / L

En el capítulo 4 se procedió a calcular la cantidad de alcohol real de 572,846 ml a partir de ese dato se calculó el grado alcohólico del mosto.

**Balance en el proceso de destilación alcohólica  $A = B + C$**

$$C = 8,2879 \text{ L} - 0,500 \text{ L} = 7,7879 \text{ L}$$

Balance para el alcohol

$$X_C * C = X_A * A - X_B * B$$

dónde:  $X_A = 0,0644$      $X_B = 0,895$

$$X_C = (X_A * A - X_B * B) / C$$

$$X_C = (8,2878 \text{ L} * 0,0644 - 0,500 \text{ L} * 0,895) / 7,787$$

$$X_C = 0,011 = 1,107 \text{ } ^0\text{GL}$$

**ANEXO 6**  
**DESCRIPCIÓN DE LOS EQUIPOS**

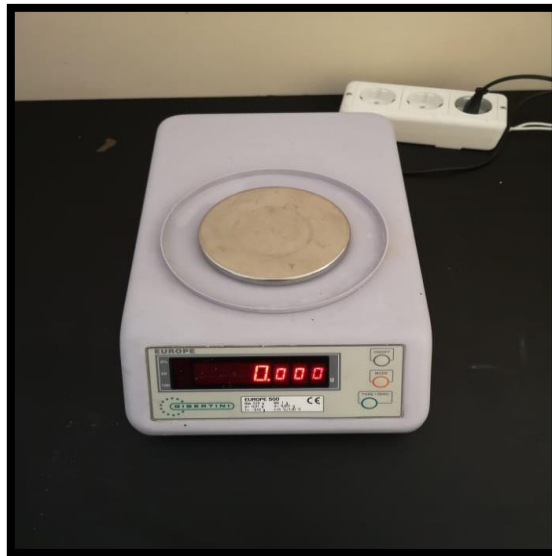
## DESCRIPCIÓN DE LOS EQUIPOS UTILIZADOS

Los equipos utilizados para llevar a cabo el proyecto de investigación: obtención de bioetanol a escala laboratorio por fermentación alcohólica a partir de la remolacha roja producida en el departamento de Tarija. se describen a continuación.

### BALANZA ANALÍTICA ELECTRÓNICA

La *balanza analítica gilbertini de laboratorio* de operaciones unitarias determina el peso en gramos con una capacidad máxima de 510 gr y una capacidad mínima de 1 gr de precisión, exactitud: 0.01 gr y potencial de 220 W (Ojo: La precisión depende del alcance máximo).

Balanza Analítica Gilbertini



Fuente: Elaboración propia

### EXTRACTOR DE JUGOS

Este extractor de jugos de Philips extrae jugo de frutas y verduras. Características técnicas de la extractora de jugo Philips: Alimentación eléctrica de 220 V y 110 V, Motor 100 W de potencia, Jarra graduada de 0,8 litro de capacidad, Frecuencia: 40-50 Hz y velocidad 1500 R.P.M Giro bidireccional.

## Extractora de jugo Philips



Fuente: Elaboración propia

## **ROTA VAPOR**

Se utiliza principalmente para separar por medio de evaporación a presión reducida y suave, el solvente que acompaña al soluto de interés o bien, para realizar destilaciones fraccionadas.

Características técnicas de la rota vapor heidolph: tensión: 230V - 240V, frecuencia: 50-60 Hz, velocidad mínima: 150 R.P.M y velocidad máxima: 800 R.P.M, potencial: 1320 W, temperatura mínima 30°C y temperatura máxima: 160°C.

## Rota Vapor Heidolph



Fuente: Elaboración propia

## **AUTOCLAVE**

La esterilización con vapor saturado es el método universal más utilizado, aplicable a todos aquellos artículos que pueden soportar el calor y la humedad. Indicado para esterilizar: medios de cultivo, vidrios, líquidos, plásticos, elementos metálicos, bolsas de desecho, etc.

Características técnicas de la autoclave Raypa: tensión: 220V - 380V, Capacidad: 28 litros, Medidas interior: 300 mm Diámetro x 400 Alto mm, Medidas exterior: 1010 mm Alto x 510 mm Ancho x 560 mm Fondo, Potencial: 2000 W, Peso: 60 kg, presión máxima 1.5 bares



## Autoclave Raypa



Fuente: Elaboración propia

### **TERMOSTATO DE INMERSIÓN**

Termostato de inmersión para temperaturas regulables desde ambiente +5°C hasta 100°C, equipado con una bomba para agitación y circulación, volumen máximo a temperatura límite de 20 litros, profundidad mínima de fijación a la cubeta de 14 cm, sensor de temperatura por termoresistencia Pt 100.

