

## **I. EL OBJETO DEL CONOCIMIENTO.**

### **1.1. EL PROBLEMA.**

#### **1.1.1. Antecedentes.**

La razón por la cual el hormigón es preferido en la construcción es porque presenta características significativas de durabilidad, trabajabilidad, impermeabilidad y resistencia. La propiedad más conocida del hormigón es la resistencia a la compresión, sin embargo, el Módulo de Rotura toma un papel muy importante al momento de diseñar pavimentos u otras estructuras apoyadas sobre terrenos como losas y otros.

Tomando como punto de referencia a la ingeniería vial, se han realizado investigaciones a diferentes mezclas de hormigón empleadas para pavimentos rígidos con el fin de encontrar relaciones entre sus propiedades, como es el caso de la relación entre la resistencia a la compresión y el Módulo de Rotura (resistencia a la tracción por flexión). Actualmente, en el país son escasos los laboratorios de hormigón dedicados a obtener este tipo de información, sin embargo, para efectos de precisión en los diseños, es importante contar con información certera, es ahí donde se hace necesaria la obtención de la relación de estos dos valores por medio de ensayos.

Existen diferentes estudios realizados en diferentes países con objeto de determinar la relación existente entre estas dos variables mediante la adecuación de modelos matemáticos, tal es el caso de la norma ACI-318 en la cual se establece un modelo matemático de carácter potencial que es en el cual se hará énfasis en el presente estudio.

#### **1.1.2. Planteamiento.**

La calidad del hormigón representa un parámetro fundamental en el correcto desarrollo de las obras civiles modernas. La resistencia a la compresión y el Módulo de Rotura (resistencia a la tracción por flexión) son indicadores del desempeño que presenta un concreto preparado luego de cumplir satisfactoriamente su ciclo de

fraguado. Los ensayos de flexión son extremadamente sensibles a la preparación, manipulación y procedimientos de curado de las probetas. Las vigas son muy pesadas y pueden ser dañadas cuando se manipulan y transportan desde el lugar de trabajo hasta el laboratorio. Las vigas deben ser curadas de forma normativa, y ensayadas mientras se encuentren húmedas. El cumplimiento de todos estos requerimientos en el lugar de trabajo es extremadamente difícil, lo que da frecuentemente como resultado valores de Módulo de Rotura no confiables y generalmente bajos. Por esta razón, es más común el uso de ensayos de compresión para determinar la calidad de una mezcla de hormigón. Sin embargo, en el caso específico de hormigones preparados para pavimentos, es vital conocer el desempeño de éste a la flexión. En la práctica, es común utilizar la relación directa que existe entre el Módulo de Rotura (Resistencia a la tracción por flexión) y la resistencia a la compresión, a través de la adecuación de un modelo matemático que represente esta relación y permita obtener valores ciertos y confiables de la resistencia a flexión a través del valor de la resistencia a compresión, y la pregunta que surge en este sentido es: ¿Como se comportarán las variables módulo de rotura y resistencia a compresión del hormigón adecuándolos a un modelo matemático de tipo potencial como el planteado por la norma ACI-318?

### **1.1.3. Formulación.**

En las últimas décadas, debido al crecimiento de la población urbana y rural en los principales departamentos de Bolivia, y gracias al desarrollo económico y tecnológico del país, se ha presentado un notable incremento en la construcción de estructuras que garanticen y mejoren la calidad de vida de la población en general. El aumento de las obras civiles requeridas para este desarrollo, implica a la vez desarrollar metodologías que garanticen la calidad de los trabajos y la durabilidad de dichas obras.

La industria civil Boliviana, al igual que la mayoría de países, utiliza la resistencia a la flexión como parámetro para medir la calidad de los hormigones utilizados en distintos tipos de obras. Aplicar un modelo matemático que relacione de forma directa los valores de resistencia mecánica del hormigón como lo son la resistencia a la compresión y el Módulo de Rotura (Resistencia a tracción por flexión) permitirá

que los valores obtenidos para la resistencia a la flexión sean en lo posible más reales, evitando adicionalmente en este caso el dificultoso y cuidadoso trabajo de elaboración de muestras para dichos ensayos.

#### **1.1.4. Sistematización.**

Las investigaciones de correlación entre las resistencias a compresión y flexión por tracción del hormigón han llevado a concluir que el ensayo a compresión es el método más indicado para calificar la calidad del hormigón por ser el método más confiable y de fácil ejecución por lo cual basarnos en éste valor para el cálculo de la resistencia a la flexión permita la obtención de resultados más confiables.

Un estudio de este tipo en su desarrollo incluye en su primera etapa la recolección de datos definiendo previamente el campo muestral que se será empleado para el caso en particular, los datos son el resultado de los ensayos a compresión y tracción por flexión realizados a muestras de hormigón en laboratorio, los cuales se someten a pruebas de normalidad para el uso de parámetros que representen a las muestras, como lo son las mediantes de posición, dispersión y otras. Estas pruebas de normalidad definen la aplicabilidad o no de una distribución normal, en el caso de no ajustarse a dicha distribución se someten a una depuración de datos siguiendo metodologías recomendadas para el caso.

La obtención del modelo matemático precisa la aplicación de una regresión mediante la cual se hace un ajuste de los datos al modelo potencial expuesto por la norma ACI-318 en el cual se expresa una constante matemática que define la proporción en la que influye una variable con la otra.

### **1.2. OBJETIVOS.**

El trabajo de investigación tiene como objetivos a alcanzar los siguientes:

#### **1.2.1. General.**

- Establecer el modelo matemático que correlacione el módulo de rotura y la resistencia a compresión del hormigón elaborado con cemento El Puente tipo IP-30.

### **1.2.2. Específicos.**

- Determinar las propiedades físico-mecánicas de los agregados para la elaboración de las mezclas de hormigón.
- Determinar las proporciones en que cada material participa, de acuerdo a un diseño de mezcla, para resistencias de 180, 210, 280 y 350 kgf/cm<sup>2</sup> mediante el método ACI-211.
- Realizar ensayos de resistencia a compresión y a flexión a muestras elaboradas.
- Determinar el valor de la constante " K " que correlaciona las resistencias a compresión y a flexión del hormigón.

### **1.3. JUSTIFICACIÓN.**

La industria del hormigón y las agencias de inspección y ensayos están mucho más familiarizados con los ensayos tradicionales a compresión de las probetas cilíndricas, para el control y la aceptación del hormigón. La flexión puede ser utilizada con propósitos de diseño, pero la resistencia a compresión correspondiente debe ser utilizada para ordenar y aceptar la mezcla.

Los datos obtenidos puntualizan la necesidad de hacer una revisión de los procedimientos corrientes de ensayo. Ellos sugieren también que, mientras el ensayo de resistencia a flexión es una herramienta útil en la investigación y en la evaluación de laboratorio de los ingredientes del hormigón y de sus proporciones, es muy sensible a las variaciones de los ensayos para ser utilizado como base para la aceptación o rechazo del hormigón en el campo. En el momento en que se realicen las mezclas de prueba, se deberán hacer tanto los ensayos a flexión como a compresión de manera que puede ser desarrollada una correlación para el control de campo.

Las necesidades de adecuar un modelo matemático que correlacione las variables de resistencia a compresión y el Módulo de Rotura se hace evidente al observar las dificultades que representa ejecutar los ensayos sin infringir la normativa estipulada

para obtener resultados confiables, además de poder contar con una herramienta de mucha utilidad para estudios futuros teniendo en cuenta que se desarrollara con materiales utilizados en el medio local.

#### **1.4. ALCANCE DEL ESTUDIO.**

- El estudio se enfoca en la obtención un modelo matemático que relaciona de forma directa las resistencias a compresión y a flexión del hormigón. El mismo está limitado a una investigación experimental, para el cual el muestreo se realiza aplicando un control permanente de las variables en estudio a través de mediciones, dosificaciones, etc.
- Se cuenta con un tamaño muestral de 30 especímenes o muestras por diseño de mezcla (tanto para vigas como para probetas).
- El agregado utilizado es triturado y proveniente del Rio Guadalquivir zona San Mateo, y en cuanto al cemento utilizado es cemento El Puente tipo IP-30.
- La caracterización de materiales y elaboración tanto de probetas como vigas de hormigón se desarrolla en el laboratorio de Suelos y Hormigones de la Universidad Autónoma "Juan Misael Saracho" siguiendo la normativa ASTM para su desarrollo.
- Los diseños de mezclas empleados para el estudio son de 180, 210, 280 y 350 kgf/cm<sup>2</sup>, para los cuales las proporciones de los componentes es determinada mediante el método de dosificación ACI-211.
- El procesamiento de datos se enfoca al uso de estadística descriptiva que permita la obtención del modelo matemático que relacione estos dos parámetros de resistencia mecánica del hormigón (resistencia a compresión y resistencia a flexión). El procedimiento estadístico se desarrolla con ayuda de los software IBM SPSS Statistics 22 y Microsoft Excel.

##### **1.4.1. Hipótesis.**

Se plantean las siguientes hipótesis:

- La relación existente entre la resistencia a compresión y la resistencia a la tracción por flexión (Módulo de rotura) del hormigón responde a una ecuación de la forma:

$$Mr = K * f'c^B$$

Con un valor para la constante de proporcionalidad K en un rango de 1,99 a 2,65 para el modelo matemático de tipo potencial.

### 1.5. LIMITACIONES.

La investigación esta limitada en cuanto a ensayos a los materiales y ensayos de resistencia mecánica al hormigón por los siguientes:

**Caracterización de materiales:** Análisis granulométrico, peso específico, densidad y absorción de los agregados, además del ensayo de desgaste al agregado grueso; peso específico y módulo de finura del cemento.

**Resistencia Mecánica:** Resistencia a compresión y resistencia a flexión del hormigón.

Las dosificaciones empleadas para el estudio serán 180, 210, 280 y 350 kgf/cm<sup>2</sup>. Teniendo como resultado a lograr la obtención de la constante matemática que mediante una ecuación lineal y otra potencial relacione de forma directa los parámetros de resistencia a compresión y resistencia a flexión ya mencionados.

## **II. MARCO TEÓRICO.**

### **2.1. DEFINICIÓN GENERAL DEL HORMIGÓN.**

El hormigón es el material constituido por la mezcla en ciertas proporciones de cemento, agua, agregados y opcionalmente aditivos, que inicialmente denota una estructura plástica y moldeable, que posteriormente adquiere una consistencia rígida con propiedades aislantes y resistentes, lo que lo hace un material ideal para la construcción.

### **2.2. CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES DEL HORMIGÓN.**

De forma superficial se han esbozado los materiales componentes del hormigón, pero para poder entender completamente las propiedades y el comportamiento del producto resultante se evalúan de una manera más específica las características de cada uno de los componentes del hormigón, los cuales son:

- **Cemento Portland.**
- **Agregados.**
- **Agua.**
- **Aditivos (Opcionalmente)**

#### **2.2.1. Cemento.**

Es un material aglomerante, resultante de la calcinación de rocas calizas, areniscas y arcillas, de manera de obtener un polvo muy fino que en presencia de agua endurece adquiriendo propiedades resistentes y adherentes.

El nombre proviene de la similitud en apariencia y el efecto publicitario que pretendió darle en el año 1924 Joseph Apsdin un constructor inglés, al plantear un proceso de calcinación de caliza arcillosa que producía un cemento que al hidratarse adquiriera según él la misma resistencia que la piedra de la isla Portland cerca del pueblo de Dorset.

Pero en 1845 es cuando se desarrolla el procedimiento industrial del cemento Portland moderno, que con algunas variantes persiste hasta nuestros días y que consiste en moler rocas calcáreas con rocas arcillosas en cierta composición y someter este polvo a temperaturas sobre los 1300 °C produciéndose lo que se denomina el clinker, constituido por bolas endurecidas de diferentes diámetros, que finalmente se muelen añadiéndose yeso para tener como producto definitivo un polvo sumamente fino.

FIGURA 1: CEMENTO EL PUENTE TIPO IP-30



- **Mecanismos de hidratación.**

Se denomina hidratación al conjunto de reacciones químicas entre el agua y los componentes del cemento, que llevan consigo el cambio de estado plástico al endurecido, con las propiedades inherentes a los nuevos productos formados.

Dependiendo de la temperatura, el tiempo y la relación agua/cemento que reaccionan se observan los siguientes estados:

- a) **Plástico.**

Unión del agua y el polvo de cemento formando una pasta moldeable. Cuanto menor es la relación agua/cemento, mayor es la concentración de partículas de cemento en la pasta compactada y por ende la estructura de los productos de hidratación es mucho más resistente.

### **b ) Fraguado Inicial.**

Condición de la pasta de cemento en que se aceleran las reacciones químicas, empieza el endurecimiento y la pérdida de plasticidad, midiéndose en términos de la resistencia a deformarse. Es la etapa en que se evidencia el proceso exotérmico donde se genera el denominado calor de hidratación, que es consecuencia de las reacciones químicas descritas.

Se forma una estructura porosa llamada gel de Hidratos de Silicatos de Calcio. Este periodo tiene una duración de alrededor de tres horas.

### **c ) Fraguado Final.**

Se obtiene al término de la etapa de fraguado inicial, caracterizándose por endurecimiento significativo y deformaciones permanentes. La estructura del gel está constituida por el ensamble definitivo de sus partículas endurecidas.

### **c ) Endurecimiento.**

Se produce a partir del fraguado final y es el estado en que se mantienen e incrementan con el tiempo las características resistentes. La reacción predominante es la hidratación permanente de los silicatos de calcio y en teoría de manera indefinida y continua. Es el estado final de la pasta.

Durante el proceso de hidratación, el volumen externo de la pasta se mantiene relativamente constante, sin embargo, internamente el volumen de sólidos se incrementa constantemente con el tiempo, causando la reducción permanente de la porosidad, que está relacionada de manera inversa con la resistencia de la pasta endurecida y en forma directa con la permeabilidad.

Un concepto básico que nos permita entender el comportamiento del hormigón, reside en que el volumen de los productos de hidratación siempre es menor que la suma de los volúmenes de agua y cemento que los originan debido a que por combinación química el volumen de agua disminuye en alrededor de un 25 %, lo que trae como consecuencia la contracción de la pasta endurecida.

### **2.2.2. Agregados.**

Se definen los agregados como los elementos inertes del hormigón que son aglomerados por la pasta de cemento para formar la estructura resistente. Ocupan al rededor de la  $\frac{3}{4}$  del volumen total, luego la calidad de estos tienen una importancia primordial en el producto final.

Se ha establecido convencionalmente la distinción entre agregado grueso (piedra) y el agregado fino (arena) en función de las partículas mayores y las menores de 4,75 mm (Malla Standard ASTM #4).

La distribución volumétrica de las partículas tiene gran tendencia en el hormigón pues, para tener una estructura densa y eficiente así como una trabajabilidad adecuada, debe haber un ensamble casi total de manera, que las más pequeñas ocupen los espacios entre las mayores y el conjunto este unido por la pasta de cemento.

#### **2.2.2.1. Características Físicas de los Agregados.**

En general son primordiales en los agregados las características de densidad, resistencia, porosidad y la distribución volumétrica de las partículas, que acostumbra denominar granulometría o gradación.

Asociadas a estas características se encuentran una serie de ensayos o pruebas estándar que miden estas propiedades para compararlas con valores de referencia establecidos.

Es importante para evaluar estos requerimientos el tener claros algunos conceptos relativos a ciertas características numéricas, tales como:

- **Peso Específico:** Es el cociente entre el peso de las partículas dividido entre el volumen de los sólidos únicamente, es decir no incluye los vacíos entre ellas. Su valor para agregados normales oscila entre 2500 y 2800 Kg /m<sup>3</sup>.
- **Peso Unitario:** Es el cociente entre el peso de las partículas dividido entre el volumen total incluyendo los vacíos. su valor para agregados normales oscila entre 1.500 y 1.700 Kg /m<sup>3</sup>.

### 2.2.3. Agua en el Hormigón.

El agua se constituye como el elemento preponderante en la elaboración de hormigón y mortero, gracias a la importante función que cumple durante del estado plástico, el proceso de fraguado y el estado endurecido.

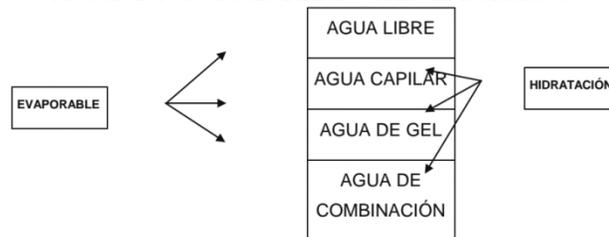
Gracias al agua, el cemento se ve sometido a reacciones químicas que le permiten fraguar y endurecer formando un sólido único con sus agregados.

Ya hemos visto que el agua es el elemento indispensable para la hidratación del cemento y el desarrollo de sus propiedades, por lo tanto el agua en el hormigón tiene tres funciones principales:

1. Reaccionar con el cemento para hidratarlo.
2. Actuar como lubricante para contribuir a la trabajabilidad del conjunto.
3. Procurar la estructura de vacíos necesaria en la pasta para que los productos de hidratación tengan espacio para desarrollarse.

Por lo tanto la cantidad de agua que interviene en la mezcla de hormigón es normalmente por razones de trabajabilidad, mayor de la necesaria para la hidratación del cemento.

FIGURA 2: FUNCIONES DEL AGUA EN EL HORMIGON



### 2.3. PROPIEDADES Y COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN.

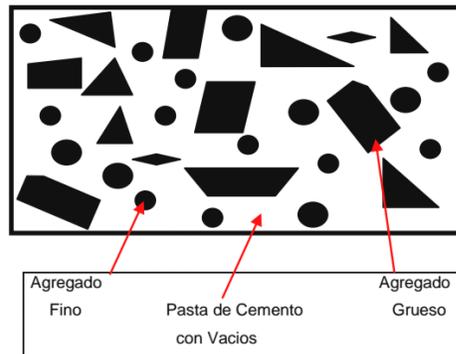
En la Figura 2 se puede apreciar el esquema típico de la estructura interna del hormigón endurecido, que consiste en el aglomerante o estructura básica constituida por la pasta del cemento y agua, que aglutina a los agregados gruesos, finos, aire y vacíos, estableciendo un comportamiento resistente debido en gran parte a la capacidad de la pasta para adherirse a los agregados y soportar esfuerzos de tracción

y compresión, así como a un efecto puramente mecánico propiciado por el acomodo de las partículas inertes y sus características propias.

Una conclusión inmediata que se desprende del esquema mencionado, es que la estructura del hormigón no es homogénea y en consecuencia no es isotrópica, es decir mantiene las mismas propiedades en diferentes direcciones.

Esto se debe principalmente a los diferentes materiales que intervienen, su variabilidad individual así como al proceso mismo de elaboración, desde la etapa en que la pasta es plástica y posibilita el acomodo aleatorio de los diferentes componentes hasta su ubicación definitiva al endurecer.

FIGURA 3: ESQUEMA DE LA ESTRUCTURA INTERNA DEL HORMIGON ENDURECIDO

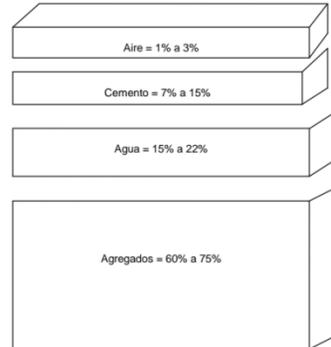


En la Figura 3, podemos observar las proporciones típicas en volumen absoluto, en que intervienen los componentes del hormigón para un rango de contenido de cemento entre 200 a 500 Kg/cm<sup>3</sup>, siendo significativa la trascendencia primordial de la pasta (cemento y agua) en la estructura, ya que pese a ocupar en promedio alrededor del 30% del volumen total, es la que condiciona en mayor grado el resultado final.

Un aspecto sumamente importante en la estructura del hormigón endurecido reside en la porosidad o sistema de vacíos. Gran parte del agua que interviene en la mezcla, sólo cumple la función de lubricante en el estado plástico, ubicándose en líneas de flujo y zonas de sedimentación de los sólidos, de manera que al producirse el endurecimiento y evaporarse, quedan los vacíos o poros, que condicionan el

comportamiento posterior del hormigón para absorber líquidos y su permeabilidad o capacidad de flujo a través de él.

FIGURA 4: PROPIEDADES EN VOLUMEN ABSOLUTO DE LOS COMPONENTES DEL HORMIGÓN



### 2.3.1. Propiedades Principales del Hormigón Fresco.

- **Trabajabilidad.**

Está definida por la mayor o menor dificultad para el mezclado, transporte, colocación y compactación del hormigón. Su evaluación es relativa, por cuanto depende realmente de las facilidades manuales o mecánicas que se dispongan durante las etapas del proceso, ya que un hormigón que puede ser trabajable bajo ciertas condiciones de colocación y compactación, no necesariamente resulta tal si dichas condiciones cambian.

El método tradicional para medir la trabajabilidad del hormigón ha sido desde hace muchos años el "Slump" o asentamiento en el Cono de Abrams, ya que permite una aproximación numérica a esta propiedad del hormigón.

- ✓ **Segregación.**

La diferencia de densidades entre los componentes del hormigón provoca una tendencia natural a que las partículas más pesadas descendan, pero en general, la densidad de la pasta con los agregados finos es solo un 20 % menor que la de los gruesos (para agregados normales) lo cual sumado a su viscosidad produce que el agregado grueso quede suspendido e inmerso en la matriz.

Cuando la viscosidad del mortero se reduce por insuficiente concentración de partículas, las gruesas se separan del mortero y se produce lo que se conoce como segregación.

✓ **Exudación.**

Es la propiedad por la cual una parte del agua de mezcla se separa y sube hacia la superficie del concreto.

La exudación se produce inevitablemente en el hormigón, pues es una propiedad inherente a su estructura, luego lo importante es evaluarla y controlarla en cuanto a los efectos negativos que pudiera tener.

✓ **Contracción.**

Es la propiedad mas importante en función a los problemas de figuración que se acarrea con frecuencia.

La contracción por secado es la responsable de la mayor parte de los problemas de figuración, dado que ocurre tanto en estado plástico como en estado endurecido si se permite la pérdida de agua en la mezcla. Esta propiedad es muy importante en relación con los cambios volumétricos en el hormigón, siendo lo fundamental en la revisión de conceptos, el tener claro que el hormigón de todas maneras se contrae y si no tomamos las medidas adecuadas inevitablemente se fisura.

### **2.3.2. Propiedades Principales del Hormigón Endurecido.**

✓ **Elasticidad**

En general, es la capacidad del hormigón de deformarse bajo carga, sin tener deformación permanente.

El hormigón no es un material elástico estrictamente hablando, ya que no tiene un comportamiento lineal en ningún tramo de su diagrama carga vs deformación en compresión, sin embargo convencionalmente se acostumbra definir un "Módulo de elasticidad estático" del hormigón mediante una recta

tangente a la parte inicial del diagrama. Los módulos de elasticidad normales oscilan entre 250000 a 350000 kgf/cm<sup>2</sup> y están en relación directa con la resistencia del hormigón.

✓ **Impermeabilidad.**

El hormigón es un material poroso. El volumen, tamaño y distribución de los poros y sus características regulan la rapidez con que el hormigón absorbe agua y otros líquidos o gases, y su permanencia en los mismos.

Se entiende como permeabilidad la velocidad con que el agua y otros líquidos fluyen a través del hormigón.

Cuanto más permeable sea el hormigón menor será su durabilidad. El hormigón tiene un sistema de poros internos y vacíos comunicados entre sí; su tamaño, número y continuidad hacen al hormigón más o menos permeable a gases, líquidos y sales disueltas. Estos poros pueden presentarse en la pasta de cemento, en los agregados y en la zona de contacto entre ambos.

✓ **Extensibilidad.**

Es la propiedad del hormigón de deformarse sin agrietarse. Se define en función de la deformación unitaria máxima que puede asumir el hormigón sin que ocurran fisuraciones.

Depende de la elasticidad y del denominado flujo plástico, constituido por deformación que tiene el hormigón bajo carga constante en el tiempo.

✓ **Durabilidad.**

El comité de la ACI-201 define la durabilidad del hormigón de cemento portland, como "La capacidad para resistir a la acción del tiempo, los ataques químicos, la abrasión o cualquier otro proceso de deterioro, es decir, el hormigón durable retendrá su forma original, su calidad y su servicio, cuando se exponga a su medio ambiente".

Un hormigón es durable, si puede soportar las condiciones para las cuales fue diseñado, sin deterioro durante el periodo de vida útil para el cual fue proyectado.

✓ **Resistencia.**

Es la capacidad de soportar cargas y esfuerzos, siendo su mejor comportamiento en compresión con la tracción, debido a las propiedades adherentes de la pasta de cemento.

Depende principalmente de la concentración de la pasta de cemento, que se acostumbra expresar en términos de la relación agua /cemento en peso. La afectan además los mismos factores que influyen en las características resistentes de la pasta, como son la temperatura y el tiempo, relacionados a un elemento adicional constituido por la calidad de los agregados, que complementan la estructura del hormigón. Un factor indirecto pero no por eso menos importante en la resistencia, lo constituye el curado ya que es el complemento del proceso de hidratación si el cual no se llega a desarrollar completamente las características resistentes del hormigón.

Los hormigones normales usualmente tienen resistencia a compresión del orden de 100 a 400 kgf/cm<sup>2</sup>.

#### **2.4. RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN.**

Para propósitos de diseño estructural, la resistencia a la compresión es el criterio de calidad y determina la aceptación o no de una mezcla elaborada, en nuestro medio es éste parámetro también es el que determina las condiciones de calidad de una mezcla de hormigón.

La medida de la resistencia a la compresión se efectúa por medio de ensayos normalizados. En Bolivia, se utilizan los procedimientos de las normas ASTM 192 - AASHTO T126 (para el elaborado y curado en laboratorio de muestras de hormigón) y ASTM C39 - AASHTO T22 (Método de ensayo a compresión de probetas de

hormigón) en donde se encuentran descritos métodos de elaboración y ensayo de los especímenes.

La resistencia a la compresión se mide con una prensa hidráulica, que aplica carga sobre la superficie superior de un cilindro a una velocidad especificada mientras ocurre la falla. La carga a la cual falla el cilindro queda registrada, y este valor se divide por el área de la sección transversal del cilindro obteniéndose así el esfuerzo de rotura del hormigón. Se toma como estándar, la resistencia máxima a la compresión a los 28 días.

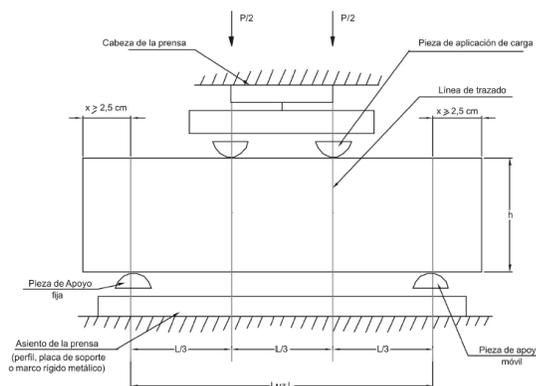
## 2.5. RESISTENCIA A LA FLEXIÓN (MÓDULO DE ROTURA).

La resistencia a la flexión es una medida de la resistencia a tracción del hormigón. es una medida de la falla por momento de una viga o losa de hormigón no reforzada. Se mide mediante la aplicación de cargas a vigas de hormigón de 150 x 150 mm de sección transversal y con luz como mínimo tres veces el espesor. La resistencia a la flexión se expresa como modulo de rotura ( $M_r$ ).

El Módulo de rotura es cerca del 10% al 20% de la resistencia a compresión, en dependencia del tipo, dimensiones y volumen del agregado grueso utilizado.

Las normas ASTM 192 - AASHTO T126 describen el procedimiento para la elaboración de las muestras de hormigón, y las normas ASTM C78 y C293 - AASHTO T97 y T77 describen el procedimiento para realizar el ensayo sobre hormigones cargando las vigas en uno y dos puntos.

FIGURA 5: ENSAYO DE RESISTENCIA A FLEXIÓN EN EL HORMIGÓN



## **2.6. DOSIFICACIÓN DE MEZCLAS DE HORMIGÓN.**

### **2.6.1. Método de Dosificación ACI.**

El sistema del American Concrete Institute (ACI 211.1-91) es, sin lugar a dudas, el método de dosificación más utilizado en todo el mundo, siendo adecuado para cualquier obra realizada con hormigón. En las siguientes líneas se resumen los pasos que debemos seguir para dosificar nuestro hormigón.

Respecto al tamaño máximo del árido a emplear, el método ACI propone que sea el mayor posible (por razones de economía de cemento y de agua), siempre y cuando este tamaño máximo no sea mayor que  $1/5$  de la dimensión menor de la pieza a hormigonar, ni mayor que  $3/4$  de la separación mínima entre armaduras, ni de  $1/3$  del espesor en el caso de unas losa.

Para la elección de la consistencia adecuada, usaremos el asentamiento más reducido posible compatible con la colocación adecuada del hormigón en obra. Los valores que se recomiendan de asentamiento en el Cono de Abrams, en función de distintos tipos de construcción, pueden consultarse en una tabla.

A partir de la consistencia hallada, del tamaño máximo del árido elegido, de su forma y granulometría y de la cantidad de aire incorporado podemos hallar, con la ayuda de tablas incluidas en el Anexo 15, la cantidad de agua necesaria por metro cúbico de hormigón, siendo ésta independiente de la cantidad de cemento empleada.

En el método ACI debemos fijar la relación agua/cemento. Ésta se determina según predominen razones de durabilidad o de resistencia, ambas dato del problema.

Siguiendo el primer criterio podemos hallar la relación agua/cemento máxima, a través de tablas, en función del tipo de estructura que vamos a construir y de las condiciones de servicio a las que va a estar sometida. Si nos basamos en la condición de resistencia a compresión para diseñar el hormigón, se indica la relación agua/cemento que debe emplearse, también en tablas, para conseguir las distintas resistencias en función de que incorporemos aire, o no, en nuestro hormigón.

Destacamos que los valores de estas resistencias se han estimado para un contenido de aire no mayor que el utilizado en las tablas que permiten obtener la cantidad de agua, de manera que, para una relación agua/cemento constante, la resistencia del hormigón se reduce cuando el contenido de aire aumenta.

Conocida la relación agua/cemento y la cantidad de agua, una sencilla operación nos permitirá determinar la cantidad de cemento que se ha de utilizar por metro cúbico de hormigón.

Nuestro siguiente objetivo es determinar las cantidades de árido grueso y de árido fino que intervienen en la mezcla. Como veremos, en el método ACI no se hace uso de curvas de referencia como en los métodos anteriores.

En lo que respecta al árido grueso, es interesante que se utilice en la mayor cantidad posible, compatible con la docilidad, a fin de conseguir la máxima resistencia, la mínima cantidad de agua de amasado y la menor retracción.

Esta cantidad se determina mediante ensayos de laboratorio. Sin embargo, si no se dispone de tales datos, puede obtenerse una indicación aceptable con la ayuda de tablas; éstas proporcionan el volumen de árido grueso por unidad de volumen de hormigón en función del diámetro máximo del árido, de la docilidad y del módulo de finura de la arena. El peso de grava por metro cúbico de hormigón se calcula multiplicando el valor obtenido por mil y por la densidad de conjunto de la grava (en kg/dm<sup>3</sup>), que es dato del problema.

El contenido de árido fino puede obtenerse por el método de los volúmenes absolutos o por el de los pesos. En el primero, el volumen de arena se halla restando a 1.025 el volumen de árido grueso, cemento, agua y aire. En el segundo, el peso del árido fino se determina como la diferencia entre el peso del hormigón fresco y la suma de los pesos de los otros componentes. Este sistema se basa en que, por experiencia, se conoce el peso del metro cúbico de hormigón fresco, aunque si esto no fuese así, pueden emplearse valores dados en tablas (Anexo 15).

## **2.7. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DESCRIPTIVO**

El análisis estadístico descriptivo comprende el uso efectivo de datos numéricos obtenidos de un grupo de experimentos, e incluye tanto la recolección de datos como el análisis e interpretación de los mismos. Es importante para éste tipo de análisis en cualquier campo de aplicación, la planeación de la metodología de la recolección de datos involucrando el diseño de los experimentos y del muestreo.

En un caso particular, el análisis estadístico aporta metodologías de evaluación, análisis y recolección de datos útiles en el campo del análisis del desempeño de un hormigón preparado. Como tal, el análisis estadístico de las pruebas de resistencia permite realizar mejoras sobre el proceso de diseño al mismo tiempo que valida los resultados de la etapa de diseños.

Todo análisis estadístico implica el uso de Funciones Estadísticas, Normas de Control y Gráficos que permitan la representación y el análisis de resultados.

### **2.7.1 Funciones Estadísticas.**

#### **✓ Promedio Aritmético.**

El promedio de una lista de datos corresponde a la suma de los datos incluidos en la lista dividido por el número de datos que contiene la lista. Aplicado al campo del análisis del comportamiento de mezclas preparadas, la lista contiene los resultados de las pruebas de resistencias de los ensayos. Matemáticamente el promedio aritmético se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{x_n} \quad (2.7.1.1)$$

Donde:

$\bar{X}$  : Promedio Aritmético.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ : En éste estudio en particular, corresponden a los resultados de las pruebas de resistencias de los ensayos, y es el número total de ensayos efectuados.

✓ **Desviación Estándar.**

Algebraicamente, la Desviación Estándar se define como la raíz cuadrada de la Varianza, y mide la variabilidad o dispersión de un conjunto de datos con respecto a la media aritmética de la muestra objeto de análisis estadístico. De esta forma, una desviación estándar baja indica que los datos tienden a estar cerca de la media de la muestra, mientras que una desviación estándar alta implica que los datos se alejan considerablemente de la media.

Aplicada al estudio de resistencia de mezclas de concreto preparadas, la desviación estándar refleja las variaciones entre las diferentes batchadas del concreto respecto a la media. Las variaciones contemplan la inestabilidad de cada uno de los materiales, la variabilidad de los procedimientos y las técnicas de producción y manejo, la inestabilidad de la elaboración y el curado de los especímenes.

Matemáticamente la Desviación Estándar se expresa como:

$$\sigma = \left[ \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + (x_3 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n - 1} \right]^{1/2} \quad (2.7.1.2)$$

Donde:

$\sigma$  : Desviación Estándar.

$\bar{X}$  : Promedio Aritmético.

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ : En este estudio en particular, corresponden a los resultados de las pruebas de resistencias de los ensayos.

$n$  : Número de ensayos estudiados.

✓ **Coficiente de Variación.**

Estadísticamente definida como una medida normalizada de la dispersión de una probabilidad de distribución. Es utilizada generalmente para comparar variables que

se encuentran expresadas en diferentes escalas pero las cuales mantienen una correlación estadística y sustantiva con un factor común.

Particularmente para este caso de estudio, el coeficiente de variación corresponde al grado de control de varias clases de concreto, y juega un papel vital en el tratamiento de especímenes, control de la elaboración y control de calidad de los métodos de ensayo utilizados.

El coeficiente es comúnmente expresado de forma porcentual, y se define matemáticamente mediante la siguiente ecuación:

$$v = \frac{\sigma}{\bar{X}} * 100 \% \quad (2.7.1.3)$$

Donde:

v : Coeficiente de variación.

$\sigma$  : Desviación estándar.

$\bar{X}$  : Promedio Aritmético.

✓ **Rango.**

Estadísticamente, representa el intervalo de menor tamaño que contienen los datos y se calcula mediante la resta del valor mínimo al valor máximo, permitiendo así obtener una idea de la dispersión de los datos.

Particularmente, en el caso de los cilindros, el Rango se obtiene restando la resistencia mayor de la resistencia menor del grupo de cilindros.

$$R = V_{MAYOR} - V_{MENOR} \quad (2.7.1.4)$$

Donde:

R: Rango

$V_{MAYOR}$  : Valor mayor de la serie de datos .

$V_{\text{MENOR}}$  : Valor menor de la serie de datos.

✓ **Amplitud.**

Función estadística que se obtiene dividiendo el rango entre el número de intervalos.

$$A = \frac{R}{\# \text{ Intervalos}} \quad (2.7.1.5)$$

Donde:

A : Amplitud

R : Rango

# Intervalos : Numero de intervalos de clase.

✓ **Moda.**

Definida estadísticamente como el valor que ocurre con mayor frecuencia en una distribución.

Se define matemáticamente como:

$$Md = LI + A * \left( \frac{f_m - f_{m-1}}{2f_m - f_{m-1} - f_{m+1}} \right) \quad (2.7.1.6)$$

Donde:

Md : Moda.

LI : Límite Inferior del intervalo modal.

A : Amplitud de los intervalos.

$f_m$  : Frecuencia de la clase modal.

$f_{m-1}$  : Frecuencia de la clase premodal.

$f_{m+1}$  : Frecuencia de la clase postmodal.

### **2.7.2. Tipos de Gráficos.**

#### ✓ **Histograma.**

Es una serie de rectángulos, cada uno proporcional en amplitud al rango de valores dentro de unas clases y proporcional en altura al número de elementos que posee cada clase.

#### ✓ **Distribución Normal.**

En estadística y probabilidad se llama distribución normal, distribución de Gauss o distribución Gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua que con más frecuencia aparece en fenómenos reales.

La importancia de esta distribución radica en que las distribuciones de medidas maestras y proporciones de muestras grandes tienden a distribuirse de manera normal como la aplica la teoría de muestreo. Para usar esta distribución de probabilidad se requiere que la variable aleatoria sea continua y que al recopilar una gran cantidad de estas mediciones en una distribución de frecuencias, tenga un perfil semejante a una campana.

#### **Características de la Distribución Normal:**

- ✓ El punto más alto de la curva normal es la Media, que también corresponde a la mediana y la moda de la distribución.
- ✓ La distribución es simétrica y su forma a la izquierda de la media es una imagen especular de la forma a la derecha de la mediana. Los extremos a los lados de la curva se prolongan al infinito de ambas direcciones y, teóricamente nunca tocan el eje horizontal.
- ✓ La desviación estándar determina el ancho de la curva. A valores mayores de la desviación estándar, se obtienen curvas más anchas y bajas, que indican una mayor dispersión en los datos.

### **2.7.3. Pruebas de Ajuste de Bondad de Datos.**

Describiremos a la prueba de bondad de ajuste de un modelo estadístico a lo bien que se ajustan un conjunto de observaciones a un cierto modelo de distribución. Las medidas de bondad en general resumen las discrepancia entre los valores observados y los p-valores esperados en el modelo de estudio. Tales medidas se pueden emplear en el contraste de hipótesis, al comprobar si dos muestras se obtienen a partir de dos distribuciones idénticas, o si las frecuencias siguen una distribución específica.

Las pruebas de bondad más empleadas son:

- Test de Kolmogorov-Smirnov
- Criterio de Cramer-von Mises
- Test de Anderson-Darling
- Test de Shapiro-Wilk
- Test Chi Cuadrado
- Criterio de información de Akaike

Para el presente estudio se hará uso los test de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk.

### **2.7.3.1. Test de Kolmogorov-Smirnov.**

**Hipótesis a Contrastar:**

$H_0$  = Los datos analizados siguen una distribución M.

$H_1$  = Los datos analizados no siguen una distribución M.

**Estadístico de contraste:**

$$D = \sup_{1 \leq i \leq n} |\bar{F}_n(x_i) - F_0(x_i)| \quad (2.7.3.1.1)$$

Donde:

$x_i$  : Es el i-ésimo valor observado en la muestra (cuyos valores se han ordenado previamente de menor a mayor).

$\bar{F}_n(x_i)$  : Es un estimador de la probabilidad de observar valores menores o iguales que  $x_i$  .

$F_0(x_i)$  : Es la probabilidad de observar de observar valores menores o iguales que  $x_i$  cuando  $H_0$  es cierta.

Así pues, D es la mayor diferencia absoluta observada entre la frecuencia acumulada observada  $\bar{F}_n(x_i)$  y la frecuencia acumulada teórica  $F_0(x_i)$ , obtenida a partir de la distribución de probabilidad que se especifica como hipótesis nula.

Si los valores observados  $\bar{F}_n(x_i)$  son similares a los esperados  $F_0(x_i)$ , el valor de D será pequeño. Cuanto mayor sea la discrepancia entre la distribución empírica  $\bar{F}_n(x_i)$  y la distribución teórica, mayor será el valor de D.

Por lo tanto, el criterio para la toma de la decisión entre las dos hipótesis será de la forma:

$$Si D \leq D_\alpha \Rightarrow Aceptar Ho$$

$$Si D > D_\alpha \Rightarrow Rechazar Ho$$

Donde el valor de  $D_\alpha$  se elige de tal manera que:

$$P \left( \text{Rechazar } \frac{H_0}{H_0} \text{ es cierta} \right) = P \left( \frac{D > D_\alpha}{\text{Los datos siguen la dist. M}} \right) = \alpha \quad (2.7.3.1.2)$$

Siendo  $\alpha$  el nivel de significación del contraste.

Para el cálculo práctico del estadístico D deben obtenerse:

$$D^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F_0(x_i) \right\} \quad (2.7.3.1.3)$$

$$D^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F_0(x_i) - \frac{i-1}{n} \right\} \quad (2.7.3.1.4)$$

Y a partir de estos valores:

$$D = \max\{D^+, D^-\} \quad (2.7.3.1.5)$$

A su vez, el valor de  $D_\alpha$  depende del tipo de distribución a probar y se encuentra tabulado. En general es de la forma:

$$D_\alpha = \frac{c_\alpha}{k(n)} \quad (2.7.3.1.6)$$

Donde  $c_\alpha$  y  $k(n)$  se encuentran en las siguientes tablas:

TABLA 1 : VALORES DE  $c_\alpha$  PARA EL TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

$c_\alpha$	A		
<b>Modelo</b>	0,1	0,05	0,01
<b>General</b>	1,224	1,358	1,628
<b>Normal</b>	0,819	0,895	1,035
<b>Exponencial</b>	0,99	1,094	1,308
<b>Weibull n= 10</b>	0,76	0,819	0,944
<b>Weibull n= 20</b>	0,779	0,843	0,973
<b>Weibull n= 50</b>	0,79	0,856	0,988
<b>Weibull n= <math>\infty</math></b>	0,803	0,874	1,007

TABLA 2 : VALORES DE  $k(n)$  PARA EL TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV

DISTRIBUCIÓN QUE SE CONTRASTA	$k(n)$
<b>General. Parámetros conocidos.</b>	$k(n) = \sqrt{n} + 0,12 + \frac{0,11}{\sqrt{n}}$
<b>Normal</b>	$k(n) = \sqrt{n} - 0,01 + \frac{0,85}{\sqrt{n}}$
<b>Exponencial</b>	$k(n) = \sqrt{n} + 0,12 + \frac{0,11}{\sqrt{n}}$
<b>Weibull</b>	$k(n) = \sqrt{n}$

### Método Alternativo Para Realizar el Test de Kolmogorov-Smirnov Con el Empleo del p-valor.

La elección del nivel de significación, es en cierta forma arbitraria.

Sin embargo, una vez obtenida la muestra, se puede calcular una cantidad que sí permite resumir el resultado del experimento de manera objetiva. Esta cantidad es el p-valor que corresponde al nivel de significación más pequeño posible que puede escogerse, para el cual todavía se aceptaría la hipótesis alternativa con las

observaciones actuales. cualquier nivel de significación escogido inferior al p-valor (simbólicamente  $p_v$ ) comporta aceptar  $H_0$ .