Termostato de Inmersión J.P. Selecta



Fuente: Elaboración propia

## **BOMBA DE VACÍO**

Bomba de vacío está caracterizada por su velocidad de bombeo y la cantidad de gas evacuado por unidad de tiempo. Toda bomba de vacío tiene una presión mínima de entrada, que es la presión más baja que puede obtenerse, y también, un límite superior a la salida.

Características técnicas: Bomba de vacío modelo Telstar A 6611-04 tensión: 230V, frecuencia: 50 – 60 Hz rango de presión de vacío 0-100 kPa

Bomba de vacío Telstar



Fuente: Elaboración propia

## COLUMNA DE DESTILACIÓN

Se procedió a realizar la separación del producto de nuestro interés (etanol) mediante el proceso de destilación en una columna de destilación discontinua UOP3BM a escala de laboratorio para entrenamiento en carreras técnicas y de ingeniería

Permite extraer solventes inflamables: metilciclohexano-tolueno, tolueno-clorobenceno, ciclohexano-heptano, clorobenceno-etilbenceno, metanol-etanol, etanol-agua.

Destilación Discontinua UOP3BM



Fuente: Elaboración propia

## Accesorio

- Estructura de acero con columna, caldera y recirculador
- Panel de control e instrumentación, con conectores a prueba de llamas, que puede ubicarse hasta a 2m de la unidad principal
- Cada bandeja tiene un sensor de temperatura y un puerto para toma segura de muestras con una aguja hipodérmica
- La potencia de la caldera se controla con un compensador PID

## Consola de Control

Permite monitorear y observar mediante un display con selección de entrada, al menos 13 temperaturas del sistema, incluyendo las presentes en cada bandeja de destilación, la caldera y el condensador.

### Consola de Control



Fuente: Elaboración propia

Permite monitorear, observar y controlar manualmente la potencia eléctrica entregada a los calefactores y el ajuste de la relación de reflujo.

Conexión a red con un consumo máximo de 3kW, protegida por un disyuntor diferencial. También se dispone de circuitos de protección contra arranque indeseado.

### **REFRACTÓMETRO DIGITAL ABBE**

El refractómetro está equipado con un sistema de observación compuesto por una unidad telescópica y una unidad correctora de dispersión, útiles para definir la línea divisoria entre el área oscura y el área brillante. de gran precisión con corrector automático de la temperatura en el °Brix y display indicador de la temperatura de la muestra a continuación se menciona los rangos de trabajo del equipo:

Rango de medición del índice de refracción  $n_D$ : 1.3000 - 1.7000, Rango de trabajo de la temperatura: 0 - 50 °C y Rango de corrección del °Brix respecto a la temperatura: 15 - 45 °C.

Refractómetro Digital



Fuente: Elaboración propia

**ANEXO 7**  
**ECUACIONES ANÁLISIS**  
**ESTADÍSTICO**

## ANÁLISIS DE VARIANZA (ANOVA)

El análisis de varianza (ANOVA) permite comparar simultáneamente todas las medidas, la comparación de las medidas muestrales se basa en las varianzas muestrales.

**Tratamiento:** Es la fuente de datos cuya variación proporciona las observaciones.

Sean:

- k:** Número de tratamientos
- n:** Número total de observaciones en todos los tratamientos combinados
- n<sub>j</sub>:** Número total de observaciones en cada tratamiento  $j = 1, 2, \dots, k$
- x<sub>ij</sub>:** Es la i-esima observación del tratamiento j
- $\bar{x}_j$ :** Media muestral del tratamiento j (incluye las observaciones de cada tratamiento)
- $\bar{x}$ :** Media muestral general (incluye a todas las observaciones de todos los tratamientos)

**Variación Total:** Es la variación total combinada de las observaciones de todos los tratamientos con respecto a la media general.

$$\text{Media muestral del tratamiento } j: \bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$$

$$\text{Variación de tratamientos: } \text{SCTr} = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \quad (\text{Suma cuadrática de tratamientos})$$

**Variación aleatoria o error:** Es la variación dentro de cada tratamiento debido a errores en el experimento.

Variación aleatoria o error: **SCE = SCT – SCTr** (Suma cuadrática del error)

La ecuación **SCT = SCTr + SCE** separa la variación total en dos componentes: el primero corresponde a la variación atribuida a los tratamientos y el segundo es la variación atribuida a la aleatoriedad o errores del experimento.