Obviamente, al ser una probabilidad se cumple que:

$$0 \leq p_v \leq 1$$

El p-valor es una medida directa de lo verosímil que resulta obtener una muestra como la actual si es cierta  $H_0$ . los valores pequeños indican que es muy infrecuente obtener una muestra como la actual, en cambio, los valores altos que es frecuente. El p-valor se emplea para indicar cuanto (o cuán poco) contradice la muestra actual la hipótesis alternativa.

Informar sobre cuál es el p-valor tiene la ventaja de permitir que cualquiera decida que hipótesis acepta basándose en su propio nivel de riesgo  $\alpha$ .

Esto no es posible cuando se informa, como ha sido tradicional, indicando sólo el resultado de la decisión, es decir, si se acepta o se rechaza  $H_0$  con un  $\alpha$  fijo.

Al proporcionar el p-valor obtenido con la muestra actual, la decisión se hará de acuerdo a la regla siguiente:

$$\text{Si } p_v \leq \alpha, \text{ aceptar } H_1$$

$$\text{Si } p_v > \alpha, \text{ aceptar } H_0$$

Entrando en el terreno práctico, algunos paquetes estadísticos (en este caso el paquete IBM SPSS Statistics 22) proporcionan en sus listados el significance level, cuya traducción literal es el nivel de significación (para el caso del paquete IBM SPSS Statistics 22 se denomina Significación Asintótica bilateral), cuando muchas veces se refieren en realidad al p-valor.

### **2.7.3.2. Test de Shapiro Wilk.**

Cuando los datos resultan de un proceso de medición o conteo (variables cuantitativas), es necesario comprobar antes de cualquier análisis estadístico, si la variable aleatoria estudiada sigue el modelo normal de distribución de probabilidades. En el caso que los datos se ajustan a una distribución normal se les puede aplicar los

métodos estadísticos denominados paramétricos. Así se denominan aquellos métodos cuya aplicación depende del cumplimiento de algunos supuestos sobre las propiedades de la población de datos. Estas propiedades se denominan parámetros, de allí el nombre de métodos paramétricos. Por ejemplo, el uso de muchos de los métodos de inferencia estadística más comunes (intervalos de confianza, pruebas de hipótesis, correlación, regresión y análisis de varianzas) requieren que las muestras de datos provengan de poblaciones de valores que se distribuyen normalmente.

Entre los numerosos métodos usados para probar la normalidad de un conjunto de datos, destaca la prueba de Shapiro-Wilk por ser una de la más sencilla y potentes. La única condición es que el tamaño de la muestra debe ser igual o menor a 50.

**Prueba de Shapiro-Wilk.**

a. Hipótesis.

*H0* : La variable aleatoria no tiene una distribución normal

*H1* : La variable aleatoria tiene una distribución normal

b. Estadístico de prueba.

$$W_c = \frac{b^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \tag{2.7.3.2.1}$$

El término  $b = \sum_{i=1}^k a_i [X_{(n-i+1)} - X_i]$ , siendo  $a_i$  = el valor de un coeficiente que se encuentra tabulado para cada tamaño de muestra y la posición  $i$  de cada observación.

El término  $[X_{(n-i+1)} - X_i]$  = diferencias sucesivas que se obtienen al restar el primer valor al último valor, el segundo al penúltimo, el tercero al antepenúltimo y así hasta llegar a restar el último al primer valor. Por ejemplo si se tienen siete valores, la secuencia de diferencias es la siguiente:

c. Zona de aceptación para *H0* :

La zona de aceptación para *H0* está formada por todos los valores del estadístico de prueba  $W_c$  menores al valor esperado o tabulado  $W_{(1-\alpha;n)}$ .

$$ZA = \{W/W_{calculado} \leq W_{(1-\alpha:n)}\} \quad (2.7.3.2.2)$$

TABLA 3 : COEFICIENTES  $a_{in}$  PARA EL CONTRASTE DE SHAPIRO WILK  
 Coeficientes  $a_{in}$  para el contraste de Shapiro-Wilks

n	i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2		0.7071										
3		0.7071	0.0000									
4		0.6872	0.1677									
5		0.6646	0.2413	0.0000								
6		0.6431	0.2806	0.0875								
7		0.6233	0.3031	0.1401	0.0000							
8		0.6052	0.3164	0.1743	0.0561							
9		0.5888	0.3244	0.1976	0.0947	0.0000						
10		0.5739	0.3291	0.2141	0.1224	0.0399						
11		0.5601	0.3315	0.2260	0.1429	0.0695	0.0000					
12		0.5475	0.3325	0.2347	0.1586	0.0922	0.0303					
13		0.5359	0.3325	0.2412	0.1707	0.1099	0.0539	0.0000				
14		0.5251	0.3318	0.2495	0.1802	0.1240	0.0727	0.0240				
15		0.5150	0.3306	0.2495	0.1878	0.1353	0.0880	0.0433	0.0000			
16		0.5056	0.3290	0.2521	0.1988	0.1447	0.1005	0.0593	0.0196			
17		0.4968	0.3273	0.2540	0.1988	0.1524	0.1109	0.0725	0.0359	0.0000		
18		0.4886	0.3253	0.2553	0.2027	0.1587	0.1197	0.0837	0.0496	0.0163		
19		0.4808	0.3232	0.2561	0.2059	0.1641	0.1271	0.0932	0.0612	0.0303	0.0000	
20		0.4734	0.3211	0.2565	0.2085	0.1686	0.1334	0.1013	0.0711	0.0422	0.0140	
21		0.4643	0.3185	0.2578	0.2119	0.1736	0.1339	0.1092	0.0804	0.0530	0.0263	0.0000
22		0.4590	0.3156	0.2571	0.2131	0.1764	0.1443	0.1150	0.0878	0.0618	0.0368	0.0122
23		0.4542	0.3126	0.2563	0.2139	0.1787	0.1480	0.1201	0.0941	0.0696	0.0459	0.0228
24		0.4493	0.3098	0.2554	0.2145	0.1807	0.1512	0.1245	0.0997	0.0764	0.0539	0.0321
25		0.4450	0.3069	0.2543	0.2148	0.1822	0.1539	0.1283	0.1046	0.0823	0.0610	0.0403
26		0.4407	0.3043	0.2533	0.2151	0.1836	0.1563	0.1316	0.1089	0.0876	0.0672	0.0476
27		0.4366	0.3018	0.2522	0.2152	0.1848	0.1584	0.1346	0.1128	0.0923	0.0728	0.0540
28		0.4328	0.2992	0.2510	0.2151	0.1857	0.1601	0.1372	0.1162	0.0965	0.0778	0.0598
29		0.4291	0.2968	0.2499	0.2150	0.1864	0.1616	0.1395	0.1192	0.1002	0.0822	0.0650
30		0.4254	0.2944	0.2487	0.2148	0.1870	0.1630	0.1415	0.1219	0.1036	0.0862	0.0697
31		0.4220	0.2921	0.2475	0.2145	0.1874	0.1641	0.1433	0.1243	0.1066	0.0899	0.0739
32		0.4188	0.2898	0.2463	0.2141	0.1878	0.1651	0.1449	0.1265	0.1093	0.0931	0.0777
33		0.4156	0.2876	0.2451	0.2137	0.1880	0.1660	0.1463	0.1284	0.1118	0.0961	0.0812
34		0.4127	0.2854	0.2439	0.2132	0.1882	0.1667	0.1475	0.1301	0.1140	0.0988	0.0844
35		0.4096	0.2834	0.2427	0.2127	0.1883	0.1673	0.1487	0.1317	0.1160	0.1013	0.0873
36		0.4068	0.2813	0.2415	0.2121	0.1883	0.1678	0.1496	0.1331	0.1179	0.1036	0.0900
37		0.4040	0.2794	0.2403	0.2116	0.1883	0.1683	0.1505	0.1344	0.1196	0.1056	0.0924
38		0.4015	0.2774	0.2391	0.2110	0.1881	0.1686	0.1513	0.1356	0.1211	0.1075	0.0947
39		0.3989	0.2755	0.2380	0.2104	0.1880	0.1689	0.1520	0.1366	0.1225	0.1092	0.0967
40		0.3964	0.2737	0.2368	0.2098	0.1878	0.1691	0.1526	0.1376	0.1237	0.1108	0.0986
41		0.3940	0.2719	0.2357	0.2091	0.1876	0.1693	0.1531	0.1384	0.1249	0.1123	0.1004
42		0.3917	0.2701	0.2345	0.2085	0.1874	0.1694	0.1535	0.1392	0.1259	0.1136	0.1020
43		0.3894	0.2684	0.2334	0.2078	0.1871	0.1695	0.1539	0.1398	0.1269	0.1149	0.1035
44		0.3872	0.2667	0.2323	0.2072	0.1868	0.1695	0.1542	0.1405	0.1278	0.1160	0.1049
45		0.3850	0.2651	0.2313	0.2065	0.1865	0.1695	0.1545	0.1410	0.1286	0.1170	0.1062
46		0.3830	0.2635	0.2302	0.2058	0.1862	0.1695	0.1548	0.1415	0.1293	0.1180	0.1073
47		0.3808	0.2620	0.2291	0.2052	0.1859	0.1695	0.1550	0.1420	0.1300	0.1189	0.1085
48		0.3789	0.2604	0.2281	0.2045	0.1855	0.1693	0.1551	0.1423	0.1306	0.1197	0.1095
49		0.3770	0.2589	0.2271	0.2038	0.1851	0.1692	0.1553	0.1427	0.1312	0.1205	0.1105
50		0.3751	0.2574	0.2260	0.2032	0.1847	0.1691	0.1554	0.1430	0.1317	0.1212	0.1113

TABLA 3.a : COEFICIENTES  $a_{in}$  PARA EL CONTRASTE DE SHAPIRO WILK

Coeficientes  $a_{in}$  para el contraste de Shapiro-Wilks

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
24	0.0107										
25	0.0200	0.0000									
26	0.0284	0.0094									
27	0.0358	0.0178	0.0000								
28	0.0424	0.0253	0.0084								
29	0.0483	0.0320	0.0159	0.0000							
30	0.0537	0.0381	0.0227	0.0076							
31	0.0585	0.0435	0.0289	0.0144	0.0000						
32	0.0629	0.0485	0.0344	0.0206	0.0068						
33	0.0669	0.0530	0.0395	0.0262	0.0187	0.0000					
34	0.0706	0.0572	0.0441	0.0314	0.0187	0.0062					
35	0.0739	0.0610	0.0484	0.0361	0.0239	0.0119	0.0000				
36	0.0770	0.0645	0.0523	0.0404	0.0287	0.0172	0.0057				
37	0.0798	0.0677	0.0559	0.0444	0.0331	0.0220	0.0110	0.0000			
38	0.0824	0.0706	0.0592	0.0481	0.0372	0.0264	0.0158	0.0053			
39	0.0848	0.0733	0.0622	0.0515	0.0409	0.0305	0.0203	0.0101	0.0000		
40	0.0870	0.0759	0.0651	0.0546	0.0444	0.0343	0.0244	0.0146	0.0049		
41	0.0891	0.0782	0.0677	0.0575	0.0476	0.0379	0.0283	0.0188	0.0094	0.0000	
42	0.0909	0.0804	0.0701	0.0602	0.0506	0.0411	0.0318	0.0227	0.0136	0.0045	
43	0.0927	0.0824	0.0724	0.0628	0.0534	0.0442	0.0352	0.0263	0.0175	0.0087	0.0000
44	0.0943	0.0842	0.0745	0.0651	0.0560	0.0471	0.0383	0.0296	0.0211	0.0126	0.0042
45	0.0959	0.0860	0.0765	0.0673	0.0584	0.0497	0.0412	0.0328	0.0245	0.0163	0.0081
46	0.0972	0.0876	0.0783	0.0694	0.0607	0.0522	0.0439	0.0357	0.0277	0.0197	0.0118
47	0.0986	0.0892	0.0801	0.0713	0.0628	0.0546	0.0465	0.0385	0.0307	0.0229	0.0153
48	0.0998	0.0906	0.0817	0.0731	0.0648	0.0568	0.0489	0.0411	0.0335	0.0259	0.0185
49	0.1010	0.0919	0.0832	0.0748	0.0667	0.0588	0.0511	0.0436	0.0361	0.0288	0.0215
50	0.1020	0.0932	0.0846	0.0764	0.0685	0.0608	0.0532	0.0459	0.0386	0.0314	0.0244

$\begin{matrix} i \\ n \end{matrix}$	23	24	25
45	0.0000		
46	0.0039		
47	0.0076	0.0000	
48	0.0111	0.0037	
49	0.0143	0.0071	0.0000
50	0.0174	0.0104	0.0035

TABLA 4 : NIVELES DE SIGNIFICACIÓN PARA EL CONTRASTE DE SHAPIRO WILK  
 Niveles de significación para el contraste de Shapiro-Wilks.

n	0.01	0.02	0.05	0.1	0.5	0.9	0.95	0.98	0.99
3	0.753	0.756	0.767	0.789	0.959	0.998	0.999	1.000	1.000
4	0.687	0.707	0.748	0.792	0.935	0.987	0.992	0.996	0.997
5	0.686	0.715	0.762	0.806	0.927	0.979	0.986	0.991	0.993
6	0.713	0.743	0.788	0.826	0.927	0.974	0.981	0.986	0.989
7	0.730	0.760	0.803	0.838	0.928	0.972	0.979	0.985	0.988
8	0.749	0.778	0.818	0.851	0.932	0.972	0.978	0.984	0.987
9	0.764	0.791	0.829	0.859	0.935	0.972	0.978	0.984	0.986
10	0.781	0.806	0.842	0.869	0.938	0.972	0.978	0.983	0.986
11	0.792	0.817	0.850	0.876	0.940	0.973	0.979	0.984	0.986
12	0.805	0.828	0.859	0.883	0.943	0.973	0.979	0.984	0.986
13	0.814	0.837	0.866	0.889	0.945	0.974	0.979	0.984	0.986
14	0.825	0.846	0.874	0.895	0.947	0.975	0.980	0.984	0.986
15	0.835	0.855	0.881	0.901	0.950	0.975	0.980	0.984	0.987
16	0.844	0.863	0.887	0.906	0.952	0.976	0.981	0.985	0.987
17	0.851	0.869	0.892	0.910	0.954	0.977	0.981	0.985	0.987
18	0.858	0.874	0.897	0.914	0.956	0.978	0.982	0.986	0.988
19	0.863	0.879	0.901	0.917	0.957	0.978	0.982	0.986	0.988
20	0.868	0.884	0.905	0.920	0.959	0.979	0.983	0.986	0.988
21	0.873	0.888	0.908	0.923	0.960	0.980	0.983	0.987	0.989
22	0.878	0.892	0.911	0.926	0.961	0.980	0.984	0.987	0.989
23	0.881	0.895	0.914	0.928	0.962	0.981	0.984	0.987	0.989
24	0.884	0.898	0.916	0.930	0.963	0.981	0.984	0.987	0.989
25	0.888	0.901	0.918	0.931	0.964	0.981	0.985	0.988	0.989
26	0.891	0.904	0.920	0.933	0.965	0.982	0.985	0.988	0.989
27	0.894	0.906	0.923	0.935	0.965	0.982	0.985	0.988	0.990
28	0.896	0.908	0.924	0.936	0.966	0.982	0.985	0.988	0.990
29	0.898	0.910	0.926	0.937	0.966	0.982	0.985	0.988	0.990
30	0.900	0.912	0.927	0.939	0.967	0.983	0.985	0.988	0.990
31	0.902	0.914	0.929	0.940	0.967	0.983	0.986	0.988	0.990
32	0.904	0.915	0.930	0.941	0.968	0.983	0.986	0.988	0.990
33	0.906	0.917	0.931	0.942	0.968	0.983	0.986	0.989	0.990
34	0.908	0.919	0.933	0.943	0.969	0.983	0.986	0.989	0.990
35	0.910	0.920	0.934	0.944	0.969	0.984	0.986	0.989	0.990
36	0.912	0.922	0.935	0.945	0.970	0.984	0.986	0.989	0.990
37	0.914	0.924	0.936	0.946	0.970	0.984	0.987	0.989	0.990
38	0.916	0.925	0.938	0.947	0.971	0.984	0.987	0.989	0.990
39	0.917	0.927	0.939	0.948	0.971	0.984	0.987	0.989	0.991
40	0.919	0.928	0.940	0.949	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
41	0.920	0.929	0.941	0.950	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
42	0.922	0.930	0.942	0.951	0.972	0.985	0.987	0.989	0.991
43	0.923	0.932	0.943	0.951	0.973	0.985	0.987	0.990	0.991
44	0.924	0.933	0.944	0.952	0.973	0.985	0.987	0.990	0.991
45	0.926	0.934	0.945	0.953	0.973	0.985	0.988	0.990	0.991
46	0.927	0.935	0.945	0.953	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
47	0.928	0.936	0.946	0.954	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
48	0.929	0.937	0.947	0.954	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
49	0.929	0.937	0.947	0.955	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991
50	0.930	0.938	0.947	0.955	0.974	0.985	0.988	0.990	0.991

### 2.7.3.3. Gráfico de Probabilidad Normal

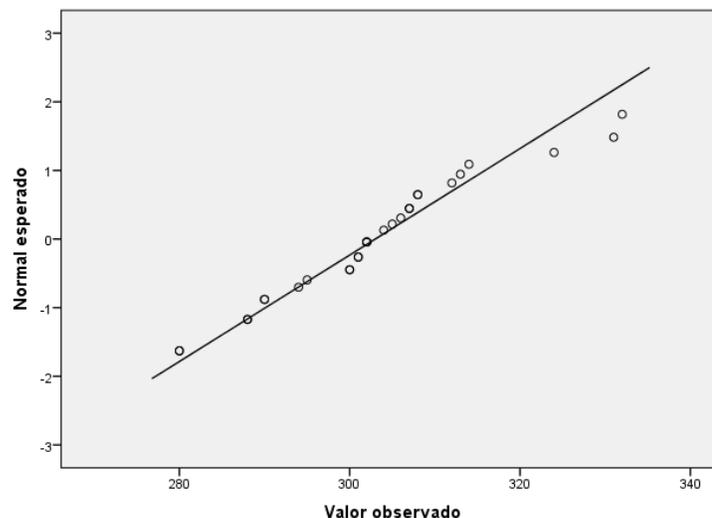
El gráfico probabilístico normal permite comparar la distribución empírica de un conjunto de datos con la distribución Normal. Por tanto, dicho gráfico se puede considerar como una técnica gráfica para la prueba de normalidad de un conjunto de datos.

La construcción del gráfico de probabilidad normal se realiza a través de los cuantiles de la normal estándar, de forma que aceptaremos la hipótesis de normalidad de los datos, siempre que los puntos en el gráfico tengan un comportamiento suficientemente rectilíneo. *"En el gráfico de probabilidad son elementos fundamentales los conocidos como puntos de posición gráfica"*(plotting positions). Dedicamos parte del trabajo al análisis de dichos elementos, poniendo de manifiesto la diferencia existente entre las distintas propuestas de puntos de posición gráfica que han sido introducidas a lo largo de la historia.

El objetivo de este gráfico consiste en comprobar la diferencia que se produce al generar los gráficos de probabilidad normal, en función de la elección que se haga de los puntos de posición gráfica, quedando claro que dichos puntos son un elemento clave para los gráficos probabilísticos normales.

FIGURA 6: GRÁFICO DE PROBABILIDAD NORMAL

Gráfico Q-Q normal



El gráfico de probabilidad se constituye en un método gráfico que permite comparar la distribución de un conjunto de datos con una distribución especificada.

Supongamos que disponemos de un conjunto de observaciones  $x_i$ ,  $(1, 2, \dots, n)$ .

Sea  $F(x)$  la función de distribución de una distribución especificada. El gráfico de probabilidad se construye siguiendo los siguientes pasos:

1) Ordenar las observaciones de menor a mayor en la forma:

$$x_1 \leq x_2, \dots \leq x_n$$

2) Determinar los valores:

$$p_i = \frac{i - 0,5}{n}$$

3) Determinar los cuantiles de orden  $p_i$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  de la distribución teórica representada por la función de distribución  $F$ , es decir:

$$Q_t(p_i) = F^{-1}(p_i)$$

Representar el conjunto de puntos  $(Q_t(p_i); Q_x(p_i))$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ; o lo que es lo mismo, los puntos  $(F^{-1}(p_i); x(i))$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$

En el caso en que  $F$  represente la función de distribución de una Normal, al gráfico de probabilidad resultante se denomina gráfico probabilístico normal o Q-Q Plot Normal.

Si la distribución teórica constituye una buena aproximación de la distribución empírica, cabría esperar que los cuantiles de los datos estén muy próximos a los de la distribución teórica y, por tanto, los puntos del gráfico se dispondrán muy próximos a la bisectriz del primer cuadrante. En otros casos, puede ocurrir que los datos no estén próximos a la recta  $y = x$ , sino que simplemente los puntos se posicionen de forma rectilínea. En este caso, es posible encontrar las correspondientes constantes que produzcan un cambio de origen y/o escala en los datos, de forma que los valores resultantes produzcan una disposición de los puntos en el gráfico probabilístico, suficientemente próxima a la recta  $y = x$ . Suponiendo que una vez realizadas las

transformaciones, obtenemos que los datos aparecen muy próximos a la recta  $y = x$ , concluiremos que la distribución empírica es compatible con la distribución teórica, salvo en los parámetros de localización y escala.

### **Puntos de Posición Gráfica.**

Los puntos de posición gráfica son elementos claves en la obtención de los gráficos de probabilidad, ya que permiten identificar las observaciones como los cuantiles de la distribución empírica de los datos,  $x_i = Q_x(p_i)$ , y por otra parte, constituyen los elementos fundamentales para determinar los cuantiles de la distribución teórica, representada por la función de distribución  $F(x)$ , de forma que  $Q_t(p_i) = F^{-1}(p_i)$ .

En esta sección, vamos a presentar distintas propuestas de definición de los puntos de posición gráfica encontrados a lo largo de la historia. Sin ánimo de ser exhaustivos, se han seleccionado aquellas definiciones que, desde el punto de vista histórico, o por su uso, se han considerado como más importantes. Proseguiremos en la siguiente sección con una comparación de las definiciones recogidas en ésta.

La primera elección de los  $p_i$  fue introducida y usada en el campo de la hidrología. Se conoce con el nombre de "Método California". Dicho método, consiste en definir los  $p_i$  como:

$$p_i = \frac{i}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.3.3.1)$$

Esta opción, que en un principio parece la más natural, fue pronto descartada debido a la imposibilidad de dibujar la observación  $n$ -ésima, que en muchas ocasiones resultaba de gran interés.

En 1930, Hazen (Hazen A., Flood Flows: A Study of Frequencies and Magnitudes, 1930,

John Wiley & Sons, New York) propuso la siguiente definición:

$$p_i = \frac{i - 0,5}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.3.3.2)$$

donde el término 0.5 del numerador, aparece como un corrector de continuidad. De esta forma, se subsana el inconveniente comentado anteriormente, pudiendo dibujar todas las observaciones en el gráfico (esta definición viene recogida en el paquete estadístico SPSS como Rankit).

Weibull (Weibull W., Ingeniors Ventenskaps Akademien Handlingar, 1939, 153, 17) propuso definir los  $p_i$  mediante la siguiente expresión:

$$p_i = \frac{i}{n+1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.3.3.3)$$

(Esta definición aparece en SPSS como propuesta por Van der Waerden).

Las dos propuestas anteriores de los  $p_i$  están recogidas en la expresión general:

$$p_i = \frac{i-c}{n-2c+1} \quad \text{para } 0 \leq c \leq 1 \quad (2.7.3.3.4)$$

donde observamos que si  $c=0.5$ , aparece la propuesta de Hazen, y si  $c=0$ , obtenemos la propuesta de Weibull. Puede verse una extensa discusión sobre la elección óptima de  $c$  en (Barnett V., Applied Statistics, 1975, 24, 1:95-108).

En la literatura al uso, aparecen otras muchas definiciones distintas de los  $p_i$ . Una idea bastante aceptada y difundida es que los  $p_i$  deben ser determinados a partir de medidas de localización de los estadísticos de orden. Así, si consideramos los estadísticos de orden de la variable transformada en la forma  $x - \mu/\sigma$ , (donde  $\mu$  y  $\sigma$  no son necesariamente la media y la desviación típica, sino parámetros de localización y escala respectivamente), y notamos por:

$$W_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.3.3.5)$$

se propone tomar:

$$p_i = F[\text{loc}(W_i)] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.3.3.6)$$

donde  $\text{loc}(W(i))$ , simboliza a una medida de localización de  $W(i)$ . En este sentido, varios autores (Shapiro et al., Biometrika, 1965, 52, 3-4:591-611), (Shapiro et al., Journal of the American Statistical Association, 1972, 67, 337:215-216) y (Breque

J.L., Technometrics, 1977,19, 3:293-306) propusieron, para los gráficos de probabilidad, y por consiguiente, para los estadísticos que definen sus respectivos contrastes de normalidad, el uso de:

$$p_i = F[E(W_i)] \quad i = 1,2, \dots, n \quad (2.7.3.3.7)$$

donde por  $E(W(i))$  notamos al valor esperado del  $i$ -ésimo estadístico de orden transformado.

Por su parte, Benard y Bos-Levenbach (Benard et al., Statistica, 1953, 7:163-173) y Filliben (Filliben J., Technometrics, 1975, 17:111-117) definieron los  $p_i$  en los términos

$$p_i = F[Med(W_i)] \quad i = 1,2, \dots, n \quad (2.7.3.3.8)$$

donde por  $Med(W(i))$  se simboliza a la mediana del  $i$ -ésimo estadístico de orden transformado.

Vista la dificultad que en algunos casos aparece en la determinación de los  $p_i$  usando las definiciones anteriores (medidas de localización de los estadísticos de orden), algunos autores han propuesto otras definiciones basadas en meras aproximaciones de éstas.

Benard y Bos-Levenbach (Benard et al., Statistica, 1953, 7:163-173), que consideraron la elección de la mediana como medida de localización más apropiada, demostraron que para el gráfico probabilístico normal, una buena aproximación de los  $p_i$ , para tamaños muestrales intermedios, podía conseguirse con la expresión:

$$p_i = \frac{i - 0,3}{n + 0,4} \quad i = 1,2, \dots, n \quad (2.7.3.3.9)$$

Cabe observar que esta fórmula aparece al sustituir  $c=0.3$  en la expresión (4).

Otros autores como Kimbal (Kimbal B., Journal of the American Statistical Association, 1960, 55:546-560) y Cunnane (Cunnane C., Journal of Hidrology, 1978, 37:205-222) recomendaron el uso de la esperanza como medida de localización, cuya aproximación ya fue propuesta por Blom (Blom G., Statistical Estimates and

Transformed Beta-Variables, 1958, Wiley, New York) y es usada particularmente cuando la distribución teórica es la distribución normal. La propuesta consiste en:

$$p_i = \frac{i - 3/8}{n + 1/4} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.3.3.10)$$

Esta expresión se obtiene al sustituir  $c$  en la expresión (4) por  $3/8$ . Esta elección de los  $p_i$  ha

incrementado su aceptación entre muchos usuarios, y es la que aparece por defecto en el paquete estadístico SPSS.

La siguiente propuesta puede verse en (Tukey J. W., Annals of Mathematical Statistics, 1962, 33, 1:1-67), realizada al considerar, de nuevo en la expresión (4),  $c=1/3$ , obteniendo:

$$p_i = \frac{i - 1/3}{n + 1/3} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7.3.3.11)$$

#### **2.7.4 Teorema del Límite Central.**

El teorema central del límite, uno de los fundamentales en estadística, estudia el comportamiento de la suma de variables aleatorias, cuando crece el número de sumandos, asegurando su convergencia hacia una distribución normal en condiciones muy generales. Este teorema, del cual existen diferentes versiones que se han ido desarrollando a lo largo de la historia, tiene una gran aplicación en inferencia estadística, pues muchos parámetros de diferentes distribuciones de probabilidad, como la media, pueden expresarse en función de una suma de variables. Permite también aproximar muchas distribuciones de uso frecuente: binomial, Poisson, chi cuadrado, t-student, gamma, etc., cuando sus parámetros crecen y el cálculo se hace difícil. Por otro lado, la suma de variables aleatorias aparece en forma natural en muchas aplicaciones de la ingeniería: determinación de masa forestal, carga soportada por una estructura, tiempo de espera de servicios, etc.

Todo ello explica por qué muchos métodos estadísticos requieren la condición de normalidad para su correcta aplicación y, en consecuencia, este teorema es un

componente importante de la formación estadística de los ingenieros, ya que, por otro lado, su enseñanza plantea interrogantes importantes al profesor. El teorema se apoya y relaciona entre sí con otros conceptos y procedimientos básicos en estadística, como los de variable aleatoria y sus transformaciones, distribución muestral, convergencia, tipificación, cálculo de probabilidades, etc., algunos de los cuales podrían plantear problemas de aprendizaje.

Se establece el teorema de limite central en los siguientes términos:

Si se extraen todas las posibles muestras de igual tamaño ( $n$ ) de una población dada que tiene media  $\bar{X}_{pob}$  y una desviación  $\sigma_{pob}$  el teorema de limite central indica que:

La distribución de las medias muestrales  $\bar{X}_m$  se distribuye aproximadamente en forma normal con media  $\bar{X}_{pob}$  y su desviación estandar sera mas pequeña que la desviación estandar de la población de acuerdo al valor  $\bar{X}_{pob}/\sqrt{n}$ , siempre y cuando el tamaño de la muestra sea muy grande.

Esta ultima aclaración es importante. si se sospecha que la distribución de las muestras no es normal, se toma a "n" muy grande (generalmente mayor que 30); pero si es normal, no importa el tamaño de "n". En síntesis indica que:

- La media de las muestras es igual a la media de la población:

$$\bar{X}_m = \bar{X}_{pob}$$

- Si la distribución muestral no es normal, basta tomar a  $n > 30$  para que se considere aproximadamente normal.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{pob}}{\sqrt{n}}$$

## **2.7.5. Métodos Para Identificar Valores Extremos.**

### **2.7.5.1 Puntuaciones Z.**

Son transformaciones que se pueden hacer a los valores o puntuaciones de una supuesta distribución normal, con el propósito de analizar su distancia respecto a la media, expresándolas en unidades de desviación estándar. Un puntaje Z nos indica la

dirección y grado en que un valor individual obtenido se aleja de la media, en una escala de desviaciones estándar.

La fórmula para transformar un valor de una distribución supuesta normal en una unidad de desviaciones estándar es:

$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma} \quad (2.7.5.1)$$

Donde:

$x_i$  : Puntuación o valor a transformar.

$\bar{X}$  : Media aritmética de la muestra.

$\sigma$  : Desviación estándar de la muestra.

Z : Puntuación transformada.

#### **2.7.5.2. Diagrama de Caja**

El diagrama de caja es una presentación visual que describe al mismo tiempo varias características importantes de un conjunto de datos, tales como el centro, la dispersión, la simetría o asimetría y la identificación de observaciones atípicas.

El diagrama de caja representa los tres cuartiles, y los valores mínimo y máximo de los datos sobre un rectángulo (caja), alineado horizontal o verticalmente.

#### **Construcción:**

1. El rectángulo delimita el rango intercuartílico con la arista izquierda (o inferior) ubicada en el primer cuartil Q1, y la arista derecha (o superior) en el tercer cuartil Q3.
2. Se dibuja una línea a través del rectángulo en la posición que corresponde al segundo cuartil (que es igual al percentil 50 o a la mediana),  $Q2 = Md$ .
3. De cualquiera de las aristas del rectángulo se extiende una línea, o bigote, que va hacia los valores extremos (valor mínimo y valor máximo). Estas son observaciones que se encuentran entre cero y 1.5 veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo.

4. Las observaciones que están entre 1.5 y 3 veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo reciben el nombre de valores atípicos. Las observaciones que están más allá de tres veces el rango intercuartílico a partir de las aristas del rectángulo se conocen como valores atípicos extremos. En ocasiones se emplean diferentes símbolos (como círculos vacíos o llenos), para identificar los dos tipos de valores atípicos.

A veces, los diagramas de caja reciben el nombre de diagramas de caja y bigotes. Nótese que el rectángulo o caja representa el 50% de los datos que particularmente están ubicados en la zona central de la distribución. La caja representa el cuerpo de la distribución y los bigotes sus colas.

Del diagrama se interpreta que la distribución de los datos es asimétrica por la derecha, ya que la longitud de los rectángulos por debajo y por encima de la mediana así como los bigotes indican que los datos están más agrupados en sus valores inferiores que en los superiores y además se observa que  $X > Md$ . También destaca la existencia de dos valores atípicos en el extremo superior de los datos.

## **2.8. CORRELACIÓN.**

La correlación trata de establecer la relación o dependencia que existe entre dos variables que intervienen en una distribución bidimensional. Es decir, determinar si los cambios en una de las variables influyen en los cambios de la otra. En caso de que suceda, diremos que las variables están correlacionadas o que hay correlación entre ellas.

### **2.8.1. Correlación lineal.**

La correlación lineal es una técnica que permite cuantificar la relación que puede ser observada cuando se grafica un diagrama de puntos dispersos correspondientes a dos variables, cuya tendencia general es rectilínea relación que cabe justificar con una ecuación del mejor ajuste de la forma:

$$y = A + Bx \quad (2.8.1.1)$$

Donde:

y: Representa los valores de coordenada a lo largo del eje vertical en el gráfico.

x: Indica la magnitud de la coordenada sobre el eje horizontal.

A: Intercepto.

B: Pendiente o inclinación de la recta.

### **2.8.2. Correlación potencial.**

La correlación potencial es aquella en que la función de ajuste del conjunto de datos sea una función potencial de tipo:

$$y = Ax^B \quad (2.8.1.2)$$

Donde:

y: Representa los valores de coordenada a lo largo del eje vertical en el gráfico.

x: Indica la magnitud de la coordenada sobre el eje horizontal.

A: Constante de proporcionalidad.

B: Exponente de la potencia.

## **2.9. COEFICIENTES DE CORRELACIÓN.**

### **2.9.1. Coeficiente de correlación de Pearson.**

El coeficiente de correlación r es la expresión matemática de la relación entre las dos variables aleatorias.

Se calcula mediante la fórmula:

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x * S_y} \quad (2.9.1.1)$$

- **Utilización del coeficiente de correlación r.**

El coeficiente de correlación r se utiliza para:

(a) comprobar que existe una relación lineal entre dos variables aleatorias, antes de proceder al análisis de regresión.

(b) resumir en un solo número ( r ) la intensidad de la relación lineal entre estas dos variables.

El coeficiente de correlación r no debe utilizarse para:

- (a) establecer relaciones causales entre dos variables.
- (b) suplantar el análisis de regresión.
- (c) analizar la coherencia entre mediciones.

- **Propiedades del coeficiente de correlación r.**

- El coeficiente de correlación r no tiene unidades;
- El intervalo de posibles valores de r es:  $-1 \leq r \leq 1$ ;
- En el análisis de la correlación no es aplicable la distinción entre variable “dependiente” o “independiente” como sucede en el modelo de regresión: aquí ambas variables son “dependientes”.

### **2.9.2. Coeficiente de determinación.**

El coeficiente de determinación  $R^2$  indica la proporción de varianza común entre una variable dependiente y una(s) variable(s) independientes. Se define como el cuadrado del coeficiente de correlación r de Pearson:

$$R^2 = r^2 \quad (2.9.2.1)$$

Sus valores están, pues incluidos en el intervalo  $[0,1]$  .

### **2.9.3. El coeficiente de correlación $\rho$ de Spearman.**

Es un caso especial de coeficiente de correlación de Pearson en que los datos continuos son previamente convertidos en ordinales.

- **Propiedades**

- Aplicable cuando se trata de datos ordenados (o continuos reducidos a ordinales).
- Menos influenciado por la presencia de datos sesgados.
- Es una medida de correlación no paramétrica en el sentido de que no implica suposiciones acerca de la forma de la distribución de frecuencias de las variables implicadas.
- Tampoco requiere la suposición de linealidad.

- **Cálculo**

Una vez convertidos los datos en sus respectivos ordinales, se aplica el mismo procedimiento de cálculo que para el coeficiente de Pearson.

Una fórmula alternativa, más práctica, es:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n-1)} \quad (2.9.3.1)$$

donde:

$d^2$  es la diferencia de los ordinales de X e Y ;

n es el número de pares de datos

#### **2.9.4. Otras medidas de correlación. (1) Simplificación del cálculo del coeficiente de correlación.**

Versiones simplificadas del cálculo del coeficiente de Pearson, a veces denominados “atajos”, son:

- El coeficiente de correlación biserial puntual b p r.
- El coeficiente de correlación  $\Phi$  (phi).

#### **2.10. Análisis de Residuos.**

El Análisis de Residuos sirve para verificar si un modelo lineal establecido para relacionar dos o más variables es el que mejor se ajusta a los datos recopilados.

Se define un residuo ( $e_i$ ) como la diferencia entre el valor observado y con el valor estimado  $\hat{y}$  es decir:

$$e_i = y - \hat{y} \quad (2.10.1)$$

Donde:

$e_i$  : Residuo.

$y$  : Valor observado.

$\hat{y}$  : Valor Esperado.

El análisis de residuos nos permite llegar a conclusiones tales como:

- La función de regresión es lineal.
- La función de regresión no es lineal
- El modelo de regresión lineal se ajusta a todas excepto una o varias observaciones atípicas. Estas observaciones atípicas pueden no considerarse si el número de datos es grande (> a 30 datos).

## **2.11. METODOLOGÍA PARA LOS ENSAYOS DE LABORATORIO.**

### **2.11.1. Ensayos al Cemento.**

#### **Modulo de Finura.**

El procedimiento a seguir se describe a continuación:

- ✓ Pesar 50 gr. de cemento para determinar su finura.
- ✓ Agitar la Muestra, utilizando Tamices de malla N° 40 y N° 200 con base y tapa en el vibrador mecánico (Rop Tap) .
- ✓ El tiempo de vibrado dependerá de la cantidad de finos de la muestra, por lo general no debe ser menor a 15 minutos.
- ✓ Se quita la tapa y se separa la malla N° 40 vaciando la fracción de cemento que pueda quedar retenida en ella, sobre un papel limpio. A las partículas que han quedado trancadas entre los hilos de las mallas no hay que forzarlas a pasar a través de ella; inviértase la malla y con ayuda de un cepillo o brocha de alambre despréndase y agregarlas a las depositadas en el papel.
- ✓ Se pesa cuidadosamente la fracción de muestra obtenida anteriormente. Se pone en un recipiente o cápsula, se guarda esta fracción de la muestra hasta el final de práctica, para poder repetir las pesadas en caso de error.
- ✓ Se realiza el pesado de material retenido en las mallas y el recipiente del fondo, procediendo de la forma indicada. Todos los retenidos se anotan en la hoja de registro de cálculos.

#### **Peso Específico.**

El procedimiento se describe a continuación:

- ✓ Inicialmente se debe pesar una masa de 64 g. de cemento para el ensayo.

- ✓ Este ensayo se realizara llenando el frasco de Le Chatelier con Kerosene hasta una marcación de  $0 \pm 1$  ml el cual se deja en agua a temperatura ambiente hasta que la lectura se estabilice.
- ✓ Una vez estabilizada la lectura se procederá a tomar la lectura del volumen inicial.
- ✓ Posteriormente se adicionaran los 64 g. de cemento lentamente, se tomara el conjunto de frasco, kerosene y cemento introduciéndolo en agua a temperatura ambiente y se tomara la segunda lectura de volumen.
- ✓ La diferencia entre las dos lecturas corresponde al volumen del líquido desplazado por los 64 g. de cemento y la densidad del cemento será calculada como la masa de cemento dividido entre ese volumen.

### **2.11.2. Ensayos a los Agregados Finos y Gruesos.**

#### **Granulometría.**

A continuación se menciona el procedimiento a seguir:

- ✓ Se toma una muestra representativa de cada uno de los agregados, los cuales se deben ser secados al horno a temperatura de  $110 \pm 5$  °C.
- ✓ Se lavan los agregados a través del tamiz No. 200, se secan al horno y luego se pasa la masa de agregados por una serie de tamices.
- ✓ Finalmente pesar la masa de agregado retenida en cada uno de los tamices.

#### **Peso Especifico y Absorción.**

El procedimiento para agregados gruesos es el siguiente:

- ✓ Seleccionar una masa de material por medio del cuarteo y tamizarla por la malla No. 4.
- ✓ Sumergirla en agua por un tiempo de 24 horas, sacarla del agua y pesarla en condición saturada.
- ✓ Posteriormente, se procede a pesar los agregados dentro del agua mediante el uso de una canastilla cilíndrica de metal.

- ✓ Secarlos con una toalla y pesarlos en condición superficialmente seco internamente saturado.

En cuanto al peso específico de los agregados finos el procedimiento es el siguiente:

- ✓ Se selecciona una masa de material por cuarteo y se deja inmersa en agua por 24 horas.
- ✓ Se seca superficialmente por medio de una corriente de aire para comprobar que el material fino se encuentra en condición saturada superficialmente seca.
- ✓ Se llena el molde tronco-cónico compactándolo con 25 golpes y si al levantarlo el material fino se desmorona parcialmente, el material esta en esta condición, caso contrario se debe eliminar paulatinamente el exceso de humedad hasta alcanzar la condición antes mencionada.
- ✓ Seguidamente se toman 500 g. de agregado llenando el matraz, el conjunto se pesa y se le adiciona agua hasta la marcación de 500 cm<sup>3</sup> desairando la muestra y pesando el conjunto de matraz-agregado fino-agua.

### **Masas Unitarias.**

Se procede de la siguiente manera:

- ✓ Inicialmente se pesa el molde (La selección del tamaño de la medida del molde son las que se indican en la tabla 4).
- ✓ Posteriormente se llena el molde con agregado y luego se pesa el conjunto de molde + agregado, de esta forma se realiza el ensayo de masa unitaria suelta.
- ✓ Para el ensayo de masa unitaria compacta se realizara llenando el molde en tres capas las cuales deberán ser compactadas con 25 golpes mediante una varilla pisón de acero liso de 16 mm de diámetro y 600 mm de longitud.

### **Desgaste de los Ángeles.**

El procedimiento se describe a continuación:

- ✓ Se procede a pesar los tamaños de las fracciones correspondientes al grado elegido, de acuerdo con la tabla 5.

- ✓ Se registra la masa del total de material por ensayar como masa inicial de la muestra.
- ✓ Se coloca la masa inicial de material en La Máquina de los Ángeles y realizar el ensayo de acuerdo con el grado elegido (Número y masa de esferas, y número de revoluciones), según tabla 5.
- ✓ Una vez finalizado el ensayo se retira el material de la máquina evitando pérdidas y contaminaciones, para luego proceder al tamizado manual por el tamiz de 1,7 mm (N° 12).
- ✓ Finalmente se debe reunir el material retenido, lavarlo, secarlo en horno a  $110 \pm 5$  °C y dejar enfriar a temperatura ambiente. Proceder a pesar y registrar la masa del material retenido como masa final de la muestra.