SCTr tiene  $k - 1$  grados de libertad (varianza ponderada con k tratamientos)

SCE tiene  $n - k$  grados de libertad (existen n datos y k tratamientos)

SCT tiene  $n - 1$  grados de libertad (suma de grados de libertad de SCTr y SCE)

Si cada uno se divide por el número de grados de libertad se obtienen los cuadrados medios

$$F_0 = \frac{\frac{SCTr}{k-1}}{\frac{SCE}{n-k}} =$$

- 1) Hipótesis nula  $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$  (las medias poblacionales son iguales)
- 2) Hipótesis alterna:  $H_a: \neg H_0$  (al menos dos medias son iguales)
- 3) Definir el nivel de significancia de la prueba  $\alpha$
- 4) Elegir el estadístico de prueba: Distribución F con  $v_1 = k - 1$ ,  $v_2 = n - k$  g. l. Definir la región de rechazo de  $H_0$
- 5) Calcular  $F_0$
- 6) Decidir

Tabla Anova (Análisis de Varianza)

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_0$
Tratamiento	$k - 1$	SCTr	$SCTr/(k - 1)$	$(SCTr/(k - 1))/(SCE/(n - k))$
Error	$n - k$	SCE	$SCE/(n - k)$	
Total	$n - 1$	SCT		

Fuente: Rodríguez, 2007

## REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

En donde  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  son los parámetros que deben estimarse para el modelo, mientras que  $\varepsilon$  es el componente aleatorio de  $Y$ .

## MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_k x_k$$

En donde  $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$  son los  $k+1$  estimadores para los  $k+1$  parámetros  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ . Para cada valor  $x_i$  se tiene el dato observado  $y_i$ , mientras que al evaluar el modelo de los mínimos cuadrados con este mismo valor  $x_i$  se obtiene el valor  $\bar{y}_i$ .

Sea  $e_i = y_i - \bar{y}_i$ , la diferencia de estos dos valores se denomina el residual



## SUMA DE LOS CUADRADOS DEL ERROR

$$SCE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 x_{1,i} - \widehat{\beta}_2 x_{2,i} - \dots - \widehat{\beta}_k x_{k,i})^2$$

SCE es una función con k+1 variables:  $\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_k$

Para minimizar SCE:

$$\frac{\partial SCE}{\partial \widehat{\beta}_1} = 0, I = 0, 1, 2, \dots, k$$

Resulta un sistema de k+1 ecuaciones lineales de donde se obtienen los k+1 estimadores  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ .

## ANÁLISIS DE VARIANZA

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$SCT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad SCE = \sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{y}_i)^2 \quad SCR = \sum_{i=1}^n (\widehat{y}_i - \bar{y})^2$$

Se obtiene la relación entre las fuentes de error del modelo de regresión múltiple

$$SCT = SCR + SCE$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \widehat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^n (\widehat{y}_i - \bar{y})^2$$

SCT: Suma de cuadrados total

SCR: Suma de cuadrados de regresión

SCE: Suma de cuadrados del error

## COEFICIENTE DE DETERMINACIÓN

El coeficiente de determinación es otra medida de la relación lineal entre las variables x y y. Es útil para interpretar la eficiencia de la recta de mínimos cuadrados para explicar la variación de la variable de respuesta (y)

Definición: Coeficiente de determinación

$$r^2 = \frac{SCR}{SCT}, \quad 0 \leq r^2 \leq 1$$

El valor de  $r^2$  mide el poder de explicación del modelo de mínimos cuadrados. Si  $r^2$  es cercano a 1 significa que la recta de mínimos cuadrados se ajusta muy bien a los datos.

**Tabla Anova**

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_0$
Regresión	k	SCR	SCR/k	(SCR/k)/(SCE/(n-k-1))
Error	n - k - 1	SCE	SCE/(n - k - 1)	
Total	n - 1	SCT		

Fuente: Rodríguez, 2007

### PRUEBA DE DEPENDENCIA LINEAL DEL MODELO

$$F_0 = \frac{SCR/k}{SCE/(n-k-1)}$$

Puede demostrarse que tiene distribución F con  $v_1 = k$ ,  $v_2 = n - k - 1$  grados de libertad.

$H^0$ :  $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$ , No hay dependencia lineal de  $y$  con  $X_i$

$H_a$ :  $\neg H_0$ , la respuesta  $Y$  depende al menos una variable  $X_i$

Si se especifica el nivel de significancia  $\alpha$  de la prueba, entonces la región crítica es

Rechazar  $H_0$  si  $f_0 > f_\alpha$  con  $v_1 = k$ ,  $v_2 = n - k - 1$  grados de libertad.