FIGURA 7 : TIPOS DE TAPAS PARA LA MÁQUINA DE LOS ÁNGELES

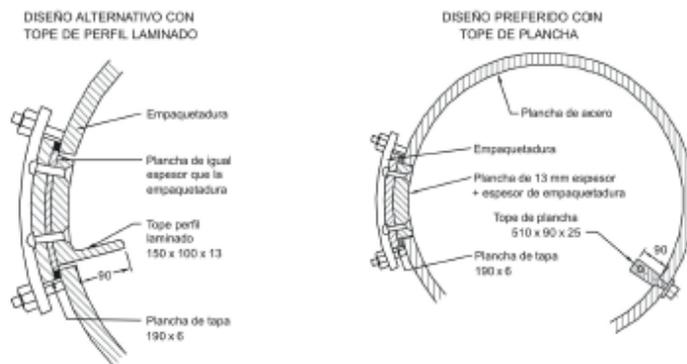
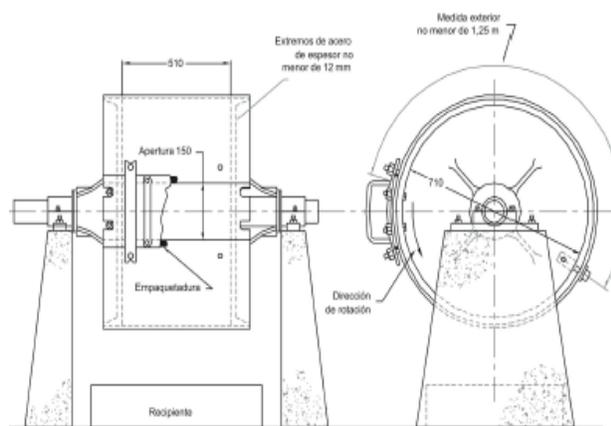


FIGURA 8: MÁQUINA DE LOS ÁNGELES



El apoyo del eje estará montado en pilares de hormigón u otros soportes rígidos.

Dimensiones en mm.

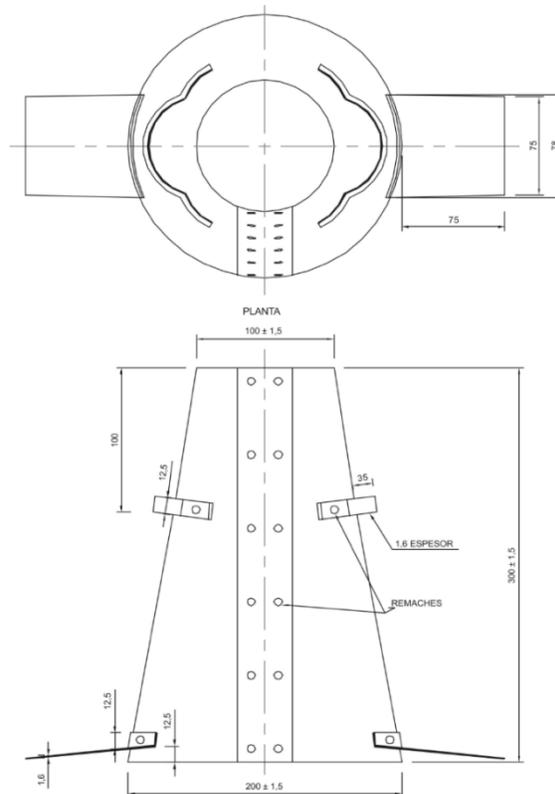
### 2.11.3. Ensayos al hormigón en estado fresco.

#### Asentamiento.

El procedimiento general es el siguiente:

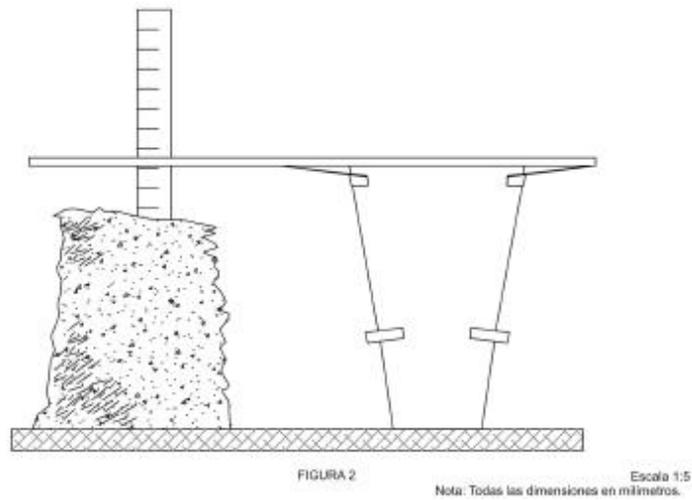
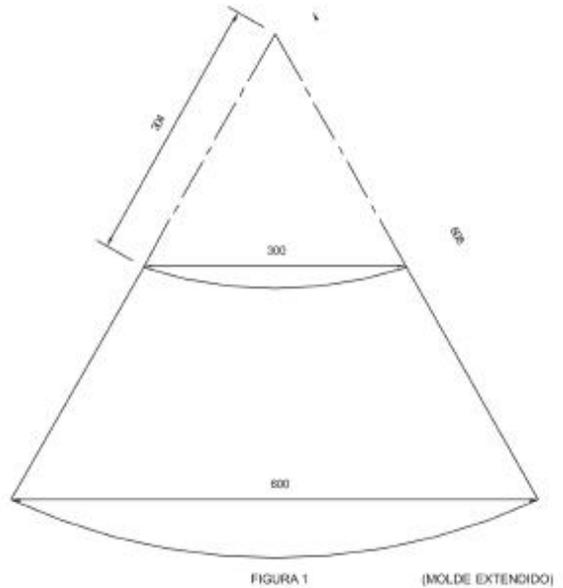
- ✓ Colocar el molde sobre una superficie horizontal, plana y no absorbente.
- ✓ Se procede a llenar el molde en tres capas de volumen aproximadamente igual, apisonando cada capa con 25 golpes proporcionados con una varilla especial de extremo redondeado de 16 mm de diámetro y 600 mm de longitud.
- ✓ Remoción de la mezcla sobrante que haya caído alrededor de la zona donde está ubicada el molde.
- ✓ Se retira con cuidado el molde evitando movimientos laterales o torsión y evitando hacer contacto con la mezcla.
- ✓ Posteriormente, se mide directamente la diferencia de la altura del molde y la medida de la altura sobre el centro de la base superior de la muestra asentada.

FIGURA 9: CONO DE ABRAMS



Nota: Todas las dimensiones en milímetros.

FIGURA 10: MEDICIÓN DEL ASENTAMIENTO EN EL CONO DE ABRAMS



#### 2.11.4. Ensayos al hormigón en estado endurecido.

##### Resistencia a Compresión.

Se procede de la siguiente manera:

- ✓ Limpie la superficie de las placas y de las caras de ensaye de la probeta.
- ✓ Coloque la probeta sobre la placa inferior alineando su eje central con el centro de esta placa.

- ✓ Aplique la carga en forma continua y sin choques, a una velocidad uniforme, que permita cumplir las siguientes condiciones:
- ✓ Alcanzar una franca rotura de la probeta en un tiempo igual o superior a 100 s.
- ✓ Registre la carga máxima P, expresada en N.

### **Resistencia a Tracción por Flexión.**

Se procede de la siguiente manera:

- ✓ Retiro de las probetas curadas. Las probetas que estaban sumergidas en agua por 24 h. para su curado final, retírelas de ésta inmediatamente antes de ensayar, evitar el secamiento en la cara apoyada que es la que recibe la máxima tracción.
- ✓ Aplicación de la carga: La luz de ensaye debe cumplir con las siguientes condiciones, según la forma de aplicación de la carga:
  - a) Cargas P/2 aplicadas en los límites del tercio central.
- ✓ Limpie la superficie de las piezas de apoyo y de carga y las zonas de contacto de la probeta.
- ✓ Coloque la probeta en la prensa de ensaye, dejando la cara de llenado en un plano vertical, y haciendo coincidir las líneas de trazado con las piezas de apoyo y de carga correspondientes.
- ✓ Aplique la carga en forma continua y uniforme, sin choques.
- ✓ Registre la carga máxima P expresada en N.
- ✓ Mida el ancho (b) y la altura (h) con aproximación a 1mm. Registre b y h.

### **2.11.5. Elaboración de Muestras de Hormigón Para Ensayos de Compresión y Flexión**

- Condiciones Generales: El hormigón se debe mezclar de preferencia por medios mecánicos o, en su defecto, por medios manuales. El volumen de la amasada por preparar será superior en un 20% o más, al volumen necesario para efectuar los ensayos del hormigón fresco y/o confeccionar probetas.

- Mezclado Mecánico: El procedimiento será aplicable a todo tipo de hormigones, debiéndose prestar especial atención para evitar, en lo posible, la pérdida de mortero por adherencia a las superficies interiores del tambor del mezclador y a las paletas. La cantidad de mezcla quedará determinada por la capacidad del mezclador utilizado.
- Vaciado del concreto Lugar del moldeo. Se deben moldear las muestras lo más cerca posible del lugar donde se van a guardar para su fraguado en las siguientes 24 horas. Los moldes se llevarán al depósito inmediatamente después de su elaboración. Colóquense los moldes sobre una superficie rígida y libre de vibraciones, evitando inclinaciones y movimientos bruscos. Transpórtense evitando sacudidas, golpes, inclinaciones o raspaduras de la superficie. El concreto se debe colocar en los moldes utilizando un badilejo o herramienta similar. El número de capas debe ser el especificado en la Tabla 16.
- Compactación. La selección del método de compactación debe hacerse con base en el asentamiento, a menos que el método sea establecido en las especificaciones bajo las cuales se trabaja (Tabla 16.1).
- Acabado. Después de la compactación, se debe efectuar el acabado con las manipulaciones mínimas, de tal manera que la superficie quede plana y pareja a nivel del borde del cilindro o lado del molde, y no debe tener depresiones o protuberancias mayores de 3.2 mm (1/8").
- Acabados de cilindros: Después de la compactación, se debe efectuar el acabado de la superficie por medio de golpes con la varilla apisonadora cuando la consistencia del concreto lo permita o con un badilejo o llana de madera.

### **Curado.**

- Cubrimiento después del acabado: Para evitar la evaporación de agua del concreto sin endurecer, los testigos deben ser cubiertos inmediatamente después del acabado, preferiblemente con una Platina no reactiva con el concreto, o con una lámina de plástico dura e impermeable. Se permite el uso de lona húmeda para el

cubrimiento de la muestra, pero se evitará el contacto directo de la muestra con la lona, la cual debe permanecer húmeda durante las 24 horas contadas a partir del acabado de la muestra.

- Extracción de la muestra. Las muestras deben ser removidas de sus moldes en un tiempo no menor de 20 horas ni mayor de 48 horas después de su elaboración, cuando no se empleen aditivos; en caso contrario, se podrán emplear tiempos diferentes.
- El almacenamiento durante las primeras 48 horas de curado debe hacerse en un medio libre de vibraciones. La condición de humedad debe lograrse por inmersión de la muestra sin el molde en agua. Se permite lograr la condición de humedad por el almacenamiento en un cuarto húmedo. No deben exponerse los especímenes a condiciones de goteo o de corrientes de agua.
- Debe evitarse que se sequen las paredes de la muestra luego del periodo de curado.

### III. APLICACIÓN PRÁCTICA.

#### 3.1. RESULTADOS DE ENSAYOS DE RESISTENCIAS A COMPRESIÓN.

A continuación y para cada diseño de mezclas, en resumen se muestra los resultados de los ensayos de resistencia a compresión:

TABLA 5 : RESULTADOS DE ENSAYOS DE RESISTENCIAS A COMPRESIÓN

N° De Ensayo	Diseño 180 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 210 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 280 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 350 kgf/cm <sup>2</sup>
1	185	223	308	360
2	213	210	290	362
3	201	238	334	358
4	192	224	335	391
5	196	220	301	357
6	187	210	295	358
7	186	232	324	360
8	196	237	307	368
9	195	229	314	330
10	186	223	290	362
11	226	243	294	385
12	189	232	313	366
13	192	222	308	378
14	196	269	331	352
15	186	191	332	385
16	217	224	280	351
17	192	220	302	361
18	220	222	288	380
19	215	230	302	364
20	176	220	301	357
21	189	229	300	362
22	191	230	304	351
23	195	229	307	363
24	194	267	302	361
25	190	218	300	367
26	186	224	312	363
27	191	220	305	392
28	189	225	280	365
29	217	230	288	392
30	196	225	306	365

FUENTE: PROPIA

##### 3.1.1. Análisis Estadístico Descriptivo Para Resistencias a Compresión.

En este acápite se desarrolla el análisis estadístico para cada uno de los diseños de mezclas para resistencias a compresión:

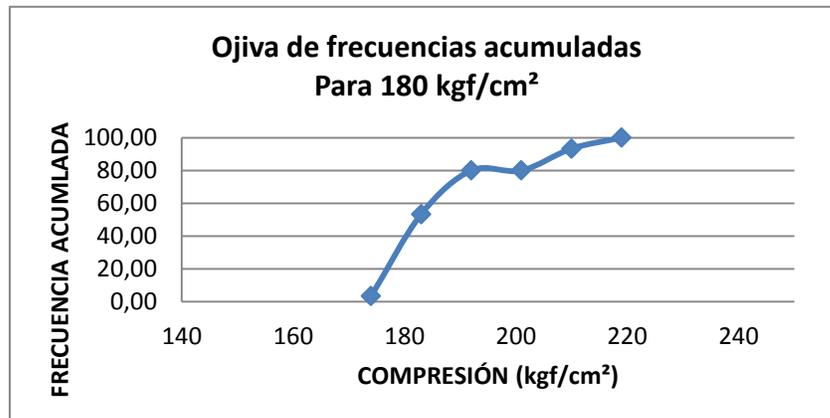
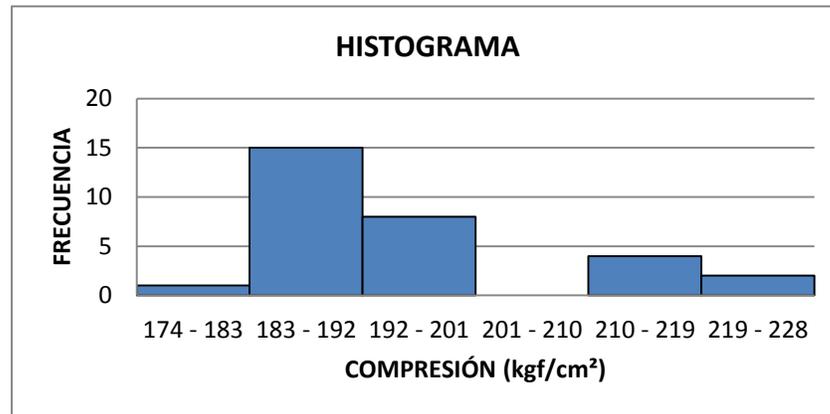
### 3.1.1.1. Análisis Estadístico Diseño 180 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 6 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 180 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 180 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

<b>Resistencia (<math>\bar{X}_{prom}</math>)</b>	196	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Desviación Estándar (<math>\sigma</math>)</b>	12	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Coefficiente de variación (<math>v</math>)</b>	6	<b>%</b>
<b>Rango (R)</b>	50	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Amplitud (A)</b>	8,50	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>N° de Intervalos</b>	6	
<b>Moda (Md)</b>	196	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	Hi	Hi
1	174 - 183	1	1	3,33	3,33
2	183 - 192	15	16	50,00	53,33
3	192 - 201	8	24	26,67	80,00
4	201 - 210	0	24	0,00	80,00
5	210 - 219	4	28	13,33	93,33
6	219 - 228	2	30	6,67	100,00
		30			



FUENTE: PROPIA

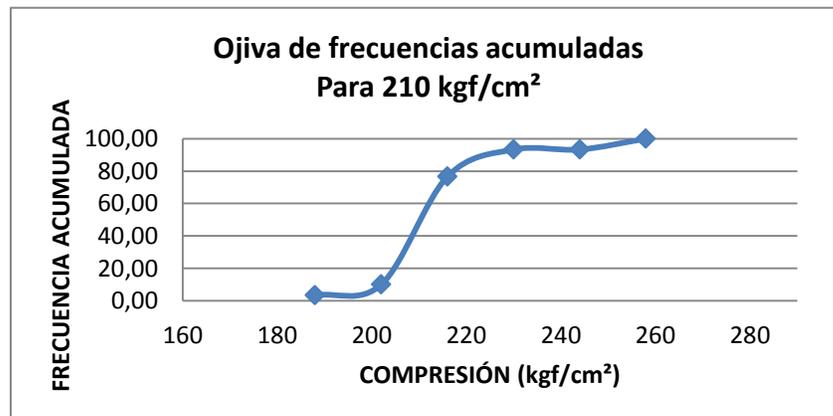
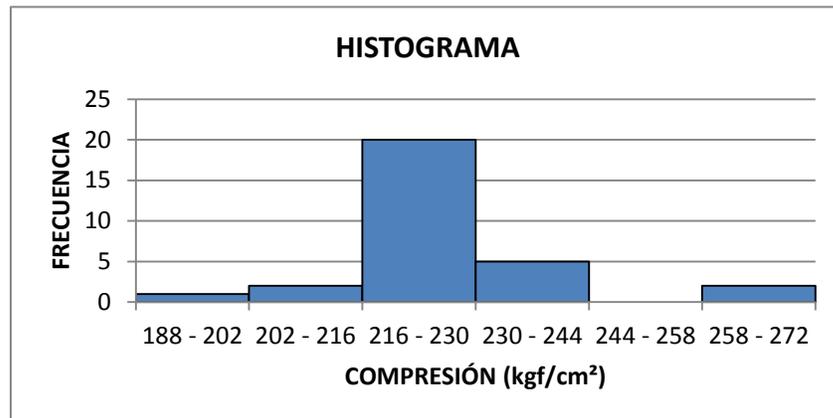
### 3.1.1.2. Análisis Estadístico Diseño 210 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 7 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 210 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 210 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ )	227	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	15	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	6	%
Rango (R)	78	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	13,15	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	220	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Ni	Fi	Hi
1	188 - 202	1	1	3,33	3,33
2	202 - 216	2	3	6,67	10,00
3	216 - 230	20	23	66,67	76,67
4	230 - 244	5	28	16,67	93,33
5	244 - 258	0	28	0,00	93,33
6	258 - 272	2	30	6,67	100,00
		30			



FUENTE: PROPIA

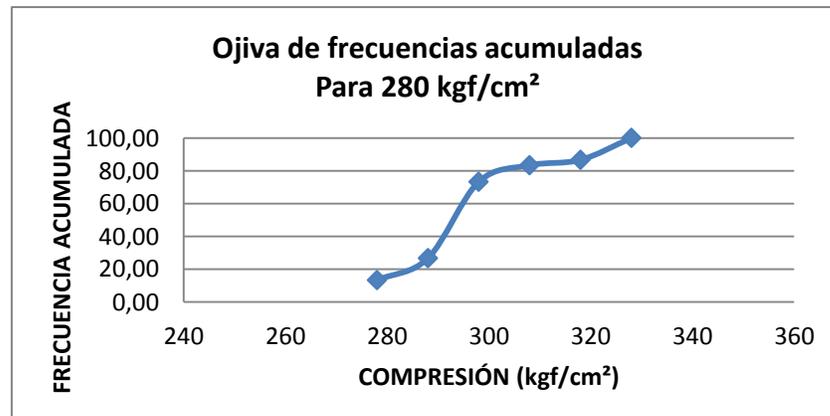
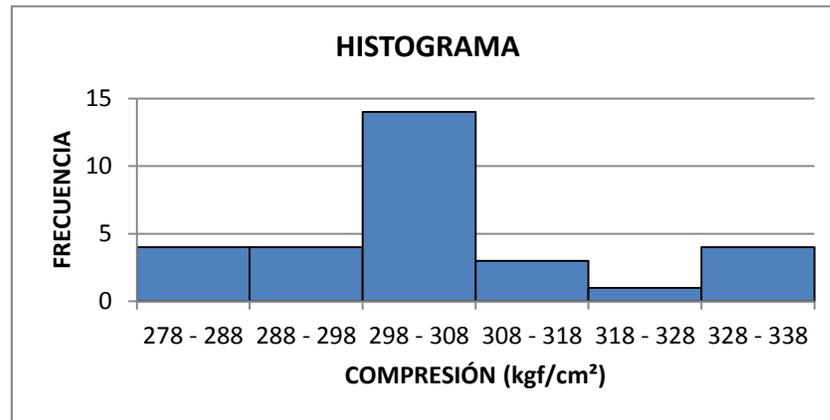
### 3.1.1.3. Análisis Estadístico Diseño 280 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 8 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 280 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 280 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ )	305	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	15	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	5	%
Rango (R)	55	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	9,3	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	302	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Ni	fi	Hi
1	278 - 288	4	4	13,33	13,33
2	288 - 298	4	8	13,33	26,67
3	298 - 308	14	22	46,67	73,33
4	308 - 318	3	25	10,00	83,33
5	318 - 328	1	26	3,33	86,67
6	328 - 338	4	30	13,33	100,00
		30			



FUENTE: PROPIA

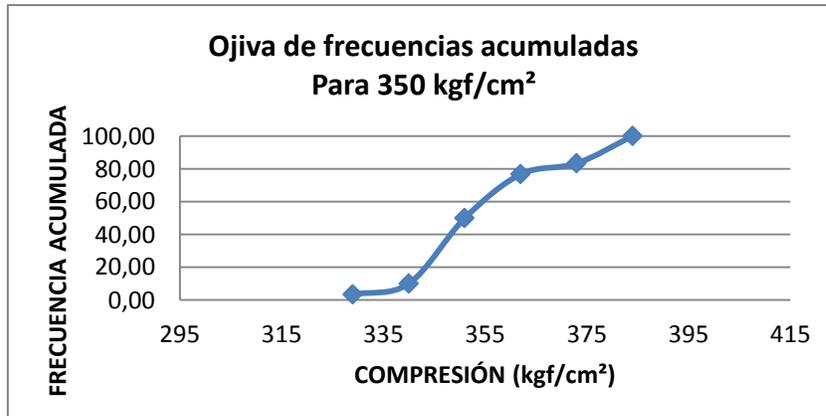
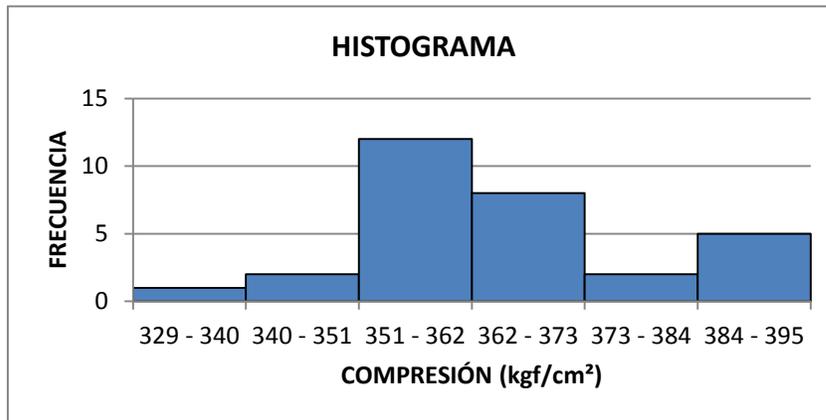
### 3.1.1.4. Análisis Estadístico Diseño 350 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 9 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 350 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 350 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

Resistencia ( $X_{prom}$ )	366	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	14	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	4	%
Rango (R)	63	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	10,64	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	362	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Ni	fi	Hi
1	329 - 340	1	1	3,33	3,33
2	340 - 351	2	3	6,67	10,00
3	351 - 362	12	15	40,00	50,00
4	362 - 373	8	23	26,67	76,67
5	373 - 384	2	25	6,67	83,33
6	384 - 395	5	30	16,67	100,00
		30			



FUENTE: PROPIA

### 3.2. RESULTADOS DE ENSAYOS DE RESISTENCIAS A FLEXIÓN.

A continuación y para cada diseño de mezclas, en resumen se muestra los resultados de los ensayos de resistencia a flexión:

TABLA 10 : RESULTADOS DE ENSAYOS RESISTENCIAS A FLEXIÓN

N° De Ensayo	Diseño 180 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 210 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 280 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 350 kgf/cm <sup>2</sup>
1	34	39	42	48
2	32	37	37	47
3	35	40	42	48
4	36	33	40	45
5	43	38	39	51
6	34	33	41	43
7	21	40	56	47
8	33	41	43	41
9	33	35	42	58
10	39	36	42	48
11	38	35	40	32
12	32	17	41	41
13	31	43	38	42
14	33	35	45	48
15	36	35	28	52
16	33	33	40	48
17	35	36	43	51
18	33	44	39	45
19	33	19	54	59
20	20	38	40	47
21	23	39	43	53
22	38	35	40	45
23	30	36	38	46
24	35	34	41	45
25	34	45	38	48
26	39	31	41	45
27	32	27	22	45
28	29	38	43	50
29	34	33	38	32
30	41	21	44	46

FUENTE: PROPIA

#### 3.2.1. Análisis Estadístico Descriptivo Para Resistencias a Flexión.

En este acápite se desarrolla el análisis estadístico para cada uno de los diseños de mezclas para resistencias a flexión:

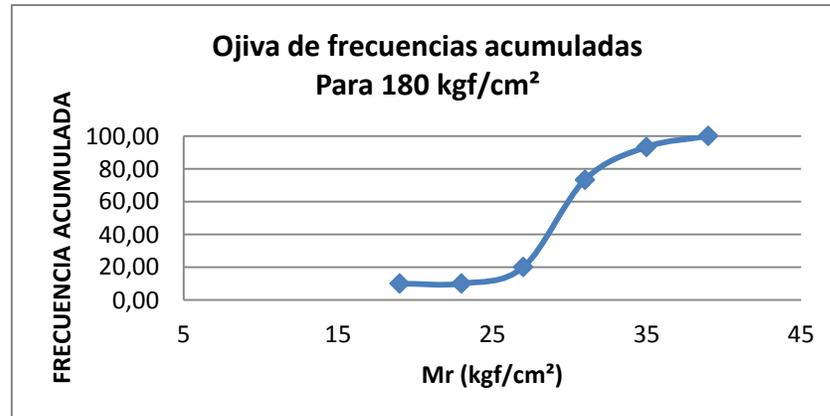
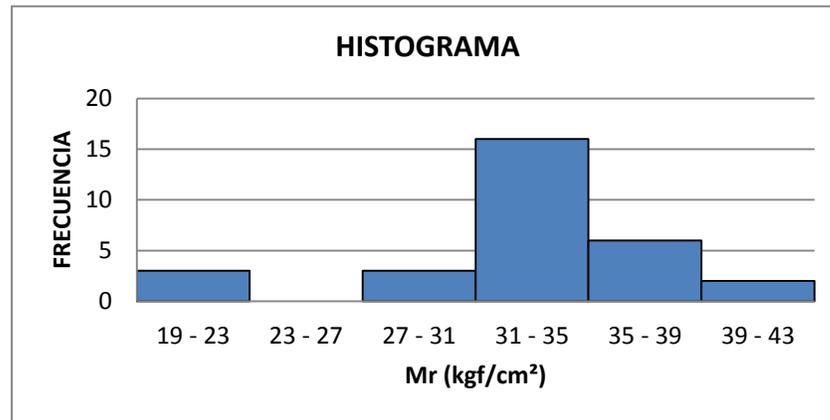
### 3.2.1.1. Análisis Estadístico Diseño 180 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 11 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 180 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 180 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ )	33	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	5	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	15	%
Rango (R)	23	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	3,85	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	33	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	F <sub>i</sub>	hi	Hi
1	19 - 23	3	3	10,00	10,00
2	23 - 27	0	3	0,00	10,00
3	27 - 31	3	6	10,00	20,00
4	31 - 35	16	22	53,33	73,33
5	35 - 39	6	28	20,00	93,33
6	39 - 43	2	30	6,67	100,00
		30			



FUENTE: PROPIA

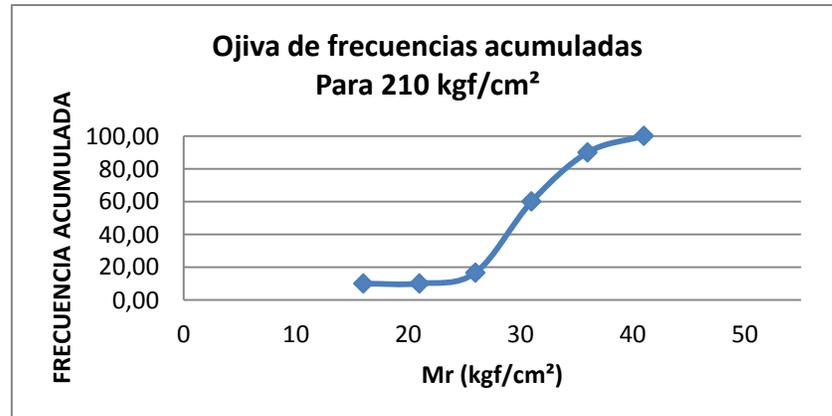
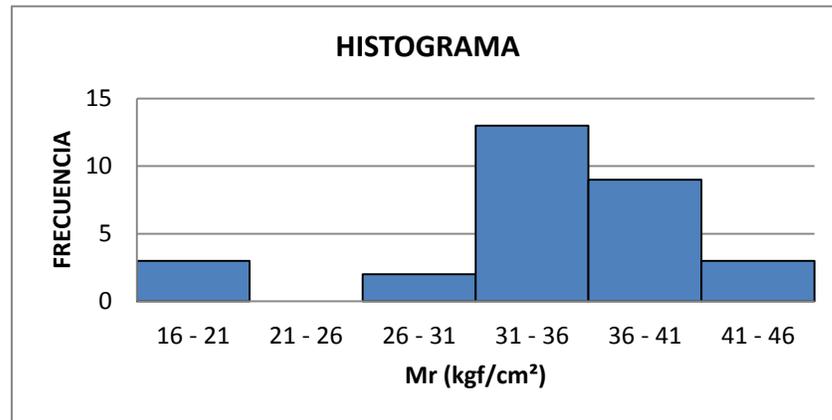
### 3.2.1.2. Análisis Estadístico Diseño 210 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 12 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 210 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 210 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

<b>Resistencia (Xprom)</b>	35	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Desviación Estándar (σ)</b>	7	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Coefficiente de variación (v)</b>	19	<b>%</b>
<b>Rango (R)</b>	29	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Amplitud (A)</b>	4,83	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>N° de Intervalos</b>	6	
<b>Moda (Md)</b>	35	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	hi	Hi
1	16 - 21	3	3	10,00	10,00
2	21 - 26	0	3	0,00	10,00
3	26 - 31	2	5	6,67	16,67
4	31 - 36	13	18	43,33	60,00
5	36 - 41	9	27	30,00	90,00
6	41 - 46	3	30	10,00	100,00
		30			



FUENTE: PROPIA

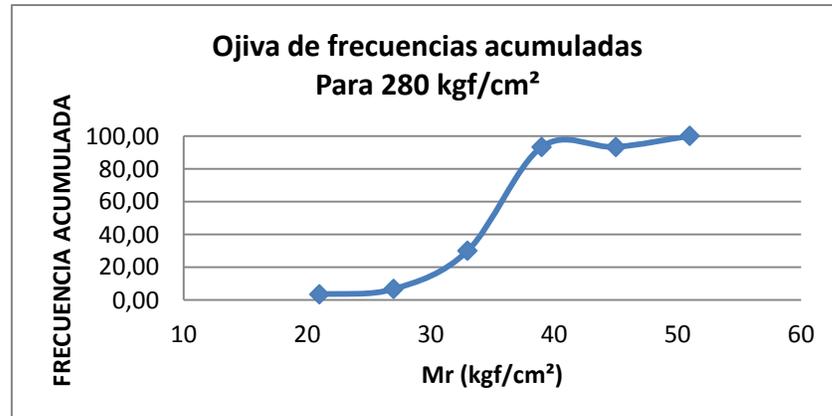
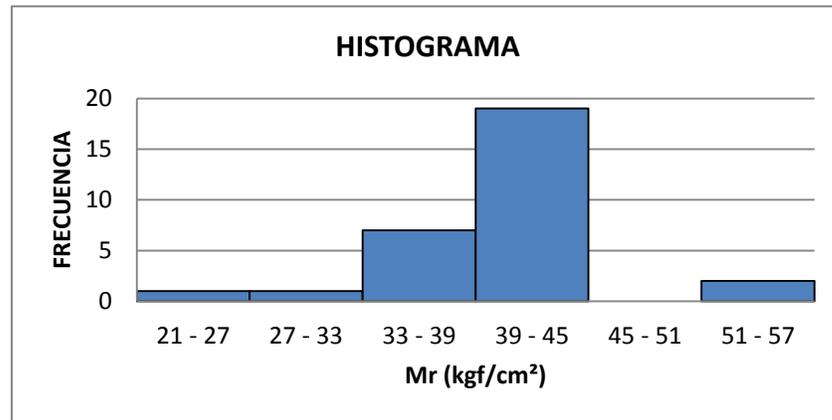
### 3.2.1.3. Análisis Estadístico Diseño 280 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLAS 13 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 280 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FEXIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 280 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ )	41	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	6	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	15	%
Rango (R)	34	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	5,76	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	40	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	fi	Fi	hi	Hi
1	21 - 27	1	1	3,33	3,33
2	27 - 33	1	2	3,33	6,67
3	33 - 39	7	9	23,33	30,00
4	39 - 45	19	28	63,33	93,33
5	45 - 51	0	28	0,00	93,33
6	51 - 57	2	30	6,67	100,00
		30			



FUENTE: PROPIA

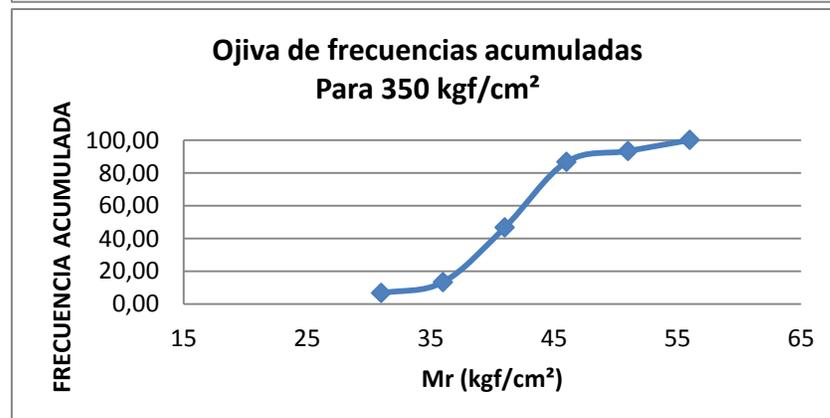
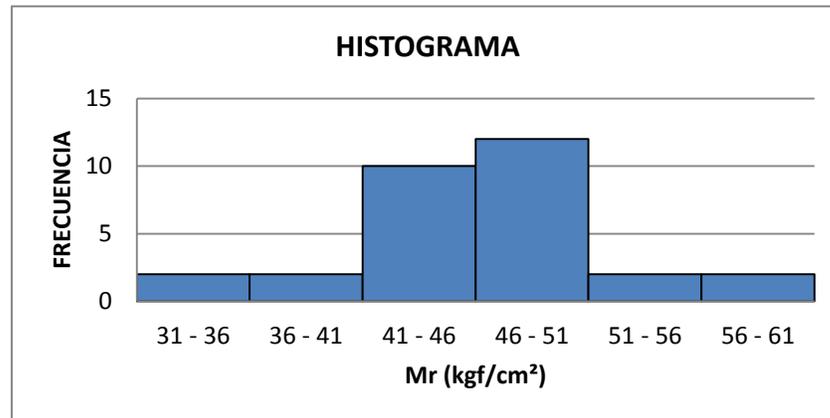
### 3.2.1.4. Análisis Estadístico Diseño 350 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 14 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 350 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 350 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

<b>Resistencia (<math>\bar{X}</math>)</b>	47	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Desviación Estándar (<math>\sigma</math>)</b>	6	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Coefficiente de variación (<math>v</math>)</b>	12	<b>%</b>
<b>Rango (R)</b>	27	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>Amplitud (A)</b>	4,54	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>
<b>N° de Intervalos</b>	6	
<b>Moda (Md)</b>	45	<b>kgf/cm<sup>2</sup></b>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	Hi	Hi
1	31 - 36	2	2	6,67	6,67
2	36 - 41	2	4	6,67	13,33
3	41 - 46	10	14	33,33	46,67
4	46 - 51	12	26	40,00	86,67
5	51 - 56	2	28	6,67	93,33
6	56 - 61	2	30	6,67	100,00
		30			



FUENTE: PROPIA

### 3.3. RESULTADOS DE ENSAYOS DE RESISTENCIAS A COMPRESIÓN (DATOS DEPURADOS).

En la siguiente tabla se muestran los resultados de ensayos de resistencia a flexión:

TABLA 15 : RESULTADOS DE ENSAYOS DE RESISTENCIAS A COMPRESIÓN (DATOS DEPURADOS)

N° De Ensayo	Diseño 180 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 210 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 280 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 350 kgf/cm <sup>2</sup>
1	185	223	308	360
2	201	210	290	362
3	192	238	301	358
4	196	224	295	357
5	187	220	324	358
6	186	210	307	360
7	196	232	314	368
8	195	237	290	362
9	186	229	294	366
10	189	223	313	378
11	192	243	308	352
12	196	232	331	351
13	186	222	332	361
14	192	224	280	380
15	189	220	302	364
16	191	222	288	357
17	195	230	302	362
18	194	220	301	351
19	190	229	300	363
20	186	230	304	361
21	191	229	307	367
22	189	218	302	363
23	196	224	300	365
24		220	312	365
25		225	305	
26		230	280	
27		225	288	
28			306	

FUENTE: PROPIA

#### 3.3.1. Análisis estadístico descriptivo para resistencias a compresión (datos depurados).

En este acápite se desarrolla el análisis estadístico para cada uno de los diseños de mezclas para resistencias a compresión sometidas a la depuración de valores extremos:

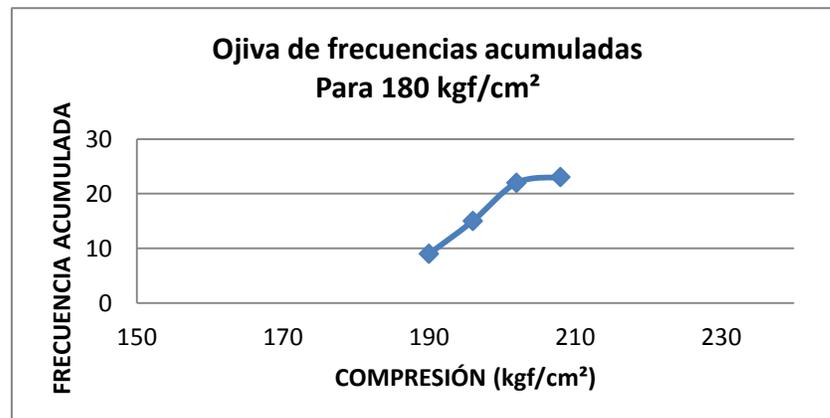
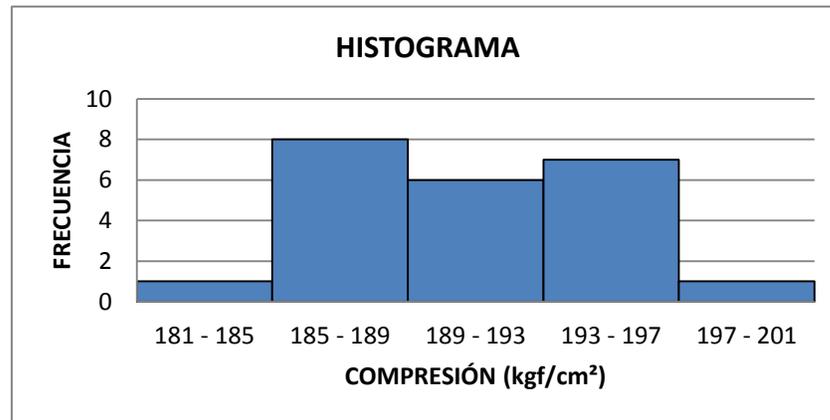
### 3.3.1.1. Análisis Estadístico Diseño 180 kgf/cm<sup>2</sup>

TABLA 16 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 180 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 180 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ prom)	191	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	4	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	2	%
Rango (R)	16	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	3,24	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	5	
Moda (Md)	196	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	Hi	Hi
1	181 - 185	1	1	4,00	4,00
2	185 - 189	8	9	35,00	39,00
3	189 - 193	6	15	26,00	65,00
4	193 - 197	7	22	30,00	96,00
5	197 - 201	1	23	4,00	100,00
		23			



FUENTE: PROPIA

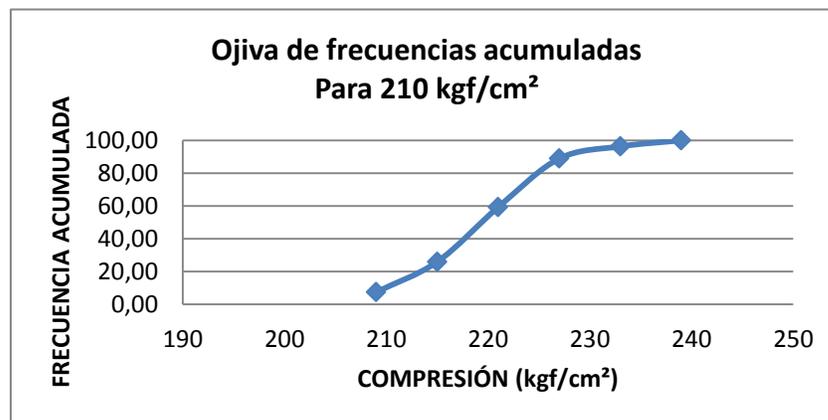
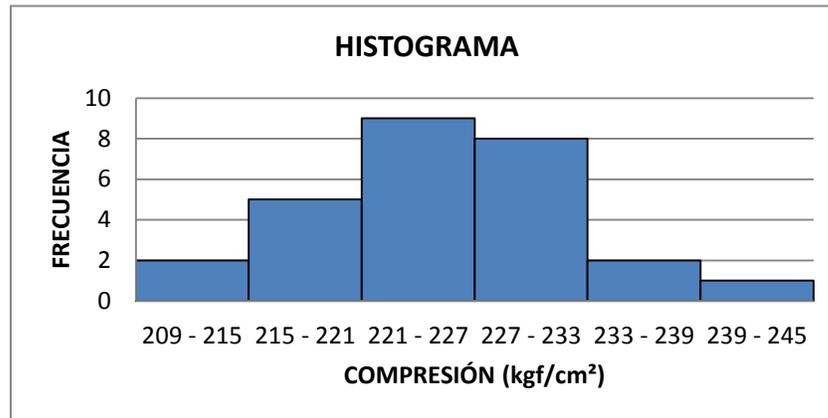
### 3.2.1.4. Análisis Estadístico Diseño 210 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 17 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 210 kgf/cm<sup>2</sup> REISTENCIA A COMPRESIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 210 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ prom)	225	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	8	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	3	%
Rango (R)	33	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	5,86	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	220	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	Hi	Hi
1	209 - 215	2	2	7,41	7,41
2	215 - 221	5	7	18,52	25,93
3	221 - 227	9	16	33,33	59,26
4	227 - 233	8	24	29,63	88,89
5	233 - 239	2	26	7,41	96,30
6	239 - 245	1	27	3,70	100,00
		27			