### ESTIMACIÓN DE LA VARIANZA

La varianza de los errores del modelo  $\sigma^2$  es desconocida. Para poder hacer inferencias acerca de los parámetros  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  es necesario un estimador.

$$s^2 = \frac{SCE}{n - k - 1} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - k - 1}$$

## ESTADÍSTICOS PARA ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Se establecen los datos estadísticos para realizar las inferencias

$$t = \frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\sigma_{\widehat{\beta}_i}^2}}, i=0,1,\dots,k$$

Tienen distribución t con v: n-k-1 grados libertad

### INTERVALO DE CONFIANZA

Parámetro:  $\beta_i$ ,  $i = 0,1,\dots, k$

Estimador:  $\widehat{\beta}_i$ ,  $i = 0,1,\dots, k$

El estadístico

$$t = \frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\sigma_{\widehat{\beta}_i}^2}}, \text{ Tiene distribución t con } v = n-k-1 \text{ grados libertad.}$$

La desigualdad  $-t_{\alpha/2} \leq t \leq t_{\alpha/2}$  tiene probabilidad  $1-\alpha$  de donde se obtiene:

$$\widehat{\beta}_i - t_{\alpha/2} \sqrt{\sigma_{\widehat{\beta}_i}^2} \leq \beta_i \leq \widehat{\beta}_i + t_{\alpha/2} \sqrt{\sigma_{\widehat{\beta}_i}^2}, i=0,1,\dots,k$$

### PRUEBA DE HIPÓTESIS

Parámetro:  $\beta_i$ ,  $i = 0,1,\dots, k$

Estimador:  $\widehat{\beta}_i$ ,  $i = 0,1,\dots, k$

- 1)  $H_0$ :  $\beta_i = b_0$  (Algún valor especificado para el parámetro  $\beta_0$ )
- 2)  $H_a$ :  $\beta_i < b_0$  o  $\beta_i > b_0$  o  $\beta_i \neq b_0$
- 3)  $\alpha$  nivel de significancia de la prueba
- 4) Estadístico de prueba

$$t = \frac{\widehat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\sigma_{\widehat{\beta}_i}^2}}, \text{ Tiene distribución t con } v = n-k-1 \text{ grados libertad.}$$

$i=0,1,\dots,k$

Si se especifica el nivel de significancia  $\alpha$  se define la región de rechazo de

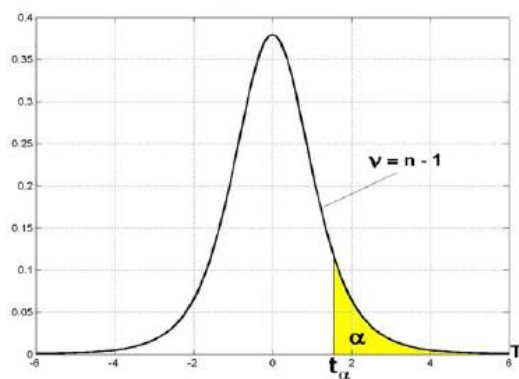
$$\text{Ha: } \beta_i < b_0 \quad t < -t_\alpha$$

$$\text{Ha: } \beta_i > b_0 \quad t > t_\alpha$$

$$\text{Ha: } \beta_i \neq b_0 \quad t < -t_{\alpha/2} \vee t > t_{\alpha/2}$$

Es importante probar la hipótesis  $H_0: \beta_i = 0$  individualmente con cada parámetro  $\beta_i$ . En caso de que se pueda rechazar  $H_0$ , se puede concluir que la variable contribuye significativamente a la respuesta; caso contrario, la variable es redundante y puede eliminarse del modelo.

## TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN T

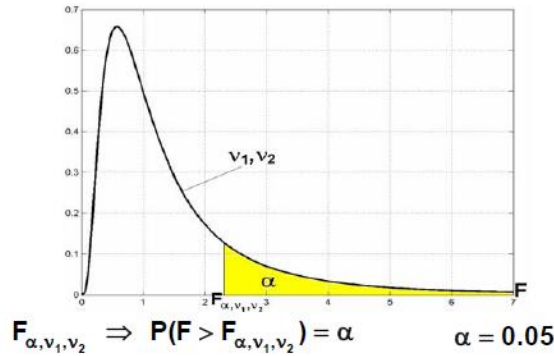


$$t_{\alpha} \Rightarrow P(T \geq t_{\alpha}) = \alpha$$

$\alpha$	.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
v										
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.320	318.310	636.620
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
$\infty$	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Fuente: Rodríguez, 2007

## TABLA DE LA DISTRIBUCIÓN F



		$v_1$																	
$v_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.55	1.43	1.35	1.25
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Fuente: Rodríguez, 2007