FUENTE: PROPIA

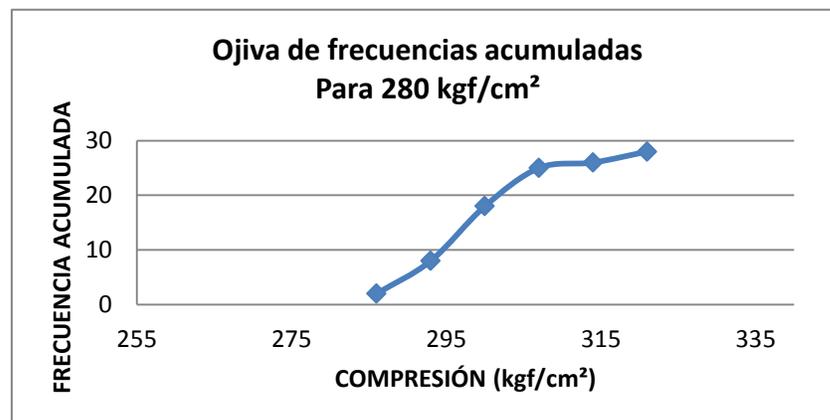
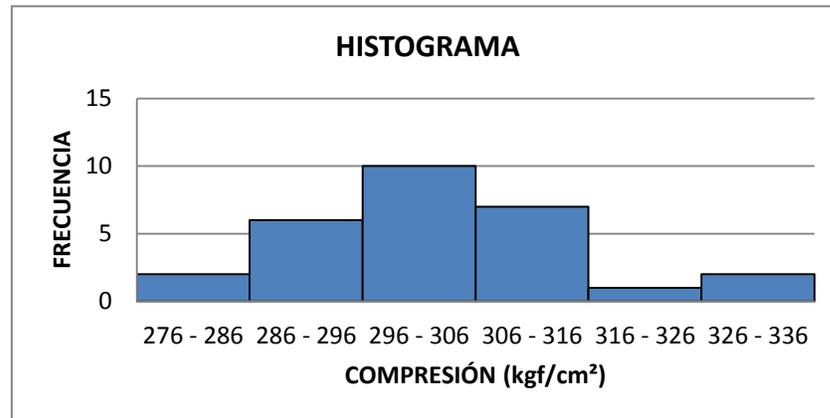
### 3.2.1.4. Análisis Estadístico Diseño 280 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 18 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 280 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 280 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

Resistencia ( $X_{prom}$ )	303	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	13	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	4	%
Rango (R)	52	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	9,04	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	302	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	Hi	Hi
1	276 - 286	2	2	7,00	7,00
2	286 - 296	6	8	21,00	29,00
3	296 - 306	10	18	36,00	64,00
4	306 - 316	7	25	25,00	89,00
5	316 - 326	1	26	4,00	93,00
6	326 - 336	2	28	7,00	100,00
		28			



FUENTE: PROPIA

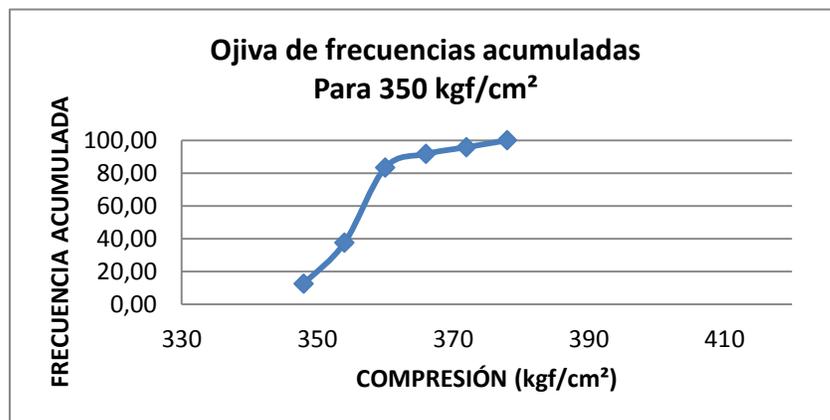
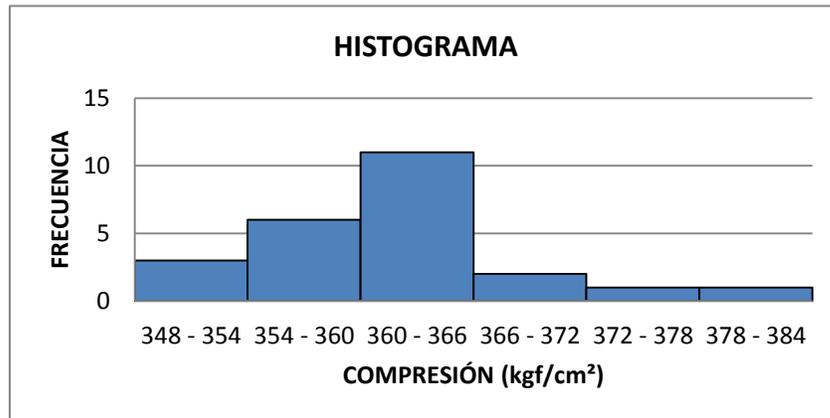
### 3.2.1.4. Análisis Estadístico Diseño 350 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 19 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 350 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 350 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A COMPRESIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ prom)	362	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	7	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	2	%
Rango (R)	29	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	5,22	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	362	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	hi	Hi
1	348 - 354	3	3	12,50	12,50
2	354 - 360	6	9	25,00	37,50
3	360 - 366	11	20	45,83	83,33
4	366 - 372	2	22	8,33	91,67
5	372 - 378	1	23	4,17	95,83
6	378 - 384	1	24	4,17	100,00
		24			



FUENTE: PROPIA

### 3.5. RESULTADOS DE ENSAYOS DE RESISTENCIAS A FLEXIÓN (DATOS DEPURADOS).

A continuación y para cada diseño de mezclas, en resumen se muestra los resultados de los ensayos de resistencia a flexión:

TABLA 20 : RESULTADOS DE ENSAYOS DE RESISTENCIAS A FLEXIÓN (CAMPO MUESTRAL DEPURADO)

N° De Ensayo	Diseño 180 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 210 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 280 kgf/cm <sup>2</sup>	Diseño 350 kgf/cm <sup>2</sup>
1	34	39	42	48
2	32	37	37	47
3	35	40	42	48
4	36	33	40	45
5	34	38	39	51
6	33	33	41	43
7	33	40	43	47
8	39	41	42	41
9	38	35	42	48
10	32	36	40	41
11	31	35	41	42
12	33	43	38	48
13	36	35	45	52
14	33	35	40	48
15	35	33	43	51
16	33	36	39	45
17	33	44	40	47
18	38	38	43	53
19	30	39	40	45
20	35	35	38	46
21	34	36	41	45
22	39	34	38	48
23	32	31	41	45
24	29	27	43	45
25	34	38	38	50
26		33	44	46
27				
28				

FUENTE: PROPIA

#### 3.5.1. Análisis Estadístico Descriptivo Para Resistencias a Flexión (Campo Muestral Depurado).

En este acápite se desarrolla el análisis estadístico para cada uno de los diseños de mezclas para resistencias a flexión sometidas a la depuración de valores extremos:

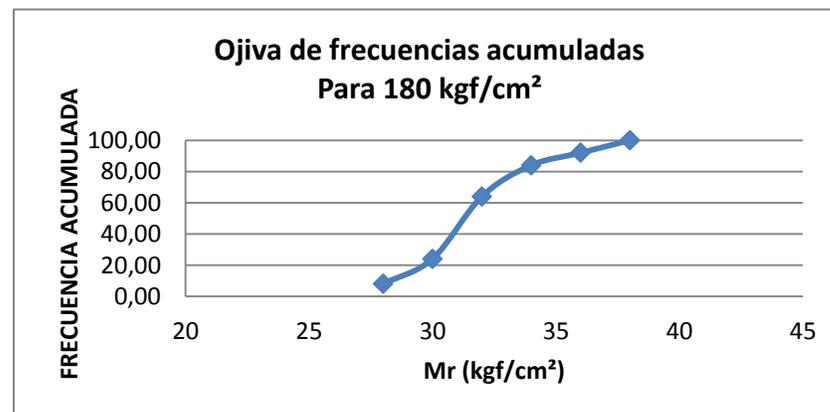
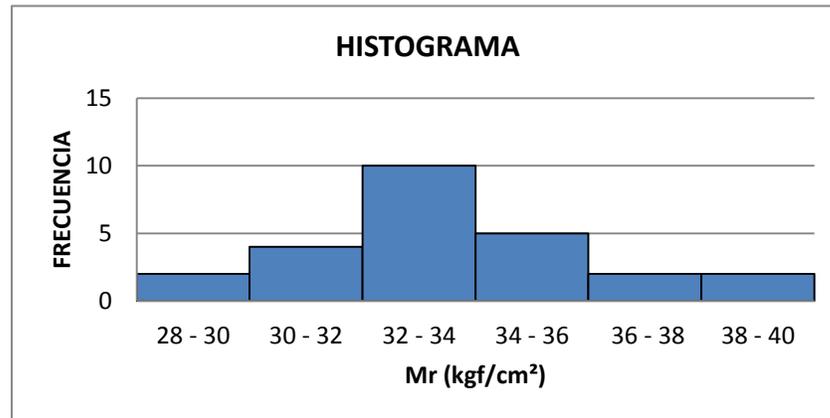
### 3.5.1.1. Análisis Estadístico Diseño 180 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 21 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 180 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 180 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ prom)	34	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	3	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	8	%
Rango (R)	10	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	1,79	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	33	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	Hi	Hi
1	28 - 30	2	2	8,00	8,00
2	30 - 32	4	6	16,00	24,00
3	32 - 34	10	16	40,00	64,00
4	34 - 36	5	21	20,00	84,00
5	36 - 38	2	23	8,00	92,00
6	38 - 40	2	25	8,00	100,00
		25			



FUENTE: PROPIA

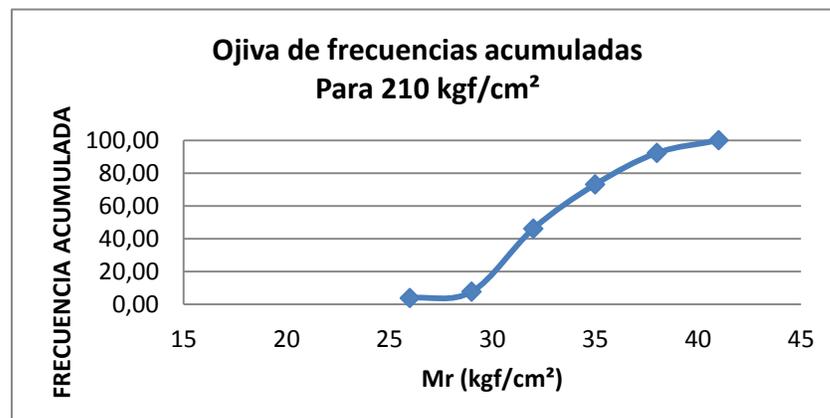
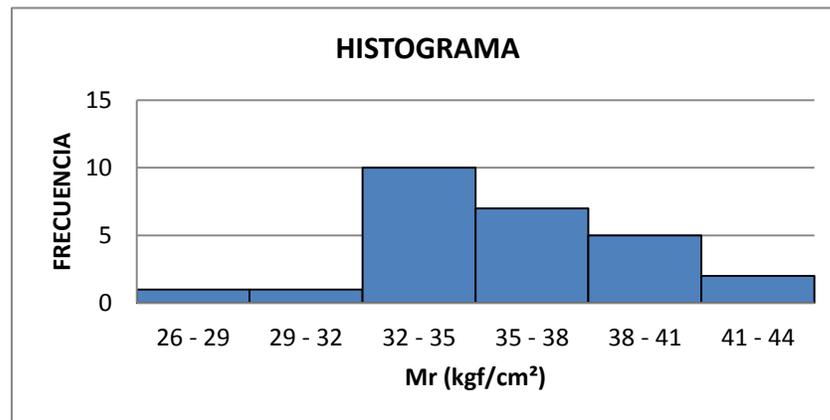
### 3.5.1.2. Análisis Estadístico Diseño 210 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 22 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 210 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 210 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ prom)	36	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	4	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	11	%
Rango (R)	17	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	3,00	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	6	
Moda (Md)	35	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	hi	Hi
1	26 - 29	1	1	3,85	3,85
2	29 - 32	1	2	3,85	7,69
3	32 - 35	10	12	38,46	46,15
4	35 - 38	7	19	26,92	73,08
5	38 - 41	5	24	19,23	92,31
6	41 - 44	2	26	7,69	100,00
		26			



FUENTE: PROPIA

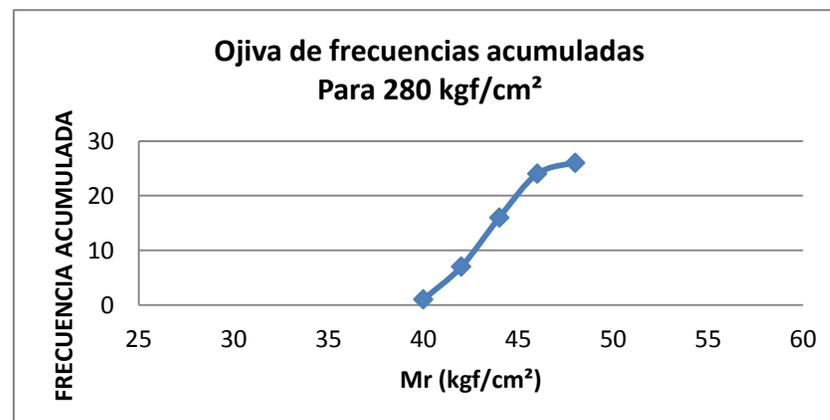
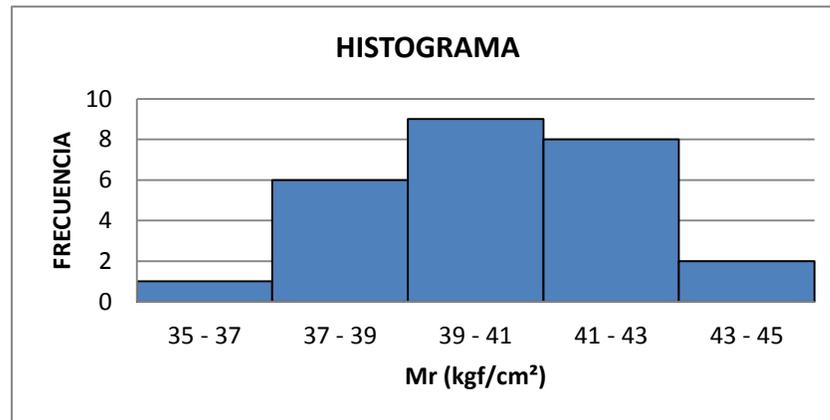
### 3.5.1.3. Análisis Estadístico Diseño 280 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 23 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 280 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 280 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

Resistencia ( $\bar{X}$ prom)	41	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	2	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	5	%
Rango (R)	8	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	1,63	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	5	
Moda (Md)	40	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	fi	Fi	hi	Hi
1	35 - 37	1	1	4,00	4,00
2	37 - 39	6	7	23,00	27,00
3	39 - 41	9	16	35,00	62,00
4	41 - 43	8	24	31,00	92,00
5	43 - 45	2	26	8,00	100,00
		26			



FUENTE: PROPIA

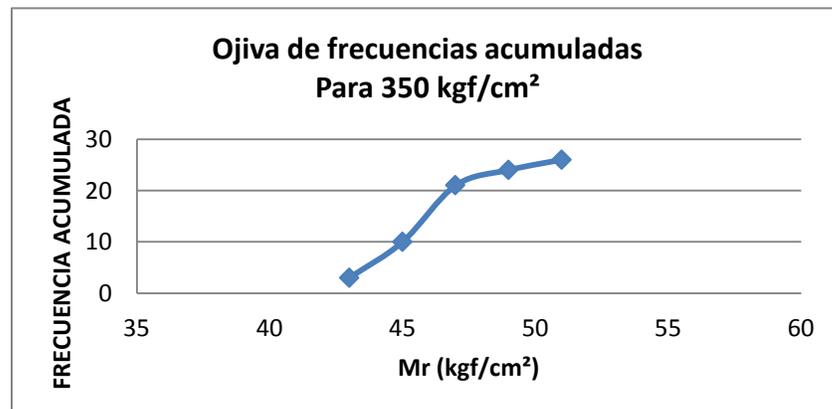
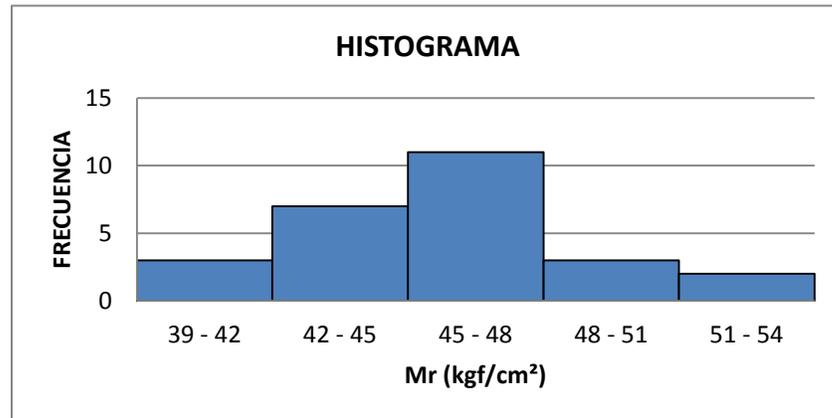
### 3.5.1.4. Análisis Estadístico Diseño 350 kgf/cm<sup>2</sup>.

TABLA 24 : ANÁLISIS ESTADÍSTICO DISEÑO 350 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

#### ANÁLISIS ESTADÍSTICO PARA DISEÑO DE 350 kgf/cm<sup>2</sup> RESISTENCIA A FLEXIÓN

Resistencia ( $X_{prom}$ )	47	kgf/cm <sup>2</sup>
Desviación Estándar ( $\sigma$ )	3	kgf/cm <sup>2</sup>
Coefficiente de variación ( $v$ )	7	%
Rango (R)	13	kgf/cm <sup>2</sup>
Amplitud (A)	2,50	kgf/cm <sup>2</sup>
N° de Intervalos	5	
Moda (Md)	45	kgf/cm <sup>2</sup>

Categoría	Intervalos	Fi	Fi	Hi	Hi
1	39 - 42	3	3	12,00	12,00
2	42 - 45	7	10	27,00	38,00
3	45 - 48	11	21	42,00	81,00
4	48 - 51	3	24	12,00	92,00
5	51 - 54	2	26	8,00	100,00
		26			



FUENTE: PROPIA

#### IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

##### 4.1. COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

Realizando una comparación de los datos obtenidos, tanto a compresión como a flexión, entre los resultados del total de campo muestral con el campo muestral resultado de la depuración, se observan variaciones tanto en el parámetro del promedio aritmético como también en la desviación estándar, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

TABLA 25 : COMPARACIÓN DE RESULTADOS ENTRE EL TOTAL DE LOS DATOS Y DATOS DEPURADOS

RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN								
	Experimental Promedio (Kg/cm <sup>2</sup> )	Desv.						
Diseño (Kg/cm <sup>2</sup> )	180		210		280		350	
Total Campo Muestral	196	12	227	15	305	15	366	14
Campo Muestral Depurado	191	4	225	8	303	13	362	7
RESISTENCIA A LA FLEXIÓN								
	Experimental Promedio (Kg/cm <sup>2</sup> )	Desv.						
Diseño (Kg/cm <sup>2</sup> )	180		210		280		350	
Total Campo Muestral	33	5	35	7	41	6	47	6
Campo Muestral Depurado	34	3	36	4	41	2	47	3

FUENTE: PROPIA

De los resultados de resistencias a compresión y a flexión tanto del total del campo muestral como del campo muestral depurado se obtuvieron los siguientes valores

promedios para cada uno de los diseños de mezclas analizadas, que se resumen en la siguiente tabla:

TABLA 26 : RESISTENCIAS A COMPRESIÓN Y FLEXIÓN PROMEDIO

Resistencia De Diseño $f'c$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	Resistencia a Compresión Promedio $f'c$ (Kg/cm <sup>2</sup> )	Resistencia a Flexión Promedio $Mr$ (Kg/cm <sup>2</sup> )
180	191	34
210	225	36
280	303	41
350	362	47

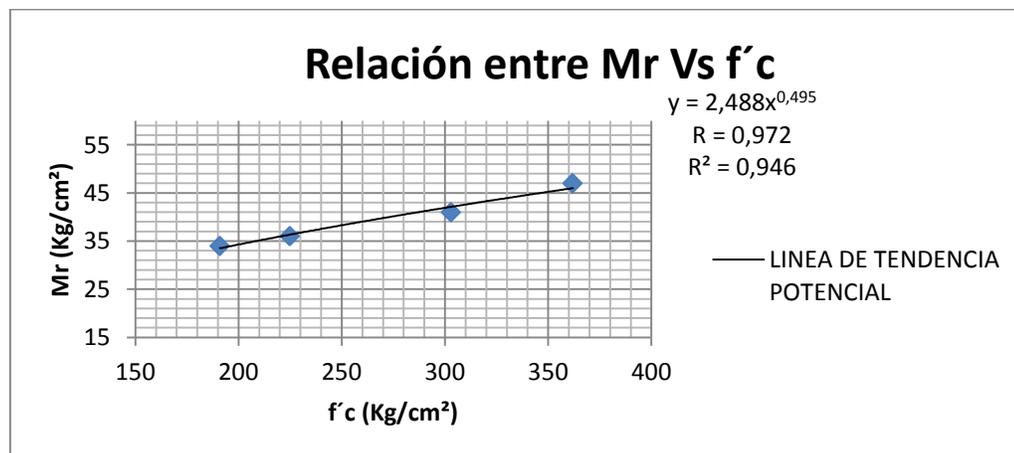
FUENTE: PROPIA

En las siguientes gráficas se pueden observar los modelos matemáticos obtenidos para el estudio realizado a la relación entre el Módulo de Rotura (resistencia a tracción por flexión) y la resistencia a compresión del hormigón para el caso del Cemento El Puente tipo IP - 30, utilizando agregados triturados del rio Guadalquivir de la zona de San Mateo para los diferentes diseños de mezclas de hormigón analizadas.

#### 4.2. DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO POTENCIAL.

A continuación se determina el modelo matemático potencial de tipo  $Mr = k * \sqrt{f'c}$ , que relacione el Módulo de rotura y la resistencia a compresión del hormigón.

FIGURA 11 : CORRELACIÓN POTENCIAL



Se obtiene la siguiente ecuación potencial:

$$Mr = k * f'c^B$$

$$Mr = 2,488 * f'c^{0,495}$$

$$Mr = 2,488 * \sqrt{f'c}$$

Donde:

Mr : Módulo de Rotura (Mr).

f'c : Resistencia a compresión (f'c).

K : Constante de proporcionalidad.

B : Exponente de la potencia.

#### **4.3. COEFICIENTES DE CORRELACIÓN DE PEARSON**

- **Regresión Potencial.**

El valor para el coeficiente de correlación de Pearson para esta regresión es de  $R = 0,972$ , mostrando un grado excelente de relación entre ambas variables.

Al analizar el valor anterior para el coeficiente de correlación, se observa un altísimo grado de correlación entre las variables esto refleja el buen comportamiento que tienen las variables al adecuarlas a este tipo de modelo matemático, esto se confirma con los resultados obtenidos en el análisis de residuos obtenidos los cuales reflejan que el modelo es un buen predictor.

#### **4.4. COEFICIENTES DE DETERMINACIÓN.**

- **Regresión Potencial.**

El valor para el coeficiente de determinación R cuadrado para esta regresión es de  $R^2 = 0,946$ .

Este coeficiente explica la proporción de variación explicada por la regresión, pudiendo expresarse en este caso en particular que el modelo matemático determinado, no tendría variabilidad por lo menos en un 95% de los casos en los que se pretenda aplicar dicho modelo matemático.

Es pertinente recalcar que todas estas aseveraciones se ven fundamentadas al observar los resultados obtenidos mediante el análisis de residuos.

#### 4.6. RELACIÓN ENTRE EL MÓDULO DE ROTURA Y LA RESISTENCIA A COMPRESIÓN DEL HORMIGÓN SEGÚN VARIOS AUTORES.

FIGURA 12 : RELACIONES ENTRE EL MÓDULO DE ROTURA Y LA RESIST. A COMPRESIÓN DEL HORMIGÓN

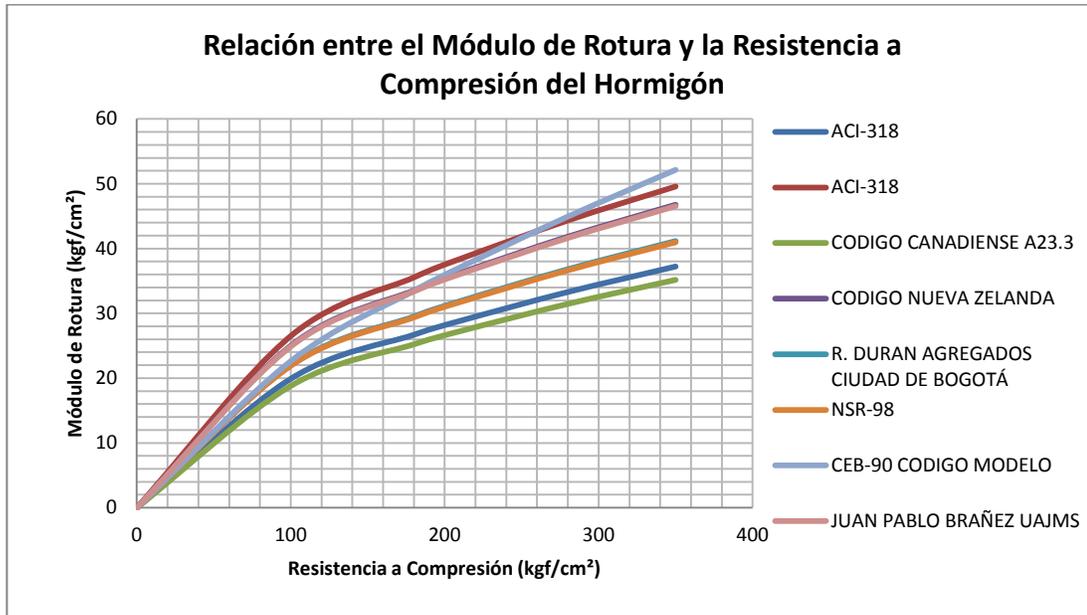


TABLA 27 : MODELOS MATEMÁTICOS PARA RELACIONAR EL MÓDULO DE ROTURA Y LA RESISTENCIA A COMPRESIÓN DEL HORMIGÓN SEGUN VARIOS AUTORES

FUENTE	EXPRESIONES kgf/cm <sup>2</sup>	COMENTARIO
ACI-318	$Mr = 1,99 * f'c^{0,5}$	Para cálculo de deflexiones Concretos de peso unitario 2300-2400 kg/m <sup>3</sup>
ACI-318	$Mr = 2,65 * f'c^{0,5}$	Para cálculo de deflexiones Concretos de peso unitario 2300-2400 kg/m <sup>3</sup>
CÓDIGO CANADIENSE A23.3	$Mr = 1,88 * f'c^{0,5}$	$20 \leq f'c \leq 80 MPa$
CÓDIGO NUEVA ZELANDA	$Mr = 2,5 * f'c^{0,5}$	Para módulo de Rotura promedio
R.DURAN AGREGADOS CIUDAD DE BOGOTÁ	$Mr = 2,2 * f'c^{0,5}$	Agregados ciudad de Bogotá $20 \leq f'c \leq 35 MPa$
NSR-98	$Mr = 2,19 * f'c^{0,5}$	Para control de deflexiones
CEB-90 CÓDIGO MODELO	$Mr = 1,05 * f'c^{2/3}$	
JUAN PABLO BRAÑEZ UAJMS	$Mr = 2,488 * f'c^{0,5}$	$180 \leq f'c \leq 350 \text{ kgf/cm}^2$

FUENTE: PROPIA

Se realiza una comparación entre los resultados obtenidos mediante el presente estudio y un caso en particular como lo es el artículo publicado por el Ing. Alberto Benítez Reynoso titulado "Relación Resistencia a tracción-Resistencia a la compresión simple en el hormigón de la carretera Tarija-Potosí".

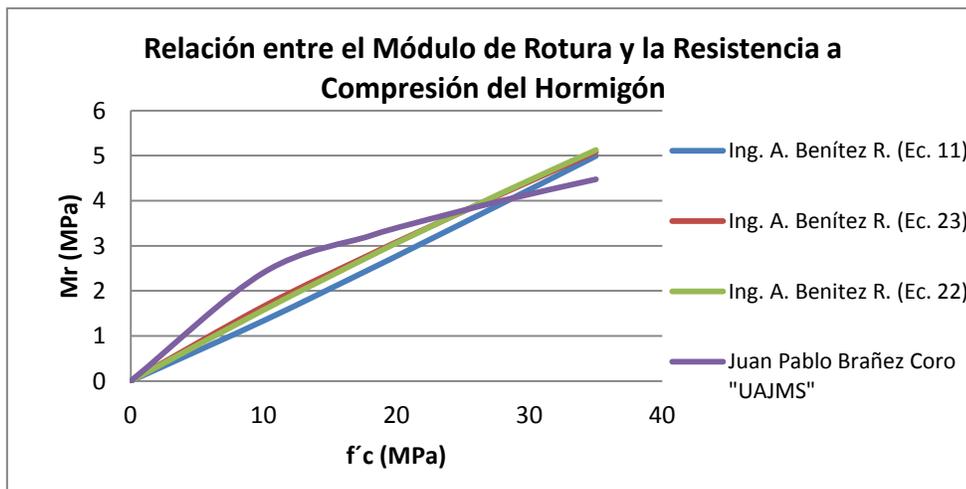
Dicho artículo muestra los resultados para la relación entre las variables estudiadas (resistencia a compresión y la resistencia a tracción por flexión) aplicando distintos modelos matemáticos de los cuales nos concentraremos en los modelos cuyo coeficiente de correlación reflejaron mejor relación entre las variables y principalmente en los valores para las constantes determinadas mediante el mismo modelo utilizado en el presente trabajo.

TABLA 28: RALACIONAR EL MÓDULO DE ROTURA Y LA RESISTECIA A COMPRESIÓN DEL HORMIGON

FUENTE	EXPRESIONES	COMENTARIO
Ing. A. BENÍTEZ R.	$f_{tf} = 0,119 * f'c^{1,051}$	$R = 0,821$ Ecuación 11 de la publicación Expresada en MPa
Ing. A. BENÍTEZ R.	$f_{tf} = 0,211 * f'c^{0,895}$	$R = 0,962$ Ecuación 23 de la publicación Expresada en MPa
Ing. A. BENÍTEZ R.	$f_{tf} = \frac{1}{0,0194 + \frac{6,149}{f'c}}$	$R = 0,966$ Ecuación 22 de la publicación Expresada en MPa
JUAN PABLO BRAÑEZ C.	$Mr = 2,488 * f'c^{0,495}$	$R = 0,976$ $180 \leq f'c \leq 350 \text{ kgf/cm}^2$
JUAN PABLO BRAÑEZ C.	$Mr = 0,770 * f'c^{0,495}$	$R = 0,976$ Expresada en MPa

FUENTE: PROPIA

FIGURA 13: RELACIONES ENTRE EL MODULO DE ROTURA Y LA RESIST. A COMPRESIÓN DEL HORMIGON



Se puede evidenciar que los modelos determinados tanto en el artículo presentado por el Ing. Alberto Benítez Reynoso como por el determinado en éste estudio muestran variaciones respecto a la resistencia a tracción por flexión debiéndose a los valores diferenciados en las constantes de proporcionalidad determinados para los modelos esto no significa que algún modelo no muestre confiabilidad, al contrario observando los coeficientes de correlación se evidencia que todas las ecuaciones son validas y aplicables, pudiendo ratificarse la necesidad que representa este tipo de estudio al observarse la diferencia en la que se manifiesta la correlación entre las variables en estudio.

## CONCLUSIONES.

- En cuanto al diseño de mezclas se obtuvieron proporciones de 1; 3,1; 3,3 para un diseño de mezcla de 180 kgf/cm<sup>2</sup>, una proporción de 1; 2,7; 3,0 para un diseño de mezcla de 210 kgf/cm<sup>2</sup>, para un diseño de mezcla de 280 kgf/cm<sup>2</sup> se obtuvo una proporción de 1; 1,9; 2,4 y finalmente para un diseño de 350 kgf/cm<sup>2</sup> una proporción de materiales de 1; 1,3; 1,9 observándose un incremento significativo en la porción de cemento en cada dosificación como puede ser evidenciado en los Anexos 10, 11, 12 y 13.
- En los Anexos 10, 11, 12 y 13 (Dosificación de Hormigones Método ACI-211), se observa que la relación agua-cemento es un factor determinante para la resistencia del hormigón. Al momento de hacer el diseño de la mezcla, esta relación se obtiene de una forma teórica, sin embargo, puede sufrir cambios según las condiciones en que se encuentren los materiales en el sitio y la consistencia que la mezcla presenta al momento de elaborarla. Esto está fundamentado en las correcciones realizadas a los diseños de mezcla, obligando a modificar las relaciones agua/cemento determinadas teóricamente. Estas modificaciones no tuvieron efecto en los diseños de mezcla para 180 y 210 kgf/cm<sup>2</sup> ya que se alcanzaron las resistencias requeridas sin problemas, en cuanto al diseño de mezcla de 280 kgf/cm<sup>2</sup> la relación agua/cemento se vio modificada en una oportunidad de 0,48 a 0,45, finalmente para el diseño de mezcla de 350 kgf/cm<sup>2</sup> se modificó en tres oportunidades de 0,40 a 0,38 y finalmente a 0,36.
- Tomando como punto de observación el parámetro de resistencia a compresión del hormigón, se concluye que las mezclas, al ser sometidas a los procedimientos de depuración de datos utilizados mostrados en los Anexos 30, 31, 32 y 33, la desviación estándar disminuye en todos los casos tal y como se puede evidenciar en la Tabla 25. Por otra parte para los diseños de mezclas de 180, 210, 280 y 350 kgf/cm<sup>2</sup> se observan sobrediseños de 11, 15, 23 y 12 kgf/cm<sup>2</sup> respectivamente.

- Analizando la resistencia a flexión una vez depurado el campo muestral no se observan cambios significativos en el promedio aritmético para cada diseño, pero si se observa una considerable disminución en la desviación estándar para todos los diseños de mezclas (Tabla 25) atribuyendo este cambio a la presencia de valores considerados extremos los cuales al ser depurados mediante los métodos del Diagrama de Caja y las Puntuaciones Z tal y como se indica en los Anexos 30, 31, 32 y 33 que provocaron dicha disminución en este parámetro.
- Las pruebas de normalidad aplicadas a los diferentes conjuntos de datos efectuadas mediante el software IBM SPSS Statistics 22, muestran un buen ajuste de éstos a una distribución normal, habiendo sido efectuado los test de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro Wilk para un nivel de significación del 95% en los Anexos 34, 35 y 36 se muestran los resultados obtenidos para los datos de resistencias a compresión y resistencia a tracción por flexión (Módulo de rotura) en los cuales se observa que los resultados para el p-value (En el software IBM SPSS Statistics 22 denominado significación asintótica) son superiores a 0,05 teniendo el único resultado crítico para la resistencia de diseño a compresión de 350 kgf/cm<sup>2</sup> con un p-value de 0,051 el cual es también incluido entre los valores que se aceptan como una distribución normal.
- En cuanto se refiere a la relación entre la resistencia a tracción por flexión (modulo de rotura) y la resistencia a compresión del hormigón se consideró la adecuación del modelo matemático planteado por la normativa ACI-318:
  - Se obtuvo una ecuación de tipo  $M_r = K * \sqrt{f'c}$  , para este caso la constante K obtenida mediante la regresión de tipo potencial aplicada a las medias de los conjuntos de datos tiene un valor de 2,488 (Figura 11) teniendo la ecuación  $M_r = 2,488 * \sqrt{f'c}$  que representa la relacion entre ambas variables.

- La norma ACI-318 sugiere que para un hormigón de peso normal, la resistencia a flexión está entre los valores de 1,99 a 2,65 veces la raíz cuadrada de la resistencia a la compresión. El valor encontrado en este proyecto para los diseños de mezclas de 180, 210, 280 y 350 kgf/cm<sup>2</sup> se encuentran dentro del rango establecido, siendo la constante  $K = 2,488$ , teniendo como ecuación  $M_r = 2,488 * \sqrt{f'_c}$ . Por otra parte analizando el coeficiente de correlación se concluye que el modelo matemático empleado muestra un grado excelente de correlación entre las variables siendo  $R = 0,972$  para la ecuación potencial (Figura 11), lo cual permite aceptar lo establecido en la hipótesis planteada.
- Los coeficientes de determinación tienen un valor de  $R^2 = 0,946$  para el modelo matemático empleado teniendo una probabilidad de alrededor de un 95% de que el modelo no sufra variación en la confiabilidad de los resultados que pueda mostrar.
- Los gráficos de Probabilidad Normal permiten identificar si los resultados obtenidos mediante el modelo matemático determinado se aproximan a los datos obtenidos experimentalmente, en este caso los residuos obtenidos entre la diferencia de los valores obtenidos y los valores esperados cumplen con los requisitos de normalidad y el valor de la media próxima a cero, a excepción del diseño de mezcla de 280 kgf/cm<sup>2</sup> evidenciándose en este caso valores atípicos que pueden observarse en el Anexo 40, los cuales no tuvieron mayor influencia para comprobar la normalidad de los residuos para esta muestra.
- Las diferentes normas y estudios realizados con el fin de determinar un modelo matemático que relacione de manera confiable la resistencia a compresión y el Módulo de rotura del hormigón establecen que el modelo matemático que mejor se ajusta y al que casi todos hacen énfasis es el modelo potencial de la forma  $M_r = K * \sqrt{f'_c}$  en el que se observa una variabilidad en la constante K de proporcionalidad teniendo límites para sus valores entre

1,88 en el Código Canadiense y 2,65 expuesto por el Código ACI-318 tal y como se expone en la Figura 13 y en la Tabla 27.

- Teniendo como referencia el trabajo realizado por el Ing. Alberto Benítez Reynoso se pudo concluir que el ajustar diferentes modelos matemáticos para relacionar las variables en estudio permite tener una visión mucho más amplia del comportamiento de una variable con la otra y permite contar con información de un posible mínimo y un posible máximo valor de proporcionalidad que tendrá la resistencia a la tracción por flexión con relación a la resistencia a compresión simple.

## RECOMENDACIONES

- Es necesario que, para futuras investigaciones, se fortalezca tanto la calidad como la cantidad de los equipos existentes en el laboratorio de nuestra universidad, ya que al poder advertir que una de las dos prensas utilizadas para la rotura de vigas y probetas mostraba una exagerada variación en los resultados se optó por trabajar solo con una de ellas lo cual incrementó el tiempo de trabajo, .
- Para obtener mejores resultados en las pruebas hechas al hormigón, se recomienda un muestreo adecuado de los agregados a utilizar en la mezcla, que éstos estén libres de partículas contaminantes, que se tenga un buen control de calidad en la elaboración de la mezcla (pesado y mezclado adecuados), que se elaboren correctamente los especímenes de prueba (compactación adecuada) y que los ensayos sean realizados en el mismo laboratorio, la misma máquina de prueba y el mismo operario verificando siempre el buen funcionamiento de los equipos utilizados para evitar errores que puedan provocar dispersión en los resultados obtenidos.
- Al momento de realizar la rotura de vigas se recomienda que éstas se encuentren en estado húmedo al realizar el ensayo ya que se observó una disminución de resistencia en vigas que se ensayaron totalmente secas estos resultados se observan en los Anexos 22, 23, 24 y 25 en donde existen valores para el Módulo de rotura demasiado bajos los cuales tuvieron que ser depurados. Los valores considerados extremos se dieron en algunos casos por la mala manipulación o curado de las vigas.
- Para proyectos futuros en los cuales se requiera el uso del modelo matemático determinado en el presente estudio se recomienda tratar de conservar las mismas características, tanto de los agregados gruesos y finos como del cemento utilizado con la finalidad de mantener la confiabilidad que muestra el modelo.

- Realizar el mismo estudio para otros casos con el fin de obtener los valores de  $K$  para los diferentes cementos utilizados en nuestro medio y contar con las fórmulas que establezcan las relaciones entre los parámetros del módulo de rotura y resistencia a la compresión del hormigón.
- Al realizarse el ajuste de bondad de los datos obtenidos se observa que es más recomendable el uso del test Shapiro Wilk pero refiriéndonos al presente estudio, ya que este test tiene mayor fuerza para conjuntos de hasta 50 datos presentándose en estos casos mayor efectividad en sus resultados.
- Los gráficos de Probabilidad Normal son herramientas útiles para comprobar visualmente la normalidad de los datos estudiados, pero es recomendable que la aceptación de estos se apoye en los resultados obtenidos por los test de ajuste de datos como el test de Shapiro Wilk.

## **BIBLIOGRAFÍA.**

BENÍTEZ, A. (2010). Relación Resistencia a la Tracción-Resistencia a la Compresión Simple en el Hormigón de la Carretera Tarija-Potosí. 21° Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural, Buenos Aires.

CAÑAS LAZO, Manuel Antonio y RETANA MARTINEZ, Manuel Edgardo, "Establecimiento de una Relación Entre el Modulo de Ruptura y la Resistencia a la Compresión Para Mezclas de Hormigón Hidráulico, El Salvador 1999.

COMITÉ ACI 318, "Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-05)", Primera Edición, enero del 2005.

CUADRAS, Carles M., "Problemas de Probabilidades y Estadística" Vol-1 Probabilidades, Barcelona 1990.

GARCIA CALDERON, Johanna Alexandra, "Determinación de la Correlación Entre el Módulo de Rotura y la Resistencia a la Compresión del Concreto (caso Prevesa)", Edición 2010.

GARCÍA CALLOCUNTO, Carolina, "Resistencia a la Flexión del Concreto", Perú, Edición 2012.

GARCIA J., Esteban, " Estadística Descriptiva y Nociones de Probabilidad, España, Edición 2005.

GUARÍN SALAZAR, Norberto, "Estadística Aplicada" Universidad Nacional de Colombia.

HERNANDEZ SAMPIERI, Roberto, FERNANDEZ CALLADO, Carlos, et al, "Metodología de la Investigación" México Edición 2010.

INSTITUTO AMERICANO DEL CONCRETO "Práctica Recomendada Para Solucionar el Proporcionamiento del Concreto Normal".

ORTIZ BERROCAL Luis, "Resistencia de Materiales", Edición Mayo de 1990 Madrid-España

UAJMS, "Manual del Laboratorio de Hormigones", Editorial "Universitario", Tarija-Bolivia.

VERES FERRER, Ernesto j., BLASCO BLASCO, Olga, et al, "Análisis de Datos y Evaluación de la Información" Edición 2013.

VITERBO O'REILLY, "Tecnología del Hormigón", Edición SOBOCE, Bolivia, S/A.